Práctico 7

Orientación, variedades con borde, álgebra exterior, formas diferenciales en $\mathbb{R}^n$.

1. Sea $T : V \to W$ es un isomorfismo lineal entre los espacios vectoriales orientados V y W.

   a) Probar que T preserva la orientación si y sólo si existen bases positivas B de V y B' de W tales que $T(B) = B'$.

   b) Suponiendo que $V = W$, probar que T preserva la orientación si y sólo si $\det T > 0$.

2. Sea $(M, \mathcal{A})$ una variedad orientada *conexa*, y sea $\varphi : U \to M$ una parametrización, con U conexo. Probar que, o bien φ es positiva (es decir: $\det(\psi^{-1} \circ \varphi)'(x) > 0\ \forall \psi \in \mathcal{A}$ y $x \in \varphi^{-1}(\mathrm{Im}\varphi \cap \mathrm{Im}\psi)$, o bien es negativa (es decir: el determinante anterior es siempre negativo). Deducir que una variedad conexa admite exactamente dos orientaciones.

3. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^9$ el conjunto de las matrices 3×3 y rango 1. Probar que M es una variedad de dimensión 5 que tiene un atlas formado por tres parametrizaciones. Demostrar que M es orientable (mostrar que es constante el signo de los jacobianos de los cambios de parametrización).

4. Sea $N \subseteq \mathbb{R}^6$ el conjunto de las matrices 2×3 y rango 1. Probar que N es una variedad de dimensión 4 que tiene un atlas formado por dos parametrizaciones. Demostrar que N no es orientable (sugerencia: razonar como en el ejercicio anterior, y usar el Ejercicio 2).

5. Sean M una variedad con borde, $p \in \partial M$, y $v \in T_pM$. Probar que v es un vector saliente (entrante) si y sólo si existe una curva $\alpha : (-\epsilon, 0] \to M$ (respectivamente: $\alpha : [0, \epsilon) \to M$), diferenciable en 0, y tal que $\alpha'(0) = v$.

6. Sean $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $N \subseteq \mathbb{R}^l$ variedades con borde, $p \in M$, y $f : M \to N$ una función diferenciable en p, es decir, existe una extensión F de f a un abierto de $\mathbb{R}^n$, que es diferenciable en p.

   a) Probar que si G es otra extensión como F, entonces $DF_p|_{T_p(M)} = DG_p|_{T_p(M)}$.

   b) Probar que $DF_p(T_pM) \subseteq T_{f(p)}N$.

   Se define $Df_p : T_p(M) \to T_{f(p)}N$ como $Df_p(v) = DF_p(v)$. Demostrar que, si $f(p) \in \partial N$, entonces Df_p transforma vectores entrantes en vectores entrantes, y vectores salientes en vectores salientes, y deducir que $Df_p(T_p(\partial M)) \subseteq T_{f(p)}(\partial N)$.

7. Sea M una variedad orientada con borde, de dimensión m y de clase C^k ($k \geq 1$), y para cada $p \in \partial M$ sea n_p el vector normal unitario saliente. Probar que la aplicación $\partial M \to \mathbb{R}^m$ dada por $p \mapsto n_p$ es de clase C^{k-1} (sugerencia: escribir n_p en términos de $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_{m-1}}(a)$, donde φ es una parametrización de M tal que $\varphi(a) = p$).

8. Sea $f : M \to N$ un difeomorfismo entre variedades con borde. Probar que $f(\partial M) = \partial N$, y que si $g : \partial M \to \partial N$ está dada por $g(p) = f(p)$, $\forall p \in \partial M$, entonces g es un difeomorfismo, y $Dg_p : T_p(\partial M) \to T_{f(p)}(\partial N)$ satisface $Dg_p(v) = Df_p(v)$, $\forall v \in T_p(\partial M)$.

9. Sean $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ una función de clase C^k ($k \geq 1$), y c un valor regular para f. Observar que $f^{-1}((-\infty, c))$ es una variedad de dimensión m y $f^{-1}(c)$ es una variedad de dimensión $m-1$.

   a) Demostrar que $M := f^{-1}((-\infty, c])$ es una variedad con borde, cuyo borde es $f^{-1}(c)$ (sugerencia: dado $p \in f^{-1}(c)$, componer f con alguna parametrización φ de M alrededor de p, y usar la forma local de las submersiones para $f \circ \varphi$).

   b) Probar que, si $p \in \partial M$, entonces $\nabla f(p)$ es un vector saliente a M (recordar el Ejercicio 5).

10. Sean $f, g, h \in V^*$, $u, v, w \in V$. Escribir explícitamente $f \wedge g \wedge h(u, v, w)$.

11. Sean V un $\mathbb{K}-$espacio vectorial y ω una $k-$forma alternada, probar que:

   a) Si $\{v_1, \ldots, v_k\}$ es un conjunto l.d., entonces $\omega(v_1, \ldots, v_k) = 0$.

   b) Si $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \subset V^*$ es l.d., entonces $\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_k = 0$

12. Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Probar que:

   a) $|dx(u)|$ es la longitud de la proyección ortogonal de u sobre el eje x.

   b) $2|dx \wedge dy(u, v)|$ es el área del paralelogramo generado por las proyecciones ortogonales de u y v sobre el plano xy.

   c) $3!|dx \wedge dy \wedge dz(u, v, w)|$ es el volumen del paralelepípedo generado por u, v y w.

13. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x, y, z) = (e^x, e^{z+x}, 1), \qquad g(x, y, z) = (xy, z) \qquad h(x, y, z) = xyz. \tag{1}$$

   y las formas diferenciales $\omega = dx \wedge dy$, $\eta = 3dz$ en $\mathbb{R}^3$ y $\theta = xydx$ en $\mathbb{R}^2$.

   Calcular $f^*(dx)$, $f^*(dy)$, $f^*(dz)$, $f^*(h\omega)$, $f^*(\omega \wedge \eta)$ y $(g \circ f)^*(\theta)$.

14. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (2xy, y, e^z)$. Calcular $f^*(xy^2 dx \wedge dy \wedge dz)$.

15. a) Calcular la derivada exterior de las siguientes formas definidas en $\mathbb{R}^3$.

   (i) $x^3y - \cos(z)e^{yx}$ $\qquad$ (ii) $13xdx + y^2dy + xyzdz$ $\qquad$ (iii) $z^2dx \wedge dy + (z^2 + 2y)dx \wedge dz$

   b) Si ω es una $k-$forma en $\mathbb{R}^m$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable, entonces $f^*(d\omega) = d(f^*(\omega))$.

16. Investigar si las siguientes formas son cerradas y/o exactas en U, y si son exactas dar un potencial

   a) $\omega = \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy$ en $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

   b) $\omega = (6x^2y - 3xy^2)dx \wedge dy$ en $\mathbb{R}^2$.

   c) $\omega = 12x^2y^3z^4 dx \wedge dy \wedge dz$ en $\mathbb{R}^3$.

ENTREGAR EL EJERCICIO 4 O EL EJERCICIO 6 (SÓLO UNO DE ELLOS), Y LA PARTE $a)(iii)$ DEL EJERCICIO 15.

PLAZO: JUEVES 20 DE JUNIO.