Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

PRÁCTICO 6

Teoremas de Green, de Stokes y de Gauss.

1. Calcular las siguientes integrales de línea, directamente y también usando el teorema de Green:

   a) $\oint_C (1-x^2)ydx + (1+y^2)xdy$, donde C es $x^2+y^2=a^2$.

   b) $\oint_C xy^2dy - x^2ydx$, donde C es el borde del anillo $1 \leq x^2+y^2 \leq 4$.

   c) $\oint_C (xy+x+y)dx + (xy+x-y)dy$, donde C es la circunferencia $x^2+y^2=ax$.

2. Mostrar que $\oint_C (yx^3+xe^y)dx + (xy^3+ye^x-2y)dy = 0$ para toda curva de Jordan C, regular a trozos y simétrica con respecto a la recta $y=x$.

3. Usar integrales de línea para calcular las áreas de las figuras encerradas por:

   a) la *astroide:* $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, parametrizada por $(a\cos^3 t, a \operatorname{sen}^3 t)$, $t \in [0,2\pi]$.

   b) la *lemniscata de Bernoulli:* $(x^2+y^2)^2 = 2a(x^2-y^2)$ (sugerencia: poner $x = r\cos t$, $y = r \operatorname{sen} t$).

4. Se consideran los campos $X = \left(\frac{y^2-(x-1)^2}{((x-1)^2+y^2)^2}, \frac{-2(x-1)y}{((x-1)^2+y^2)^2}\right)$, $Y = \left(\frac{-y}{(x-1)^2+y^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}\right)$, $Z = \left(\frac{(y-4)^2}{8} + \frac{y}{(x-1)^2+y^2}, \frac{1-x}{(1-x)^2+y^2}\right)$, definidos en $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$, y $C_0 = \{x^2+y^2=2\}$, $C_1 = \{(x-1)^2+y^2=2\}$ y $C_2 = \{x^2+(y-4)^2=2\}$ recorridas una sola vez en sentido antihorario.

   a) Hallar las circulaciones de X, Y y Z a lo largo de las tres circunferencias (sugerencia: hallar la circulación en las tres curvas de $W = Y+Z := \left(\frac{(y-4)^2}{8}, 0\right)$ y hallar $\operatorname{rot} X$, $\operatorname{rot} Y$, $\operatorname{rot} Z$).

   b) Sólo uno de los campos dados es un gradiente en U; otro lo es en $V = \{(x,y) : x > 2\}$, y el restante no es un gradiente en ningún subconjunto abierto de U. Identificar cada campo.

5. *Teorema de la divergencia en* $\mathbb{R}^2$. Dada una curva regular $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ se define el versor $\boldsymbol{n}(\alpha(t)) := \frac{(\alpha_2'(t), -\alpha_1'(t))}{\|\alpha'(t)\|}$. Notar que $\boldsymbol{n}(\alpha(t))$ ”apunta a la derecha de α”, es decir $R_{90}(n(t)) = \alpha'(t)/\|\alpha'(t)\|$, donde R_{90} es la rotación de 90 grados en $\mathbb{R}^2$ alrededor del origen, en sentido positivo (o sea: tal que $R_{90}(e_1) = e_2$). El campo vectorial $\boldsymbol{n}$ es continuo sobre α^*, de modo que está definida la integral $\int_\alpha F \cdot \boldsymbol{n} ds$, para cualquier campo vectorial F continuo sobre α^*. Supongamos ahora que α es una curva de Jordan regular a trozos y orientada positivamente, y sea D_α la región acotada cerrada que α define. Supongamos que $F = (P,Q) : U \to \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial de clase C^1 en un abierto U que contiene a D_α. Se define $\operatorname{div} F := P_x + Q_y$.

   a) Probar que $\iint_{D_\alpha} \operatorname{div} F dxdy = \oint_\alpha F \cdot \boldsymbol{n} ds$ (considerar el campo $(-Q,P)$ y usar Green). Luego si $F(\alpha(t))$ y $\alpha'(t)$ son siempre colineales (en particular si $F|_{\alpha^*} = 0$), entonces $\iint_{D_\alpha} \operatorname{div} F = 0$.

