Práctico 5

Integrales de línea, rotacional, divergencia, e integrales de superficie.

1. Sean $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ y $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ curvas de clase C^1, regulares y simples, y con la misma imagen: $\alpha^* = \beta^* =: C \subseteq \mathbb{R}^n$. sea $\varphi := \beta^{-1} \circ \alpha : [a,b] \to [c,d]$.

   a) Probar que φ es un homeomorfismo.

   b) Demostrar que $\varphi|_{(a,b)} : (a,b) \to (c,d)$ es un difeomorfismo (sugerencia: si $u_0 \in (a,b)$, entonces $v_0 := \varphi(u_0) \in (c,d)$, y como β es regular existe j tal que $\beta_j'(v_0) \neq 0$; aplicar el teorema de la función implícita en el punto (u_0, v_0) a la función $G : (a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}$ tal que $G(u,v) = \alpha_j(u) - \beta_j(v)$).

   c) Demostrar que φ es un difeomorfismo. Concluir que la longitud de C no depende de la parametrización elegida siempre que esta sea simple, y que $\int_\alpha f = \pm \int_\beta f$, dependiendo de si φ es creciente o decreciente.

2. Dar una versión del ejercicio anterior para curvas simples cerradas.

3. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el campo $F(x,y) = (y^2, x^2 - 2xy)$.

   a) Calcular la integral de línea de $\int F ds$ desde el punto $(1,0)$ al $(0,1)$ a lo largo de: (i) el segmento de recta y (ii) el cuarto de circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

   b) ¿Es F un campo gradiente ?

   c) Encuentre ejemplos de funciones reales $h(x)$ y $\varphi(x,y)$ tales que $\nabla\varphi(x,y) = h(x)F(x,y)$.

4. *Principio de conservación de la energía.* Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función de energía potencial del campo conservativo $F : U \to \mathbb{R}^n$, es decir, $\nabla f = -F$. La energía total de una partícula de masa m que se mueve a lo largo de una curva γ bajo la acción del campo conservativo F es la suma de su energía potencial y su energía cinética: $E(t) = f(\gamma(t)) + \frac{1}{2}m\|\gamma'(t)\|^2$. Probar que E es una función constante, lo que explica la adjetivación de “conservativo” para F (recordar que, según la ley de Newton, la fuerza es igual a la masa por la aceleración: $F(\gamma(t)) = m\gamma''(t)$).

5. Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto, $X \in \chi(U)$ y $f \in C^\infty(U)$. Probar que:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{rot}(\nabla f) = 0 & \mathrm{div}(\mathrm{rot}X) = 0 \\ \mathrm{rot}(fX) = f\mathrm{rot}(X) + (\nabla f) \times X & \mathrm{div}(fX) = f\mathrm{div}X + < \nabla f, X > \end{array}$$

6. Demostrar que dos potenciales escalares de un mismo campo vectorial definidos en un abierto conexo $U \subset \mathbb{R}^3$ difieren en una constante. Demostrar que si Y es un potencial vectorial de X, i.e, $\mathrm{rot}(Y) = X$ entonces $Y + \nabla f$ también lo es, para toda $f \in C^\infty(U)$.

7. Sean $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : xy + 1 = 0\}$ y $F : U \to \mathbb{R}^2$ tal que $F(x,y) = \left(\frac{1-y^2}{(1+xy)^2}, \frac{1-x^2}{(1+xy)^2} \right)$.

   a) Hallar todos los potenciales escalares de F en U.

b) Calcular $\int_C F$ a lo largo de una curva en U que una el punto $(1,1)$ con el $(3,2)$.

8. Determinar cuáles de los siguientes campos son campos gradiente, y hallar un potencial escalar correspondiente.
   a) $X(x,y) = (xy, xy)$ b) $X(x,y) = (x^2+y^2, 2xy)$ c) $X(x,y,z) = (2xyz + \sin x, x^2z, x^2y)$.

9. Calcular el rotor del campo $X(x,y,z) = \frac{(yz,-xz,xy)}{x^2+y^2+z^2}$.

10. Un campo radial es un campo que en cada punto es paralelo al rayo que une ese punto con el origen y tiene módulo que sólo depende de la distancia al origen, i.e. que es de la forma $X(x,y,z) = V(r)(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r})$.

    a) Hallar el rotor y la divergencia de un campo radial.

    b) Probar que todo campo radial es de gradiente.

    c) Hallar todos los campos radiales con divergencia nula.

11. Hallar el área de la superficie parametrizada por $\varphi(u,v) = (2u\sin v, 2u\cos v, e^{-u}+e^{u})$, donde $0 < v < \pi/2, 0 < u < 1$.

12. Calcular el área de la parte del cono $z := \sqrt{x^2+y^2}$ cortado con la esfera $x^2+y^2+z^2 = 2ax$.

13. a) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie que se cubre por una parametrización $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$, y que queda invariante por una isometría $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (es decir que $T(S) \subseteq S$). Mostrar que si $f : S \to \mathbb{R}$ es tal que $f(T(x)) = -f(x)\ \forall x \in S$, entonces se tiene que $\int_S f\,dA = 0$.

    b) Calcular $\int_S f(x,y,z) = 2y(x^2+1)^{-1}(1+4z)^{-1/2}dA$ sobre $S =: \{z = x^2+y^2, |y| < 1\}$.

14. Calcular:

    a) $\int_S x^2z\,dA$, donde S es la parte del cilindro $x^2+y^2 = 1$ entre los planos $z = 0$ y $z = 1$.

    b) $\int_S z^2\,dA$, donde S es la porción del cilindro $x^2+y^2 = 4$ entre los planos $z = 0$ y $z = x+3$.

    c) $\int_S \frac{1}{\sqrt{z-y+1}}dA$, donde S es la superficie $2z = x^2+2y$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

15. Calcular el flujo de $F(x,y,z) = 3xy^2\mathbf{i} + 3xy^2\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ a través de la esfera unidad.

16. Calcular $\int_S F\cdot\mathbf{n}\,dA$, para las siguientes F y S, donde $\mathbf{n}$ es el vector normal saliente a la superficie.

    a) $F(x,y,z) = (x, y^2, z)$, y S es el triángulo determinado por los ejes coordenados y el plano $x+y+z = 1$.

    b) $F(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$ y S es la parte del cono $z^2 = x^2+y^2$ entre los planos $z = 1$ y $z = 2$.

$\boxed{\text{ENTREGAR EL EJERCICIO 11}}$.

$\boxed{\text{PLAZO: JUEVES 30 DE MAYO.}}$