Práctico 4

Mapas diferenciables entre variedades. Curvas e integrales de línea.

1. Sea $M \subset \mathbb{R}^k$ una variedad diferenciable. Mostrar que si U es abierto en M, entonces U es una variedad diferenciable. Además, si $p \in U$ entonces $T_pU = T_pM$. Finalmente, si $N \subset \mathbb{R}^l$ es otra variedad y $f : M \longrightarrow N$ es diferenciable, entonces $D_p f = D_p\,(f|_U)$.

2. Sean $M \subset \mathbb{R}^n$ una variedad conexa y $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Mostrar que si $D_p f = 0$ para todo $p \in M$ entonces f es constante.

3. Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y $p_0 \in \mathbb{R}^3$ fijo. Definamos $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(p) = \| p - p_0 \|^2$.

   a) Probar que f es diferenciable y que $Df_p(v) = 2\langle p - p_0, v\rangle$, $\forall p \in S$, $v \in T_pS$.

   b) Si $p_0 \notin S$, definimos $g : S \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad g(p) = \| p - p_0 \|$. Mostrar que g es diferenciable y que $D_p g(v) = \dfrac{\langle p - p_0, v\rangle}{\|p - p_0\|}$, $\forall v \in T_p(S)$.

   c) Deducir que si g tiene un extremo relativo en p_1, entonces $p_1 - p_0 \perp T_{p_1}S$.

4. Sean $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una variedad de clase C^k y dimensión m, $p \in M$ y $f : M \to \mathbb{R}^l$. Demostrar que f es diferenciable en p si y sólo si existen un abierto $W_p \subseteq \mathbb{R}^n$ que contiene a p, y $F : W_p \to \mathbb{R}^l$ diferenciable en p, tales que $f = F|_{W_p \cap M}$ (sugerencia: usar que M es localmente un gráfico). Mostrar que en ese caso es $Df_p = DF_p|_{T_pM}$.

5. Enunciar y demostrar la regla de la cadena y el teorema de la función inversa para aplicaciones diferenciables entre variedades.

6. Hallar difeomorfismos entre las siguientes superficies: el cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$, el cono $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$ y el plano menos un punto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Observar que el cono con el vértice $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0\}$ no es una variedad.

7. Se considera $f : R^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (x \cos z - y \operatorname{sen} z, x \operatorname{sen} z + y \cos z, z)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calcular $f(S^2)$, y probar que $f|_{S^2}$ es un difeomorfismo sobre su imagen.

8. a) Bosquejar la *astroide*, $\mathscr{A}$, y calcular su longitud, donde $\mathscr{A} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} = 1\}$ (notar que la astroide es simétrica con respecto a cualquiera de los ejes coordenados).

   b) Mostrar que la longitud de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a \geq b$, es

   $$4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt,$$

   donde $k = \sqrt{1 - (b/a)^2}$ es la excentricidad de la elipse (esta integral es una de las llamadas *integrales elípticas*).

9. Mostrar que la integral de línea del campo escalar $f(x,y)$ a lo largo de una curva dada en coordenadas polares por $r = r(\theta)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, es

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\sqrt{r(\theta)^2 + r'\theta)^2}\,d\theta.$$

Usar esto para calcular la longitud de la *cardioide*, dada por $r(\theta) = 1 + \cos\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

10. a) Calcular $\int_C (x+y)ds$, donde C es el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$ orientado positivamente (en la dirección contraria al movimiento de las agujas del reloj).

    b) Calcular $\int_C y^2 ds$, donde C, la cicloide, está parametrizada por $\gamma(t) = (t - \mathrm{sen}\,t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

    c) Calcular $\int_C \frac{x+y}{y+z} ds$, donde C está parametrizado por $\gamma(t) = (t, \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}, t)$, $t \in [0,1]$.

11. Hallar la masa de un alambre cuya forma es la de la intersección entre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con el plano $x + y + z = 0$, sabiendo que la densidad del alambre en el punto (x,y,z) es $\rho(x,y,z) = x^2$.

12. Bosquejar el campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $F(x,y) = (y^2, 2xy)$. Observar que $F(x,y) = \nabla f(x,y)$ para una función diferenciable f y dibujar las curvas de nivel de f.