   b) Sea $D_\epsilon := \{\mathsf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathsf{x} - p\| \leq \epsilon\} \subseteq U$. Mostrar que $\operatorname{div} F(p) = \lim_{\epsilon \to 0} \dfrac{\oint_{\partial D_\epsilon} F \cdot \boldsymbol{n} ds}{A(D_\epsilon)}$, donde ∂D_ϵ está orientado positivamente y $A(D_\epsilon) = \pi\epsilon^2$ es el área de D_ϵ.

6. Si $f : U \to \mathbb{R}$ es de clase C^2, se define su Laplaciano como $\Delta f(x,y) := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, y se dice que f es *armónica* en U si $\Delta f = 0$. Sean $p = (a,b)$ un punto cualquera de U, y $\epsilon > 0$ tal que $D_\epsilon \subseteq U$ (donde D_ϵ es el disco cerrado de radio ϵ centrado en p).

a) Sea $\phi : [0,\epsilon] \to \mathbb{R}$ tal que $\phi(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + r\cos t, b + r \operatorname{sen} t)dt$. Probar que, $\forall r \in (0,\epsilon]$, se tiene $\phi'(r) = \frac{1}{2\pi r}\oint_{\partial D_r} \nabla f \cdot \boldsymbol{n} ds$.

b) Deducir que si f es armónica, entonces f tiene la propiedad del valor medio, es decir, $\phi(r) = f(p)$, $\forall r \in (0,\epsilon]$. Recíprocamente, demostrar que si f tiene la propiedad del valor medio en cada punto $p \in U$, entonces f es armónica (recordar la parte c) del Ejercicio 5).

7. Usar el teorema de Stokes para calcular $\oint_C (x-z)dx + (x+y)dy + (y+z)dz$, donde C es la elipse en la que el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ corta al plano $z = y$, orientada en sentido antihorario.

8. Sea $F : U := \mathbb{R}^3 \setminus Oz \to \mathbb{R}^3$ dado por $F(x,y,z) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, f(z))$, donde f es de clase C^1.

   a) Probar que $\operatorname{rot} F = 0$.

   b) Probar, por cálculo directo, que $\oint_C F \cdot ds = \pm 2\pi$ para toda circunferencia horizontal C centrada en un punto del eje z, y explicar por qué esto no contradice el teorema de Stokes.

   c) Si C es una curva de Jordan regular a trozos en U, calcular $\oint_C F \cdot ds$.

9. Calcular el flujo del rotor del campo vectorial $X(x,y,z) = (z-x, x-z, y-x)$ a través de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$ con normal formando ángulo agudo con el eje Oz.

10. Sea S una superficie orientable compacta con borde, y sea C el borde de S con la orientación inducida. Sea $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ fijo. Definimos los campos $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mediante $F(x,y,z) = (a,b,c) \times (x,y,z)$ y $G(x,y,z) = (a,b,c)$ para todo (x,y,z) en $\mathbb{R}^3$. Probar que $\int_C F = 2\int_S G$.

11. Una de las ecuaciones de Maxwell dice que si $E(t,x,y,z)$ y $B(t,x,y,z)$ representan respectivamente los campos eléctrico y magnético en el tiempo t, entonces $\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ (donde $\operatorname{rot} E$ se calcula manteniendo t fijo). Probar que si B es de clase C^1, entonces $\displaystyle\oint_{\partial S} E \cdot ds = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S B \cdot dA$. Aquí $\oint_{\partial S} E \cdot dA$ representa el voltaje alrededor de ∂S, y $\int_S B \cdot dA$ es el flujo magnético. Si ∂S representa un cable, la ley de Faraday dice que el voltaje inducido en el cable es directamente proporcional a la rapidez con la que cambia en el tiempo el flujo magnético que atraviesa una superficie cualquiera que tiene por borde a dicho cable.

