Práctico 8

Formas diferenciales en variedades y teorema de Stokes.

1. Sean $f : M \to N$ y $g : N \to L$ mapas diferenciables entre variedades, $\omega \in \Omega^k(N)$, $\eta \in \Omega^k(N)$, y sea d la derivada exterior. Probar que:

   a) $f^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ es lineal.

   b) $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)$.

   c) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

   d) Si f es un difeomeorfismo, entonces f^* es un isomorfismo lineal, y $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

   e) $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (d\eta)$.

   f) $d(f^*(\omega)) = f^*(d(\omega))$.

   g) $d^2 = 0$.

2. Considérese la superficie $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = e^{-z}\}$ y la parametrización global

$$\varphi(x, y) = (x, y, -\ln(x^2 + y^2)) \tag{1}$$

   a) Hacer un esquema de la superficie en $\mathbb{R}^3$.

   b) Dar la imagen por $d\varphi$ del vector $v = (1, 2)$ en el punto $p = (1, 1)$.

   c) Dar el plano tangente a S en el punto $(1, 1, -\ln 2)$, (como un subespacio generado por dos vectores o con una ecuación implícita $ax + by + cz = d$).

   d) Considérese la función f en S, definida por la restricción a S de $f(x, y, z) = xy$. Calcular el pull-back de f por φ y el pull-back de df por φ, esto es $\varphi^*(df)$.

3. Sea M una variedad compacta orientada de dimensión n. Comprobar que las integrales $\int : \Omega^n(M) \to \mathbb{R}$ y $\int : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ son lineales. Probar también que si $f \in C^\infty(M)$, entonces

$$\left| \int_M f \right| \leq \|f\|_\infty \mathrm{Vol}(M). \tag{2}$$

   Establecer una versión de (2) para n-formas ω en lugar de funciones f, y relacionar estas desigualdades con las análogas conocidas para integrales de campos escalares y vectoriales sobre curvas y superficies.

4. Sea $\omega = \frac{2xy}{(1-x^2)^2+y^2}dx + \frac{1-x^2}{(1-x^2)^2+y^2}dy \in \Omega^1\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}\right)$.

   a) Probar que ω es cerrada.

   b) Probar que ω es exacta en $\mathbb{R}^2 \setminus U$ donde $U = \{(x, y) : |x| \geq 1, y = 0\}$.

   c) Calcular $\int_C \omega$ donde C es la curva $(1 + \frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

5. a) Calcular la derivada exterior $\omega = d\xi$ de la 1-forma ξ en $\mathbb{R}^2$, $\xi = (1 - x^2 - y^2)(dx + dy)$

b) Calcular $\int_D \omega$, donde D es el disco unidad con la orientación usual.

6. Se considera $h\colon \mathbb{R} \to S^1$ dada por $h(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Demostrar lo siguiente:

   a) Si ω es una 1-forma en S^1, entonces $\displaystyle\int_{S^1} \omega = \int_{[0,2\pi]} h^*\omega$.

   b) Una 1-forma ω en S^1 es el diferencial de una función sii $\int_{S^1} \omega = 0$.

   c) Sea ω una 1-forma en S^1 tal que $\int_{S^1} \omega \neq 0$. Si η es otra 1-forma en S^1, entonces existen una constante c y una función diferenciable $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ tales que $\eta = c\omega + df$.

   d) Demostrar que $H^1(S^1) \cong \mathbb{R}$ (sugerencia: probar que toda 1-forma en S^1 es cerrada).

7. Probar que una variedad M de dimensión n es orientable si y sólo si existe $\omega \in \Omega^n(M)$ tal que $\omega(p) \neq 0, \forall p \in M$

8. Integrar la forma $\omega = xy dx \wedge dy + y^2 dx \wedge dz$ sobre:

   a) La esfera $\mathbb{S}^2$. b) La superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z, z < 4\}$.

9. Probar que si ω es una 2-forma exacta en $\mathbb{S}^2$, entonces $\displaystyle\int_{\mathbb{S}^2} \omega = 0$.

10. Sea $\eta_0 \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ definida por $\eta_0 = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$. Se consideran $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, $r : U \to \mathbb{R}$ la función norma $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ una función diferenciable.

    a) Probar que $d\eta_0 = 3dx \wedge dy \wedge dz$.

    b) Sea $\eta = (f \circ r)\eta_0 \in \Omega^2(U)$. Calcular $d\eta$ en función de f y hallar f de forma que tal que η sea cerrada y $f(1) = 1$.

    c) Trabajando con el f hallado, calcular $\int_{\mathbb{S}^2} \eta$ donde $\mathbb{S}^2$ está orientada con la normal apuntando hacia afuera.

    d) Concluir que no existe $\theta \in \Omega^1(U)$ tal que $\eta = d\theta$.

