Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

*Cálculo I–Curso 2004*

# Práctico 6

**§1.** (a) Sea $D:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función de Dirichlet, es decir: $D(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{si } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$.
Probar que $D$ es discontinua en todo punto.

(b) Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $g(x)=\begin{cases}x & \text{si } x\in\mathbb{Q}\\ 1-x & \text{si } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$. Estudiar continuidad de $g$.

(c) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\begin{cases}x\operatorname{sen}(x) & \text{si } x\neq 0\\ \alpha & \text{si } x=0\end{cases}$. Hallar $\alpha$ para que $f$ sea continua en todo $\mathbb{R}$. Esbozar el gráfico de $f$.

**§2.** Sean $f$ y $g$ funciones reales y sea $c\in\mathbb{R}$.

(a) Demostrar que si $f$ es discontinua en $c$ y $g$ es continua en $c$ entonces $f+g$ es discontinua en $c$. ¿Qué sucede si ambas funciones son discontinuas en $c$?

(b) ¿Qué se puede afirmar con respecto al producto de las funciones?

(c) Supongamos ahora que $f(x)=x^2$ y $g(x))=\begin{cases}-4 & \text{si } x\leq 0\\ |4-x| & \text{si } x>0\end{cases}$.
Estudiar la continuidad en 0 de $f$, $g$, $f\circ g$ y $g\circ f$.

(d) Definir $f$ y $g$ para que $f$ sea discontinua en $c$, $g$ sea discontinua en $f(c)$ y $g\circ f$ sea continua en $c$.

**§3.** Sea $f:[0,1]\to[0,1]$ una función continua. Demostrar que $f$ tiene algún punto fijo, es decir, que existe $c\in[0,1]$ tal que $f(c)=c$.

**§4.** Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua tal que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$. Probar que $f$ está acotada y que tiene máximo o mínimo.

**§5.** Sean $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ tales que $a<b$ y $c<d$. Bosquejar, si es posible, funciones reales que cumplan:

(a) $f$ es continua en $(a,b)$ y $f((a,b))=(c,d)$.
(b) $f$ es continua en $(a,b)$ y $f((a,b))=[c,d]$.
(c) $f$ es continua en $(a,b)$ y $f((a,b))=(c,d]$.
(d) $f$ es continua en $[a,b]$ y $f([a,b])=(c,d)$.
(e) $f$ es continua en $[a,b]$ y $f([a,b])=[c,d]$.

**§6.** (a) Sean $f$ y $g$ funciones reales. Demostrar que si $f$ y $g$ son uniformemente continuas en un intervalo $(a,b)$, entonces también lo son $f+g$ y $fg$.

(b) Estudiar la continuidad uniforme de las siguientes funciones en los intervalos indicados:

   i. $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$ en $[-1, 1]$.
   ii. $f(x) = \text{In}\, x$ en $(0, 1)$.
   iii. $f(x) = \sqrt{x}$ en $[1, +\infty)$.
   iv. $f(x) = e^x \cos(\frac{1}{x})$ en $(0, 1)$.
   v. $f(x) = x^2$ en $(-a, a)$, $a \in \mathbb{R}$ y en $\mathbb{R}$.
   vi. $f(x) = x + \operatorname{sen}(x)$ en $\mathbb{R}$.

(c) Demostrar que si $f$ es uniformemente continua en $[a, c]$ y en $[c, d]$, entonces es uniformemente continua en $[a, b]$.

(d) Mostrar que $f(x) = \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x}$, con $x \neq 0$ es uniformemente continua en $(-1, 0)$ y en $(0, 1)$. ¿Es uniformemente continua en $(-1, 0) \cup (0, 1)$?.

**§7.** Una función $f : X \to \mathbb{R}$, con $X \subseteq \mathbb{R}$, se dice lipschitziana si existe $K > 0$ tal que si $x, y \in X$ se cumple que $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$.

(a) Probar que si $f$ es lipschitziana en $X$ entonces es uniformemente continua en $X$.

(b) Probar que el recíproco es falso: mostrar que $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{x}$ es uniformemente continua pero no es lipschitziana.

(c) Sea $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$. Probar que $g$ es uniformemente continua.

**§8.** (a) Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ tal que $\forall \varepsilon > 0$ existe un conjunto finito $F$ que verifica que $|f(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in (a, b) \backslash F$. Probar que $f$ es continua en $c \in (a, b)$ sí y sólo sí $f(c) = 0$.

(b) Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ con } \operatorname{mcd}(p, q) = 1 \end{cases}$.
Usar la parte anterior para probar que $f$ es discontinua en cada racional y continua en cada irracional. La función $f$ se llama *función de Riemann*.