12. Una de las ecuaciones de Maxwell establece que, si J es la intensidad de corriente eléctrica y B es el campo magnético inducido, entonces $\operatorname{rot} B = \mu_0 J$, donde μ_0 es la constante de permeabilidad magnética del vacío. Utilizando el teorema de Stokes, deducir la ley de Ampère: *La circulación de un campo magnético a lo largo de una línea cerrada es proporcional a la intensidad neta que atraviesa la superficie limitada por dicha línea*, es decir: $\oint_C B \cdot ds = \mu_0 I$, donde $I = \int_S J \cdot dA$.

13. Calcular la circulación de $X(x,y,z) = (-y^3, x^3, -z^3)$ a lo largo de la curva C siendo C la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 1$, orientado en el sentido contrario de las agujas del reloj (visto “desde arriba”).

14. Sea $X(x,y,z) = (x^2, 2xy + x, z)$. Sean C la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y S el disco $x^2 + y^2 \leq 1$, ambos contenidos en el plano $z = 0$.

a) Determinar el flujo de X hacia el exterior de S (normal hacia arriba).

b) Determinar la circulación de X a lo largo de C.

c) Hallar el flujo de $\operatorname{rot} X$. Verificar directamente el teorema de Stokes en este caso.

15. En los siguientes casos usar el teorema de la divergencia para calcular $\int_S F \cdot dA$:

    a) $F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$, donde S es el borde del cubo $[0, a] \times [0, a] \times [0, a]$.

    b) $F(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$, donde S es la esfera unidad.

    c) $F(x, y, z) = (3x^2, xy, z)$, donde S es el borde del tetraedro determinado por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$.

16. Calcular el flujo del campo $F(x, y, z) = (ax^2, by^2, cz^2)$ a través de la esfera unidad centrada en el origen de dos maneras: usando el teorema de la divergencia, y también directamente (para esto último puede ser conveniente usar el Ejercicio 13 a) del Práctico 5).

17. Mostrar, usando Gauss, que el volumen de una región cuyo borde S es una superficie compacta es igual a un tercio del flujo de $\boldsymbol{r}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de S orientada con la normal saliente.

18. Calcular el volumen encerrado por un elipsoide con semiejes de longitudes a, b y c, orientado con la normal apuntando hacia afuera.

19. Si una superficie S encierra una región compacta U, y $\rho(t) : U \to \mathbb{R}$ es la densidad de un fluido en U en el instante t, entonces la masa correspondiente es $m(t) = \int_U \rho(t)$, y la ley de conservación de la masa se expresa: $m'(t) = -\int_U \rho(t)v(t)$, donde v es la velocidad del fluido en el instante t.

    a) Usar el teorema de Gauss y la ley de conservación de la masa para deducir la *ecuación de continuidad* para un fluido: $\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0$.

    b) Deducir el principio de Bernoulli para un fluido ideal incompresible (ρ =cte) en presencia de un campo gravitatorio. Es decir, probar que para un fluido incompresible se tiene que $\frac{1}{2}||v||^2 + p + \rho\phi$ =cte a lo largo de las líneas de flujo (esto es, a lo largo de las curvas $\alpha(t)$ con $\alpha'(t) = v(\alpha(t), t)$), siendo p la presión y ϕ el potencial gravitatorio. Recordar que la dinámica de un fluido ideal incompresible está descrita por la ecuación

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho(v \cdot \nabla)v + \nabla p + \rho \nabla \phi = 0.$$

20. En los siguientes casos probar que el campo dado X es solenoidal (i.e.: $\operatorname{div} X = 0$), y hallar un potencial vectorial para X, es decir, un campo Y con rotacional X (sugerencia: buscar potenciales planos, i.e, de la forma $Y = (P, Q, 0)$).
    a) $X(x, y, z) = (xz, -yz, y)$. b) $X(x, y, z) = (xe^y, -x \cos z, -ze^y)$.

Entregar los Ejercicios 9) y 17).

Plazo: Lunes 10 de junio.