Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Introducción a las Ecuaciones Diferenciales – Curso 2003

Práctico 1

1. Determinar cuáles de las siguientes ecuaciones funcionales son ecuaciones diferenciales:

   (a) $x'(t) = a(t) + b(t)x(t) + c(t)x(t)^2$

   (b) $x'(t) = t^{-2}x(t)$

   (c) $tx''(t) = x(t)^2$

   (d) $x'(t) = x(t+1)$

   (e) $x'(t) = \int_0^t (1 + x(s)^2)ds$

   (f) $x(t) = \int_0^1 (x'(s)^2 + x(t)^2)ds$

   Observar que toda solución de la ecuación (e) verifica la ecuación diferencial $x''(t) = 1 + x(t)^2$, pero no recíprocamente.

2. Resolver:
$$\begin{array}{llll} \text{(i)} & x'' + x = 0, & x(0) = 1, & x'(0) = 1; \\ \text{(ii)} & x'' - 4x' + 3x = 0, & x(0) = 6, & x'(0) = 10; \\ \text{(iii)} & x'' + x = t^2 + 1, & x(0) = x_0, & x'(0) = x_1 \end{array}$$

3. Mediante cambios de variables resolver: (i) $x' = t + x$; (ii) $x' = (4t - x)^2$.

4. Trazar los campos de direcciones de las ecuaciones: (a) $x' = x/t$; (b) $x' = -x/t$; (c) $x' = \sqrt{t^2 + x^2}$; (d) $x' = 1 + tx$; (e) $x' = t^2 + x$.

5. Resolver: (i) $x' = \frac{e^t}{1+e^t}x$, $x(0) = 1$; (ii) $x' = \frac{x \ln x}{\operatorname{sen} t}$; $x(\pi/2) = e$.

6. Las trayectorias ortogonales a una familia de curvas dada por $F(x, y, c) = 0$ (c es un parámetro) son las curvas que cortan a cada curva de la familia en ángulo recto. Si $G(x, y, y') = 0$ es la ecuación diferencial de la familia dada, entonces $G(x, y, -1/y') = 0$ es la ecuación diferencial de la familia ortogonal. Hallar las familias ortogonales a las siguientes familias de curvas: (a) Elipses $x^2 + 2y^2 = c^2$; (b) Hipérbolas $xy = c$; (c) $x^2 + y^2 = 2cx$; (d) $y = ce^x$; (e) $y(cx + 1) = x$.

7. Hallar todas las soluciones de $x' = x^{1/2}$.

8. Se arrastra un punto P sobre el plano xy por medio de una varilla rígida PT de longitud l. Si T parte del origen y se desplaza a lo largo del eje positivo, y si P parte de $(l, 0)$, ¿cuál será la trayectoria de P? (Notar que el segmento PT siempre será tangente a dicha curva). La curva resultante se conoce como *tractriz*.

9. *Ecuación de Bernoulli*. Probar que el cambio de variable $y = x^{1-n}$ reduce la ecuación de Bernoulli

$$x' = a(t)x^n + b(t)x, \qquad n > 1$$

a una ecuación diferencial lineal, y por lo tanto es integrable. Supongamos que la solución que se busca verifica $x(t_0) = 0$ para algún instante $t_0 \in \mathbb{R}$; resulta entonces que el cambio de variable anterior no puede efectuarse. Remediar este inconveniente utilizando el teorema que asegura la unicidad de las soluciones. Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes: (a) $tx' + x = t^4x^3$; (b) $-2x' = tx^3 + x$.

10. Se llama *ecuación de Ricatti* a toda ecuación de la forma:

$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t).$$

Observar que si $a = 0$ esta ecuación es lineal, y que si $c = 0$ entonces es una ecuación de Bernoulli.

(a) Supongamos que $\bar{x}$ es una solución particular de la ecuación de Ricatti. Probar que entonces toda otra función definida sobre el mismo dominio que $\bar{x}$ es solución si y sólo si difiere de $\bar{x}$ en una solución de cierta ecuación de Bernoulli cuyos coeficientes dependen de a, b y $\bar{x}$.
(b) Resolver la ecuación diferencial $x' = x^2 - 2x - t^4 + 2t + 1$ sabiendo que admite una solución polinomial.
(c) Sea $x' = a(t)x+b(t)$ una ecuación diferencial lineal cuyos coeficientes (las funciones a y b) son continuos y están definidos en $\mathbb{R}$. Supongamos que φ_1 y φ_2 son dos soluciones distintas. Mostrar que toda otra solución se escribe $\varphi = \varphi_1+C(\varphi_2-\varphi_1)$.
(d) Supongamos que x_1, x_2 y x_3 son tres soluciones de la ecuación de Ricatti. Utilizando las partes anteriores hallar una expresión para una solución arbitraria en términos de las tres soluciones conocidas.

11. Mediante cambios de variables reducir las siguientes ecuaciones diferenciales en ecuaciones más simples:

(a) Ecuaciones del tipo: $x' = f(at + bx + c)$. Resolver $x' = \operatorname{sen}(t + x)$, $x(0) = 1$.
(b) Ecuaciones homogéneas: una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es homogénea de grado m si para todos $t, x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(tx, ty) = t^m f(x, y)$. Si $m = 0$, la ecuación $y' = f(x, y)$ puede transformarse mediante el cambio $y = ux$. Resolver $x' = \frac{x+t}{t}$, $x(1) = 0$.
(c) Ecuaciones del tipo: $x' = f\left(\frac{at+bx+c}{a't+b'x+c'}\right)$.
   i. Si $\{(a, b), (a', b')\}$ es linealmente independiente la ecuación se puede transformar en una ecuación homogénea.
   ii. Si $\{(a, b), (a', b')\}$ es linealmente dependiente la ecuación puede transformarse en una de variables separables.

12. Resolver: (a) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x' = -y - x(x^2 + y^2 - 1) \\ y' = x - y(x^2 + y^2 - 1) \end{cases}$ (Conviene pasar a coordenadas polares).

Entregar las partes (b) y (d) del Ejercicio 1, y la parte (a) del Ejercicio 6.

Fecha máxima de entrega: 15 de Setiembre.