13. Calcular $\int_C F \cdot d\mathsf{s}$ para las siguientes F y C:

    a) $F(x,y,z) = (x,y,z)$ y C es el segmento de recta desde $(0,0,0)$ a $(1,1,1)$.

    b) $F(x,y) = (x^2 y, x^3 y^2)$, y C es la curva cerrada formada por porciones de la recta $y = 4$ y la parábola $y = x^2$, orientada positivamente.

    c) $F(x,y,z) = (y, z, xy)$, y C está parametrizado por $\gamma(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\,t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

14. Calcular las siguientes integrales de línea:

    a) $\int_C y dx + x dy$, donde C es la curva $y = x^2$ que une los puntos $(0,0)$ y $(2,4)$.

    b) $\int_C y^n dx + x^n dy$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

    c) $\int_C y|y|dx + x|x|dy$, donde C es la frontera de $\{(x,y) : |x| + |y| < 1\}$.

    d) $\int_C (z+y)dx + (x+z)dy + (y+x)dz$, donde C es la poligonal con vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ y $(1,1,1)$.

15. Calcular el trabajo realizado por la fuerza $F(x,y) = (2xy, -x^2)$ a lo largo de los siguientes caminos que unen $O = (0,0)$ con $A = (2,1)$.

    a) El segmento OA.

    b) La parábola determinada por la ecuación $y = x^2$.

    c) La poligonal OBA donde $B = (2,0)$.

16. En cada caso calcular la circulación $\int_C F \cdot d\mathsf{s}$ del campo F a lo largo de la curva C.

   a) $F(x,y) = (x^2 - 2xy, 2xy - y^2)$; C el arco de la parábola $y = x^2$ que va desde $(1,1)$ a $(2,4)$.

   b) $F(x,y) = (2a - y, x)$; C el primer arco de la cicloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0,\pi]$.

   c) $F(x,y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$; C el arco de la curva $y = 1 - |1 - x|$ que va desde $(0,0)$ a $(2,0)$.

   d) $F(x,y,z) = (z,x,y)$; C el arco de la hélice $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ que va del punto $(1,0,0)$ al $(1,0,2\pi)$.

17. *Una curva que llena un triángulo.* Considérese un triángulo rectángulo T con lados de longitudes 3,4 y 5. La altura correspondiente al ángulo recto divide al triángulo T en dos triángulos congruentes. Etiquetamos $\mathsf{T}(0)$ al menor de ellos, y $\mathsf{T}(1)$ al mayor. Ahora dividimos de forma similar cada uno de estos triángulos $\mathsf{T}(\epsilon)$, etiquetando $\mathsf{T}(\epsilon 0)$ al menor y $\mathsf{T}(\epsilon 1)$ al mayor. Recursivamente dividimos cada uno de los 2^n triángulos $\mathsf{T}(\epsilon_1\epsilon_2\ldots\epsilon_n)$ en dos triángulos congruentes, $\mathsf{T}(\epsilon_1\epsilon_2\ldots\epsilon_n 0)$ y $\mathsf{T}(\epsilon_1\epsilon_2\ldots\epsilon_n 1)$, siendo mayor el último. Ahora considérese cualquier punto $x \in [0,1]$ en su expresión binaria $x = 0,\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\ldots$ donde cada ϵ_i es 0 o 1 (o sea que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{2^n}$).

   a) Probar que $\mathsf{T}(\epsilon_1\epsilon_2\ldots\epsilon_n)$ tiene diámetro a lo sumo $5(0,8)^n$.

   b) Supongamos que x tiene dos expresiones binarias, una finita: $x = 0,\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\ldots$ y otra infinita: $x = 0,\epsilon'_1\epsilon'_2\epsilon'_3\ldots$. Entonces existe n tal que $\epsilon_m = \epsilon'_m$ $\forall m \leq n$, $\epsilon_m = 0$ $\forall m \geq n$ y $\epsilon'_m = 1$ $\forall m > n$. Probar que $\cap_{n\geq 1}\mathsf{T}(\epsilon_1\epsilon_2\ldots\epsilon_n) = \cap_{n\geq 1}\mathsf{T}(\epsilon'_1\epsilon'_2\ldots\epsilon'_n)$.

   c) Se define $\gamma : [0,1] \to \mathsf{T}$ así: $\gamma(x)$ es el único punto en $\cap_{n\geq 1}\mathsf{T}(\epsilon_1\epsilon_2\ldots\epsilon_n)$.

      - Probar que γ es continua.
      - Probar que $\gamma([0,1]) = \mathsf{T}$.

ENTREGAR EL EJERCICIO 9 Y LA PARTE a) DEL EJERCICIO 14.

PLAZO: MIÉRCOLES 15 DE MAYO.