Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Primer parcial

8 de Mayo de 2004

§1. (8 puntos) Se considera la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_0 = 1/3$, y $a_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3a_n}}{\sqrt{4-a_n}}$.

(a) Probar que $a_n \in [0,1]$, $\forall n \geq 0$.
(b) Averiguar si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona.
(c) Probar que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, y calcular su límite.

Una solución:

(a) Por inducción. Como $a_0 = 1/3$ la afirmación es cierta para $n = 0$. Suponiendo que vale para n, entonces $\frac{3a_n}{4-a_n} \geq 0$, así que existe su raíz cuadrada, y es no negativa por definición; por otro lado: $\frac{3a_n}{4-a_n} \leq \frac{3}{4-a_n} \leq \frac{3}{3} = 1$, de donde $a_{n+1} \leq 1$.

(b) Se tiene que $a_1 = \sqrt{\frac{3\frac{1}{3}}{4-\frac{1}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{11}} > \sqrt{\frac{3}{12}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = a_0$. De modo que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona, será creciente. Verifiquémoslo. Como $a_{n+1} = \sqrt{\frac{3a_n}{4-a_n}}$, entonces $a_{n+1}^2 - a_n^2 = \frac{3a_n + a_n^2(a_n-4)}{4-a_n}$. Luego, como $4 - a_n \geq 3$ por (a):

$$a_{n+1} \geq a_n \iff a_n(a_n^2 - 4a_n + 3) \geq 0 \iff a_n(a_n - 1)(a_n - 3) \geq 0,$$

y la última desigualdad es verdadera por (a). Por lo tanto $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente.

(c) La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y acotada, de modo que converge (a su supremo). Si $l = \lim_n a_n$, la igualdad $a_{n+1} = \sqrt{3a_n/(4-a_n)}$ implica, tomando límite en ambos miembros de la igualdad, que $3l - l^2(4-l) = 0$, es decir, $l(l-1)(l-3) = 0$, de manera que $l \in \{0,1,3\}$. No puede ser $l = 0$ porque $a_0 = 1/3$ y (a_n) es creciente; no puede ser $l = 3$ porque $a_n \leq 1$, $\forall n$. Se concluye que $l = 1$.

§2. (12 puntos) Completar:

a) $1 - i$ es raíz del polinomio $x^3 - 9x^2 + 16x - 14$.	Verdadero ☒	Falso ☐
b) $2e^{\pi i/28}$ es raíz cuarta de $6e^{\pi i/7}$.	Verdadero ☐	Falso ☒
c) La serie $\sum \big(\ln(n+1)^2 - 2\ln(n)\big)$ converge.	Verdadero ☐	Falso ☒
d) Sea $A := \left\{\dfrac{\cos n\pi}{n} : n \geq 1\right\}$. Entonces:	$\sup A = \dfrac{1}{2}$	$\operatorname{ínf} A = -1$
e) Calcular $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.	Da $\dfrac{4}{3}$	
f) Clasificar $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{e^n}\left(\frac{2n}{n+1}\right)^n$.	Converge absolutamente	