11. Sean $f : M \to N$ y $g : N \to L$ mapas diferenciables entre variedades. Recordar que $Z^k(M) := \{\omega \in \Omega^k(M) : d\omega = 0\}$, $B^k(M) := \{\omega \in \Omega^k(M) : \omega = d\eta\}$, y $H^k(M) := Z^k(M)/B^k(M)$ (por definición se toma $B^0(M) = 0$).

    a) Probar que $f^*(Z^k(N)) \subseteq Z^k(M)$ y $f^*(B^k(N)) \subseteq B^k(M)$, y deducir que f^* induce una transformación lineal $f^\star : H^k(N) \to H^k(M)$.

    b) Probar que $(g \circ f)^\star = f^\star \circ g^\star$, y que $id_M^\star = id_{H^k(M)}$.

    c) Probar que en $D = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ todas las 1-formas cerradas son exactas, mientras que en $D^* = B(0, 1) \setminus \{0\}$ existen formas cerradas que no son exactas (sugerencia: considerar la 1-forma $\frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$). Concluir que D y D^* no pueden ser difeomorfos

12. Dados $0 < r < a$, se considera el toro $\mathbb{T}^2 := \{((a + r\cos u)\cos v, (a + r\cos u)\operatorname{sen} v, r\operatorname{sen} u) : u, v \in \mathbb{R}\}$. Se definen $f : S^1 \to \mathbb{T}^2$ y $g : \mathbb{T}^2 \to S^1$ mediante: $f(\cos t, \operatorname{sen} t) = ((a + r)\cos t, (a + r)\operatorname{sen} t, 0)$, y $g((a + r\cos u)\cos v, (a + r\cos u)\operatorname{sen} v, r\operatorname{sen} u) = (\cos v, \operatorname{sen} v)$. Demostrar que f y g están bien definidas y son de clase C^∞. Observar que $g \circ f = id_{S^1}$ y, usando el Ejercicio 11, demostrar que $H^1(\mathbb{T}^2) \neq 0$, es decir, no toda 1-forma cerrada en $\mathbb{T}^2$ es exacta.

13. Comprobar que los teoremas clásicos de Green, de Stokes y de Gauss se deducen del teorema general de Stokes para variedades compactas orientadas.

14. Probar que en $\mathbb{S}^2$ toda 1-forma cerrada es exacta (sugerencia: si N y S son los polos norte y sur de $\mathbb{S}^2$, entonces $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ y $\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$ son difeomorfos al plano, y por lo tanto toda forma cerrada en ellas es exacta; luego dada $\omega \in Z^1(\mathbb{S}^2)$, existen $\eta_1 \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ y $\eta_2 \in \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$ tales que $d\eta_1 = \omega|_{\mathbb{S}^2\setminus\{N\}}$ y $d\eta_2 = \omega|_{\mathbb{S}^2\setminus\{S\}}$, de modo que $d(\eta_1|_{\mathbb{S}^2\setminus\{S\}} - \eta_2|_{\mathbb{S}^2\setminus\{N\}}) = 0$, y como $\mathbb{S}^2 \setminus \{S, N\}$ es conexo, se deduce que $\eta_1|_{\mathbb{S}^2\setminus\{S\}} - \eta_2|_{\mathbb{S}^2\setminus\{N\}}$ es constante). Deducir que $\mathbb{S}^2$ no es difeomorfa al toro.

15.
    a) Dado un espacio vectorial con producto interno V se define la norma de un k-tensor ϕ por $|\phi| = \sup\{\phi(v_1, \ldots, v_k) : \|v_1\| = \ldots = \|v_k\| = 1\}$. Probar que si M es una variedad diferenciable acotada de dimensión n y ω es una n-forma, entonces se cumple
    $$\left|\int_M \omega\right| \leq \int_M \|\omega(x)\|\,\Omega(x) \leq \sup_{x\in M}\|\omega(x)\|\,\mathrm{Vol}(M),$$
    donde Ω es la forma de volumen en M.
    b) Decimos que una n-forma ω en $\mathbb{R}^n$ es integrable (o tiene integral impropia en $\mathbb{R}^n$) si para toda sucesión creciente de abiertos acotados A_i que cumple $\bigcup_i A_i = \mathbb{R}^n$ existe el límite de $\int_{A_i}\omega$ y no depende de la elección de la sucesión. En este caso decimos que dicho límite es la integral de ω sobre $\mathbb{R}^n$ (una definición análoga se hace para variedades no acotadas). Probar que si la función $x \mapsto \|\omega(x)\|$ es integrable en $\mathbb{R}^n$, entonces la forma ω es integrable en $\mathbb{R}^n$.
    c) Probar que si $\omega = d\theta$ es una n-forma exacta y θ tiene soporte compacto, entonces
    $$\int_{\mathbb{R}^n}\omega = 0.$$
    d) Consideremos una k-forma ω en $\mathbb{R}^n$, y sea η una $(n-k-1)$-forma con soporte compacto en $\mathbb{R}^n$. Probar que
    $$\int_{\mathbb{R}^n} d\omega \wedge \eta = (-1)^k \int_{\mathbb{R}^n}\omega \wedge d\eta$$

Entregar el Ejercicio 6 y el Ejercicio 9.

Plazo: Viernes 5 de julio.