Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Práctico 2

Teoremas de la función inversa y de la función implícita

1. Mostrar que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = (x - 2y, 2x - y)$ es globalmente invertible, y encontrar su inversa. Encontrar la región del plano xy que es transformado en el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$ y $(-1, 2)$ del plano uv.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = (x - y, xy)$.

   a) Dibujar algunas de las curvas de nivel de las funciones u y v. ¿Cuáles regiones del plano xy se transforman en el rectángulo $[0, 1] \times [1, 4]$ del plano uv? (hay dos).

   b) Calcular una inversa local de f alrededor del punto $(2, -3)$, y hallar $Df^{-1}_{(5,-6)}$.

   c) Verificar que $f'(2, -3)(f^{-1})'(5, -6) = Id$, haciendo la multiplicación matricial respectiva.

3. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y, z) = (u, v, w) = (x - xy, xy - xyz, xyz)$. Sea $U := \{(x, y, z) : xy \neq 0\}$. Mostrar que f es un difeomorfismo en U, y dar una fórmula para su inversa $f^{-1} : f(U) \to U$. Hallar el jacobiano de f^{-1} en $(a, b, c) \in f(U)$.

4. Supongamos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable en un entorno del punto a, y que $J_f(a) = 0$. Probar que f^{-1} no es diferenciable en $f(a)$. Dar un ejemplo de esta situación.

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = e^x(\cos y, \operatorname{sen} y)$

   a) Mostrar que f no es inyectiva, y hallar su imagen.

   b) Mostrar que el jacobiano de f es distinto de 0 para cualquier punto del plano, y concluir que f es un difeomorfismo local, pero no es un difeomorfismo.

   c) Sean $a = (0, \pi/3)$, $b = f(a)$. Llamamos g a la inversa local de f definida en un entorno del punto b, tal que $g(b) = a$. Hallar la fórmula específica de g. Hallar Df_a y Dg_b.

   d) Hallar las imágenes de f de las líneas paralelas a los ejes coordenados.

6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (x/2) + x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   a) Demostrar que Df_0 es inyectivo y por lo tanto invertible.

   b) Probar que f no tiene inversa en ningún entorno del 0.

   c) ¿Por qué lo anterior no contradice al teorema de la función inversa?

7. Se consideran las funciones implícitas $y_c(x)$ definidas por las ecuaciones $F(x, y) = c$, para $c \in \mathbb{R}$, siendo $F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2 + 2y^2$. La curva de nivel para $c = 0$ se conoce como *lemniscata de Bernoulli*. Encontrar el conjunto de los puntos para los que $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, es decir, aquellos en los que no podemos aplicar el teorema de la función implícita para resolver y como función de x. Demostrar que el conjunto $E = \{(x, y_c(x)) \; : \; y_c'(x) = 0, c > -1, x \neq 0\}$ está contenido en una circunferencia. Hacer un dibujo para visualizar las curvas de nivel y los puntos de E.

8. Averiguar si la ecuación $(x+1)^2 y - xy^2 = 4$ define a y como función de x en un entorno de los siguientes puntos:

   a) (1,2);   b) (2,1);   c) (-1,2).

9. En los siguientes casos mostrar que la ecuación $F(x, y) = 0$ define implícitamente a y como función de x en el punto dado (a, b), y calcular $f'(a)$.

   a) $F(x, y) = xe^y - y + 1$ en $(-1, 0)$.   b) $F(x, y) = x \cos xy$ en $(1, \pi/2)$.

10. Demostrar que la ecuación $e^y + y = e^{-2x} - x$ determina una única función $y = f(x)$ definida para todo x real. Hallar $f'(0)$, $f''(0)$ y $f'''(0)$.

11. Mostrar que la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define implícitamente a z como función de x e y, $z = f(x, y)$, en el punto dado (a, b, c). Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$.

    a) $F(x, y, z) = z^3 - z - xy \operatorname{sen} z$ en $(0, 0, 0)$.   b) $F(x, y, z) = x + y + z - e^{xyz}$ en $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

12. Mostrar que el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{rcl} 3x + y - z - u^3 & = & 0 \\ x - y + 2z + u & = & 0 \\ 2x + 2y - 3z + 2u & = & 0 \end{array}\right.$
puede resolverse para x, y, u en términos de z; para x, z, u en términos de y; y para y, z, u en términos de x. Mostrar que, en cambio, no puede resolverse para x, y, z en términos de u.

13. Mostrar que las ecuaciones
$$\left\{\begin{array}{l} 2e^u + vx - 4y + 3 = 0 \\ v \cos u - 6u + 2x - z = 0 \end{array}\right.$$
definen a u y v como funciones de (x, y, z) en un entorno de $(3, 2, 7)$, con $u(3, 2, 7) = 0$ y $v(3, 2, 7) = 1$. Calcular las derivadas parciales de u y v respecto a x, y, y z en $(3, 2, 7)$.

14. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $m < n$ una función de clase C^1. Probar que f no es inyectiva (sugerencia: hacer inducción en m).

ENTREGAR LAS PARTES a) Y b) DEL EJERCICIO 2, O EL EJERCICIO 12 (SÓLO UNO DE ELLOS).

PLAZO: MIÉRCOLES 10 DE ABRIL.