Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Introducción a las Ecuaciones Diferenciales–Curso 2003

Práctico 10

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función periódica de período $2l$ tal que $f(t) = \begin{cases} l - t & \text{si } t \in [0, l] \\ l + t & \text{si } t \in [-l, 0] \end{cases}$. Calcular las reducidas n-ésimas de su serie de Fourier, graficar $s_n(f)$ para $n = 0, 1, 2, 3$, y el límite puntual de f.

2. En los siguientes casos hallar la serie de Fourier de la función f de período 2π, y los correspondientes límites puntuales:

$$f(t) = \begin{cases} a & \text{si } t \in (-\pi, 0) \\ b & \text{si } t \in [0, \pi] \end{cases} \qquad f(t) = \begin{cases} e^{it} & \text{si } t \in (-\pi, 0) \\ i \operatorname{sen} t & \text{si } t \in [0, \pi] \end{cases}$$

$$f(t) = e^{\alpha t},\ \alpha \in \mathbb{R},\ t \in (-\pi, \pi] \qquad f(t) = \operatorname{sen}^t + i\cos^2 t,\ t \in (-\pi, \pi]$$

3. Obtener el desarrollo de Fourier de $f(t) = t^3 - \pi^2 t$ en $(-\pi, \pi]$, y utilizando la igualdad de Parseval calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$.

4. En los siguientes casos hallar la serie de Fourier de senos y la serie de Fourier de cosenos de la función $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(t) = 1 \qquad f(t) = \pi - t \qquad f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in (0, \pi/2) \\ 0 & \text{si } t \in [\pi/2, \pi) \end{cases}$$

5. Demostrar la validez de las igualdades siguientes:

(a) $t^2 = 2\left(\pi t - \dfrac{\pi^3}{3} + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n}\right),\ t \in [0, 2\pi]$ (b) $\cos t = \dfrac{8}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \operatorname{sen} 2nt}{4n^2 - 1},\ t \in (0, \pi)$

(c) $|\operatorname{sen} t| = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{4n^2 - 1},\ t \in \mathbb{R}$ Calcular: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$.

6. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función continua y periódica de período 1, y $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Demostrar que

$$\lim_n \sum_{j=1}^{n} f(\alpha n) = \int_0^1 f(t)\,dt$$

(Sugerencia: hacerlo primero para $f : f(t) = \exp(2\pi i k t)$).

7. Usar el método de Fourier para intentar encontrar $u \in C\big([0, \pi] \times [0, \infty)\big) \bigcap C^2\big([0, \pi] \times [0, \infty)\big)$ que satisfaga la ecuación del calor

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

y las condiciones de borde e iniciales indicadas a continuación. Averiguar si las candidatas así obtenidas son soluciones o no.

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 = u(\pi, t) \\ u(x, 0) = \operatorname{sen}^3 x \end{cases} \qquad \begin{cases} u(0, t) = 0 = u(\pi, t) \\ u(x, 0) = x(\pi - x) \end{cases} \qquad \begin{cases} u_x(0, t) = 0 \\ u_x(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = \operatorname{sen} x \end{cases}$$

8. Resolver por separación de variables la ecuación de ondas amortiguadas: $u_{tt} + 2bu_t - a^2 u_{xx} = 0$ en $(0, \pi) \times (0, \infty)$, $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = 0$, $0 < x < \pi$, $u(0, t) = 0 = u(\pi, t)$.

9. Sea Ω una región plana y considérese la ecuación del calor en Ω: $u_t = u_{xx} + u_{yy}$. ¿Qué ecuaciones deben satisfacer $U(r)$ y $T(t)$ para que $u(x, y, t) = U(\sqrt{x^2 + y^2})T(t)$ sea solución de la ecuación dada?

   (a) Hallar soluciones del tipo anterior para $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \rho^2\}$, con la condición $u(x, y, t) = 0 \forall (x, y) \in \partial\Omega$ y $\forall t$.

   (b) Lo mismo para la región $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \rho_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq \rho_2^2\}$.

10. Sea $\Omega := (0, a) \times (0, b)$, y sean l_1, l_2, l_3 y l_4 los lados del rectángulo Ω; más precisamente: $l_1 := (x, 0) : x \in [0, a]$, $l_2 := \{(a, y) : y \in [0, b]\}$, $l_3 := \{(x, b) : x \in [0, a]\}$ y $l_4 := \{(0, y) : y \in [0, b]\}$. Supongamos $\alpha_i : l_i \to \mathbb{C}$ es una función continua tal que, identificando l_i con $[0, a]$ o $[0, b]$ según corresponda, se tiene que α_i es continua en l_i y derivable con continuidad en el interior de l_i, y de tal forma además que entre las cuatro definen una función continua $\alpha : \partial\Omega \to \mathbb{C}$. Se considera entonces el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en Ω: hallar $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & (x, y) \in \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = \alpha \end{cases}$$

   (a) Usando el método de separación de variables resolver el problema de Dirichlet en Ω en el caso en el que todas las α_i salvo una son nulas.

   (b) Resolver mediante separación de variables el problema de Dirichlet para cualquier α (sea $u(x, y) = A + Bx + Cy + Dxy + v(x, y)$; encontrar los valores de A, B, C y D para que las condiciones de borde verificadas por v valgan 0 en los vértices del rectángulo, y resolver la ecuación en este caso sumando soluciones del tipo de las de (a)).