

PRÁCTICO 9

§1. (a) Calcular las primitivas de las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} f_1 &= 3x^2 - x - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} & f_2 &= \frac{6x-5\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}} & f_3 &= \frac{1}{x+1} \\ f_4 &= 1 + \operatorname{tg}^2(x) - 2\cos(x) & f_5 &= \frac{1}{(x+1)^5} & f_6 &= \frac{2x}{x^2+1} \\ f_7 &= \frac{1}{1+x^2} & f_8 &= \frac{1}{1-x^2}. \end{aligned}$$

(b) Calcular las siguientes integrales:

$$\begin{aligned} \int_1^2 f_1(x) dx & \quad \int_1^4 f_2(x) dx & \int_0^1 f_3(x) dx & \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} f_4(x) dx \\ \int_1^7 f_5(x) dx & \quad \int_{-1}^1 f_6(x) dx & \int_0^{\frac{\pi}{6}} f_7(x) dx & \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_8(x) dx. \end{aligned}$$

§2. (a) Calcular la derivada de las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x \frac{e^t}{3+\sin(t)} dt & G(x) &= \int_0^{x^2} \frac{1+\sqrt{t}}{2+t} dt \\ H(x) &= \int_{2x+5}^3 e^{1-t} \sin(t) dt & I(x) &= \int_{x^2}^{x^3} \frac{t^7}{1+t^4} dt \end{aligned}$$

(b) Se consideran las siguientes funciones definidas en todo $\mathbb{R}$:

$$J(x) = \arctg(x) - \frac{x}{x^2+1} \quad L(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{x^2}{x^2+1}} \sqrt{\frac{t}{1-t}} dt.$$

Calcular $J'(x)$, $L'(x)$, $J(1)$ y $L(1)$. Deducir la relación entre J y L en $[0, +\infty)$ y en $(-\infty, 0)$.

§3. Calcular integrando por partes: a) $\int x^2 \sin x dx$ b) $\int x \sin x \cos x dx$

c) $\int \arctg x dx$ d) $\int x^3 \operatorname{ch} 3x dx$ e) $\int \ln x dx$ f) $\int x^3 e^{-x^2} dx$
g) $\int e^{ax} \cos bx dx$ h) $\int e^{ax} \sin bx dx$ i) $\int x^3 \ln x dx$.

§4. Calcular por el método de sustitución:

a) $\int_0^{\pi/4} \cos 2x \sqrt{4 - \sin 2x} dx$ b) $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(3+\cos x)^2} dx$ c) $\int_3^8 \frac{\sin \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} dx$
d) $\int x^{n-1} \sin(x^n) dx$, $n \neq 0$ e) $\int_a^{1/a} \frac{dt}{1+t^2}$, $a \neq 0$ f) $\int x^2 \sqrt{x+1} dx$

§5. (a) Probar que $\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$, y calcular $\int_0^1 x^2 (1-x)^{30} dx$.

(b) Sea f continua. Demostrar que $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$, y calcular $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$.

(c) Demostrar que $\int_0^1 (1-x^2)^{n-1/2} dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx$, $n \in \mathbb{N}$.

(d) Sea $F(x, a) := \int_0^x \frac{t^p}{(t^2+a^2)^q} dt$, $a > 0$, $p, q \in \mathbb{N}$. Demostrar que $F(x, a) = a^{p+1-2q} F(\frac{x}{a}, 1)$.

§6. Encontrar una función continua y no constantemente nula f tal que

$$f^2(x) = \int_0^x \frac{f(t) \sin t dt}{2 + \cos t}.$$

§7. Recordando que $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$, expresar $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ y $\operatorname{tg} x$ en función de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

- (a) Probar que integrales de la forma $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x) dx$, donde R es una función racional, pueden ser reducidas mediante la sustitución $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ a integrales de la forma $\int r(u) du$, donde r es también una función racional. Calcular $\int \frac{dx}{\cos x + \operatorname{sen} x}$ y $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x dx}{1 + \cos x + \operatorname{sen} x}$.
- (b) Idem con $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$ y la sustitución $x = a \operatorname{sen} t$. Calcular $\int \frac{x dx}{4 - x^2 + \sqrt{4 - x^2}}$.
- (c) Idem con $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$ y la sustitución $x = a \operatorname{sh} t$. Calcular $\int \frac{dx}{x \sqrt{4 + x^2}}$.
- (d) Idem con $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$ y la sustitución $x = a \operatorname{ch} t$. Calcular $\int \frac{\sqrt{4x^2 - 1} dx}{x^2}$.

§8. Si se aplica la sustitución $x = \operatorname{sen} t$ a la integral definida $\int_0^\pi t^3 \cos t dt$ resulta $\int_0^\pi t^3 \cos t dt = \int_0^0 (\operatorname{arcsen} x)^3 dx = 0$. ¿Por qué es equivocado este razonamiento?

§9. (a) Integrando por partes deducir la fórmula

$$\int \operatorname{sen}^n x dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x dx, \forall n \geq 2.$$

- (b) Hallar una fórmula de recurrencia para $\int \cos^n x dx$.
- (c) Calcular: $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x dx$, $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x dx$, $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx$.
- (d) Sea $a_n := \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x dx$, $\forall n \geq 0$. Probar que $a_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}$, $\forall n \geq 1$, y que $a_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$, $\forall n \geq 0$.
- (e) Mostrar que $1 \leq \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}} \leq 1 + \frac{1}{2n}$. Deducir que $\frac{\pi}{2} = \lim_n 2n \left(\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \right)^2$, y concluir que $\sqrt{\pi} = \lim_n \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)! \sqrt{n}}$.

§10. (a) Hallar todas las primitivas de las siguientes funciones:

$$\frac{3x^3 - 10x^2 - x}{(x^2 - 1)^2} \quad \frac{1 - 5x}{x^3 - x} \quad \frac{x^2}{x^2 + 4x + 3} \quad \frac{x^3 + x^2 - 3}{x^2 - x - 2}.$$

(b) Calcular:

$$\int_{-1}^0 \frac{3x+2}{x^2-3x+2} dx \quad \int_2^3 \frac{3x^3-3x+1}{x^2-1} dx$$

$$\int_4^2 \frac{x^2+x+3}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx$$