Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Cálculo I–Curso 2004

Práctico 7

§1. (a) Comprobar que la función $f : f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ es derivable en todo punto, y que f' es discontinua en $x = 0$.

(b) Sea $f(x) := x^2 D(x)$, donde D es la función de Dirichlet (definida en **§1** del Práctico 6). Probar que f es derivable en $x = 0$, y discontinua en los demás puntos.

§2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$. Mostrar que $f(1) = 0 = f(-1)$, y que f' no se anula en $(-1, 1)$. Explicar por qué esto no contradice el teorema de Rolle.

§3. Sea f continua en $[a, +\infty)$ y derivable en $(a, +\infty)$, tal que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$. Mostrar que existe $c \in (a, +\infty)$ tal que $f'(c) = 0$. Vale un resultado análogo para $(-\infty, a]$ (Comparar con el teorema de Rolle).

§4. Supóngase que la función f es dos veces derivable en $[a, +\infty)$, y que $f(a) > 0$, $f'(a) < 0$, y $f''(x) \leq 0$, $\forall x > a$. Demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente una solución en $(a, +\infty)$.

§5. *Propiedad del valor intermedio para funciones derivadas.* Supóngase que f es una función derivable en el intervalo abierto I, y sean $a, b \in I$, con $f'(a) < f'(b)$. Probar que si d es tal que $f'(a) < d < f'(b)$, entonces existe c entre a y b tal que $f'(c) = d$ (Sugerencia: mostrar que la función g tal que $g(x) = f(x) - dx$ tiene un extremo relativo entre a y b).

§6. (a) Dado $s > 0$, probar que entre todos los reales positivos x e y tales que $x + y = s$, el valor de $x^2 + y^2$ es mínimo cuando $x = y$.

(b) Probar que entre todos los rectángulos de perímetro dado el de mayor área es el cuadrado.

(c) En la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ hay que inscribir un rectángulo con los lados paralelos a los ejes de la elipse, de modo que su área sea máxima. Resolver el problema y dar el valor de dicha área máxima.

(d) Una caja abierta está construida con un rectángulo de cartón quitando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse de tal modo si los lados del rectángulo miden 12 y 18 centímetros.

Si f es una función cuyas derivadas de orden menor o igual que n existen en un punto c, $T_n(f,c)$ denotará el n-ésimo polinomio de Taylor de f en c, es decir: $T_n(f,c)(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(c)}{j!}(x-c)^j$. Si $c = 0$ pondremos simplemente $T_n(f)$ en lugar de $T_n(f,c)$.

§7. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$. Dibujar las gráficas de $T_3(f)$ y $T_5(f)$, y compararlas con la de f.

§8. Mostrar que:

(i) $T_n(a^x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{(\ln a)^j}{j!} x^j$, $a > 0$

(ii) $T_{2n+1}(\frac{x}{1-x^2}) = \sum_{j=0}^{n} x^{2j+1}$

(iii) $T_n((1+x)^\alpha) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} x^j \binom{\alpha}{j}$, donde $\displaystyle\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!}$

(iv) $T_{2n}(\operatorname{sen}^2 x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{-2^{j-1}}{(2j)!} x^{2j}$ (recordar que $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$)

(v) $T_{2n+1}\left(\ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)\right) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$

(vi) Si f es la función de Cauchy, dada por $f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, entonces $T_n(f) = 0$, $\forall n \geq 0$.