PRÁCTICO 3

Variedades en espacios euclidianos

1. a) Sea $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| < r\}$ con $r > 0$. Mostrar que $f : B_r \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$f(x) = \frac{rx}{\sqrt{r^2 - ||x||^2}}$$

es un difeomorfismo de clase C^∞ entre B_r y $\mathbb{R}^n$.

   b) Sea M una variedad de dimensión k. Probar que todo punto de M tiene un entorno difeomorfo a todo $\mathbb{R}^k$ y que, en consecuencia, las parametrizaciones pueden ser elegidas con dominio en $\mathbb{R}^k$.

2. Encontrar ejemplos de abiertos conexos de $\mathbb{R}^2$ que no sean difeomorfos. Observar que en $\mathbb{R}$ todos los abiertos conexos son difeomorfos.

3. Probar que la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $f(x, y) = (xe^y + y, xe^y - y)$, es un difeomorfismo.

4. Se considera en la esfera S^2 el polo norte $N = (0, 0, 1)$ y el polo sur $(0, 0, -1)$. Identificamos $\mathbb{R}^2$ con el plano $xy \subset \mathbb{R}^3$ mediante $(u, v) \leftrightarrow (u, v, 0)$. Sea $X_N : \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{N\}$ la función que lleva cada punto Q del plano xy en la intersección de S^2 con la recta que une Q con N. El mapa X_N se llama *proyección estereográfica*.

   a) Mostrar que $X_N : \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{N\}$ y $(X_N)^{-1} : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2$ están definidas por:

$$X_N(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}\right)$$

$$(X_N)^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z}\right)$$

   b) Probar que X_N es una parametrización.

   c) Observar que mediante la proyección estereográfica se puede cubrir la esfera con dos entornos coordenados.

   d) Determinar la imagen por la proyección estereográfica (desde el polo norte) de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

   (a) $\mathbb{R}^2$. (b) $B = \{x : ||x|| \leq 1\}$ (c) S^1 (d) Rectas por el origen.

   e) Demostrar que la esfera no puede ser cubierta con una única parametrización.

   f) Generalizar a), b), c) y e) a las esferas n-dimensionales: $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

5. Sean $M \subset \mathbb{R}^n$ una variedad diferenciable de dimensión k, y $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ una inmersión inyectiva definida en el conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^k$.[1] Probar que, si $\varphi(U)$ es abierto en M, entonces $\varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to U$ es continua, y por lo tanto φ es una parametrización.

[1] Es decir, φ es inyectiva y diferenciable, con $D_x\varphi$ inyectivo para todo $x \in U$.

6. Sea $\varphi : (-1, \infty) \to \mathbb{R}^2$ tal que $\varphi(t) = (t^2, t - t^3)$, y sea $M := \varphi(-1, \infty)$. Bosquejar la imagen de φ. Probar que φ es una inmersión inyectiva, pero no es una parametrización (bosquejar primero la imagen de φ). Comparar con el ejercicio anterior.

7. Considérese el hiperboloide de una hoja $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$.

   a) Hallar el espacio tangente $T_p(S)$ en un punto genérico $p = (a, b, c) \in S$, y mostrar que $T_p(S)$ contiene al eje z si y sólo si p es de la forma $p = (a, b, 0)$.

   b) Hallar la intersección de S con el plano que pasa por $p = (a, b, 0)$ y es paralelo a T_pS, y mostrar que consiste en dos rectas.

8. Dada una esfera de radio 2 centrada en el origen, hallar la ecuación del plano tangente en el punto $(1, 1, \sqrt{2})$ considerando la esfera como:

   a) Una superficie parametrizada por $\Phi(\theta, \phi) = (2\cos\theta \sin\phi, 2\sin\theta\sin\phi, 2\cos\phi)$.

   b) Un conjunto de nivel de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

   c) La gráfica de $g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

9. Si M es una hiperficie en $\mathbb{R}^n$ y $p \in M$, se define la *recta normal* a M en p como la recta que pasa por p y es perpendicular a T_pM. Mostrar que si todas las rectas normales a una hiperficie conexa pasan por el origen, entonces la hiperficie está contenida en una esfera.

10. *Variedades producto.* Sean M y N dos variedades diferenciables, y sean $p \in M$, $q \in N$.

    a) Probar que si $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^k \to U_p \subseteq \mathbb{R}^m$ y $\psi : V \subseteq \mathbb{R}^l \to V_q \subseteq \mathbb{R}^n$ son parametrizaciones, entonces $\eta : U \times V \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \to U_p \times V_q \subseteq \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ es una parametrización.

    b) Concluir que $M \times N$ es una variedad, con $\dim(M \times N) = \dim M + \dim N$, y probar que existe un isomorfismo natural entre $T_{(p,q)}(M \times N)$ y $T_pM \oplus T_qN$.

11. Sea $SL_2(\mathbb{R}) := \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\} \subset \mathbb{R}^4$. Probar que $SL_2(\mathbb{R})$ es una variedad diferenciable de dimensión 3 y hallar el espacio tangente $T_{Id}SL(2, \mathbb{R})$.

12. Sea $F : M_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sim}_n(\mathbb{R})$ dada por $F(A) := A^tA$, donde $\mathrm{Sim}_n(\mathbb{R}) := \{B \in M_n(\mathbb{R}) :\ B^t = B\}$.

    a) Probar que F es de clase C^∞, y calcular DF_A (recordar que si F es diferenciable en A, entonces $DF_A(V) = \frac{\partial F}{\partial V}(A), \forall V \in M_n(\mathbb{R})$).

    b) Mostrar que $Id \in \mathrm{Sim}_n(\mathbb{R})$ es un valor regular de F.

    c) Sea $O(n) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^tA = Id\}$ el grupo de matrices ortogonales de tamaño n. Demostrar que $O(n)$ es una variedad diferenciable de dimensión $\frac{1}{2}(n^2 - n)$.

    d) Para cada $A \in O(n)$, calcular el espacio tangente $T_A(F)$.

Entregar la parte f) del Ejercicio 4, o el Ejercicio 12 (sólo uno de ellos).

Plazo: Viernes 26 de abril.