Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Práctico 1

Sucesiones y series de funciones

1. Determinar cuáles de las siguientes funciones convergen puntualmente o uniformemente. Estudiar la continuidad de la función límite en cada caso.

   - $f_n(x) = \frac{\text{sen}(x)}{n}$ con $x \in \mathbb{R}$.
   - $f_n(x) = \frac{1}{nx+1}$ con $x \in (0,1)$.
   - $f_n(x) = \frac{x}{nx+1}$ con $x \in (0,1)$.
   - $f_n(x) = \frac{x}{(x+1)^n}$ con $x \in [1,2]$.
   - $f_n(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq 1/n \\ 1 - nx & 0 \leq x \leq 1/n \\ 1 + nx & -1/n \leq x \leq 0 \end{cases}$
   - $f_n(x) = x^n$ con $x \in [0,1]$.

2. Consideremos la sucesión de funciones (f_n) en $\mathbb{R}$, dada por $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$.

   a) Calcular los límites puntuales de las sucesiones f_n y f_n', a los que llamaremos f y g.

   b) Mostrar que f_n converge a f uniformemente.

   c) Probar que existe $f'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ pero $f'(0) \neq g(0)$.

3. Considérese la sucesión $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1 + n2^n x^2}$ para $x \in [0,1]$. Determinar el límite puntual de (f_n). Calcular $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$, y concluir que la convergencia de (f_n) no es uniforme.

4. Probar que la sucesión de funciones $f_n(x) = x/n$ converge uniformemente en cualquier intervalo compacto. ¿Es uniformemente convergente en $\mathbb{R}$?

5. Sea $f_n(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + (1-nx)^2}$ con $x \in [0,1], n \geq 1$. Probar que $f_n \to 0$ puntualmente pero no existe ninguna subsucesión de (f_n) que converja uniformemente.

6. Sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = \lim\limits_{k\to\infty} (\cos n!\pi x)^{2k}$. Probar que existe el límite puntual de f_n pero no es integrable Riemann (sugerencia: dividir en dos casos, según x sea o no racional).

7. Sea (f_n) una sucesión de funciones definidas en $\mathbb{N}$, tal que para cada n existe $L_n := \lim_k f_n(k)$. Supóngase que (M_n) es tal que $|f_n(k)| \leq M_n, \forall n, k$, y que $\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$. Sea $F(k) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(k)$. Probar que $\lim_k F(k) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n$.

8. Supongamos que $\sum n|b_n|$ es convergente, y definamos $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\text{sen}\, nx$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Probar que f es una función de clase C^1 en $\mathbb{R}$, y expresar su derivada como la suma de una serie.

9. Supongamos que $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones definidas en $[0,1]$ y tales que para cierta constante $L \geq 0$ se tiene $|f_n(x) - f_n(y)| \leq L|x-y|, \forall x, y \in [0,1]$, $n \geq 1$ (es decir: cada f_n es de Lipschitz con la misma constante L). Mostrar que si (f_n) converge puntualmente a f, entonces la convergencia es uniforme y f también es de Lipschitz.

10. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+nx^2)\sqrt{n}}$.

11. Probar que existen funciones continuas que no son derivables en ningún punto (sugerencia: considerar $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ donde φ es una función 2-periódica que cumple $\varphi(x) = |x|$ si $x \in [-1, 1]$).

12. En cada uno de los siguientes casos, investigar el comportamiento (convergencia o divergencia) uniforme de (f_n) en los conjuntos indicados:

    a) $f_n(z) = \frac{1}{1+nz}$, $z \in \mathbb{C}$, $|z| \geq 2$.

    b) $f_n(z) = \frac{1}{1+nz}$, $|z| \leq 2$, $z \neq \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$.

    c) $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$, $x \in [0, 1]$.

    d) $f_n(x) = \frac{n^3 x}{1+n^4 x}$, $x \in [0, 1]$.

    e) $f_n(x) = \frac{n^3 x}{1+n^4 x^2}$, $x \in [a, +\infty)$, $a > 0$.

    f) $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, $x \in [0, 1]$.

13. Para $n \geq 1$ consideremos $f_n(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ e^{-2n}(e^n + n - x) & \text{si } n \leq x \leq n + e^n \\ 0 & \text{si } x \geq n + e^n \end{cases}$

    a) Calcular el límite puntual f de la sucesión (f_n), y mostrar que la convergencia es uniforme.

    b) Calcular $\int_0^{\infty} f(x)dx$ y $\lim_n \int_0^{\infty} f_n(x)dx$. ¿Moraleja?

14. Encontrar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias. En cada caso, intentar ver el comportamiento en el borde del intervalo de convergencia.

    a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$

    b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

    c) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

    d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

    e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

    f) $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n$

    g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$

    h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n$

    i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} x^n$

15. Considérese la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-7}{x+1}\right)^n$, para $x > 3$. Encontrar el límite, y hallar todos los conjuntos en los cuales la convergencia es uniforme.

16. Calcular, justificando: (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+n^2}{2^n}$. (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$ (recordar que $\text{tg}(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$).

17. La función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ satisface la ecuación diferencial $x^2 f''(x) - f(x) = 0$, con $f(0) = 2$, $f'(0) = 0$. Calcular a_n.

18. Sea $\text{Si} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\text{Si}(x) := \displaystyle\int_0^x \frac{\text{sen}\, t}{t} dt$. Probar que $\left|\text{Si}(1) - \displaystyle\sum_{n=0}^{6} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}\right| < \frac{1}{35.000}$.

Entregar los Ejercicios 2 y 16(a).

Plazo: Viernes 29 de marzo.