Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Cálculo I–Curso 2004

Práctico 4

§1. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(a) Si existen $k > 1$ y $p \in \mathbb{N}$ tales que $a_{n+1} \geq k a_n$, $\forall n > p$, demostrar que $\lim_n a_n = +\infty$.

(b) Si existen $k < 1$ y $p \in \mathbb{N}$ tales que $a_{n+1} < k a_n$, $\forall n > p$, demostrar que $\lim_n a_n = 0$.

(c) Demostrar que si $\lim_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = k$, entonces $\lim_n a_n = +\infty$ en el caso en que $k > 1$ y $\lim_n a_n = 0$ en el caso en que $k < 1$.

(d) Calcular el límite de las siguientes sucesiones:
(i) $\left(\dfrac{n!}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (ii) $\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (iii) $\left(\dfrac{n!a^n}{n^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $a > 0$, $a \neq e$.

§2. (a) Probar que si $\lim_n a_n = 0$, entonces $\lim_n \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = 0$.

(b) Probar que si $\lim_n a_n = L$, entonces $\lim_n \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = L$, con $L \in \mathbb{R}$, $L = +\infty$ o $L = -\infty$.

(c) Probar que si $a_n > 0$ y $\lim_n a_n = L$, entonces $\lim_n \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = L$, con $L \in \mathbb{R}$, $L = +\infty$.

(d) Calcular: $\lim_n \dfrac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{n}$ y $\lim_n \sqrt[n]{n!}$.

§3. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que sus subsucesiones $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ y $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergen. Probar que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

§4. (a) Hallar una sucesión cuyo conjunto de puntos de aglomeración sea el conjunto A, con:
(i)$A = \{1, 2, 3\}$ (ii)$A = \mathbb{N}$ (iii)$A = [0, 1]$.

(b) Probar que a es punto de aglomeración de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si y sólo si $\forall \epsilon > 0$ y $\forall k \in \mathbb{N}$, existe $n > k$ tal que $|a_n - a| < \epsilon$.

§5. Hallar los puntos de aglomeración, el límite superior y el límite inferior de las siguientes sucesiones:

(i) $\left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (ii)$\left(n^2(1 + (-1)^n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(iii) $\left(\frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (iv) $\left(1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

§6. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones.

(a) Probar que

$$\text{lím sup}_n\, a_n = -\,\text{lím inf}_n(-a_n) \text{ y } \text{lím inf}_n\, a_n = -\,\text{lím sup}_n(-a_n).$$

(b) Probar que: $\begin{aligned}\text{lím inf}_n\, a_n + \text{lím inf}_n\, b_n &\leq \text{lím inf}_n(a_n+b_n)\\ &\leq \text{lím sup}_n(a_n+b_n)\\ &\leq \text{lím sup}_n\, a_n + \text{lím sup}_n\, b_n,\end{aligned}$

siempre que los extremos no sean de la forma $\infty - \infty$.

(c) Hallar $\text{lím sup}_n\, a_n$ y $\text{lím inf}_n\, a_n$ en los siguientes casos:
(i) $(-1)^n$ (ii) $3^{\cos n\pi}$ (iii) $n^{(-1)^n}$.

(d) Probar que si $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\text{lím inf}_n \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \text{lím inf}_n \sqrt[n]{a_n} \leq \text{lím sup}_n \sqrt[n]{a_n} \leq \text{lím sup}_n \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

(e) Usando (d) calcular $\text{lím}_n \sqrt[n]{\dfrac{n^n}{n!}}$.

§7. (Ejercicio 2 del examen del 17/8/98.) Sea $f(z) = \frac{1}{z}$ para $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

(a) Probar o dar un contraejemplo para cada una de las siguientes afirmaciones ($z \neq 0$):
$\text{Re}(f(z)) = f(\text{Re}(z))$ $|f(z)| = f(|z|)$ $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$.

(b) i. Hallar el argumento de $f(w)$ para todo complejo w con argumento $\frac{\pi}{3}$. Interpretar geométricamente.

ii. Demostrar que $|f(u) - (1-i)|$ es constante para todo complejo u que cumple $\text{Re}(u) + \text{Im}(u) = \frac{1}{2}$. Interpretar geométricamente.

(c) Si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números complejos, se dice que $\text{lím}_n\, z_n = \alpha$ si $\text{lím}_n |z_n - \alpha| = 0$.

i. Probar que si $\text{lím}_n\, z_n = \alpha$, entonces $\text{lím}_n |z_n| = |\alpha|$. ¿ Es cierto el recíproco?. Justificar.

ii. Probar que si $\text{lím}_n\, z_n = \alpha \neq 0$, entonces $\text{lím}_n f(z_n) = f(\alpha)$.

§8. Considerar las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dadas por: $a_n := \text{sen}(n\alpha)$, $b_n := \cos(n\alpha)$ ($\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$).

(a) Expresar a_{n+1} y b_{n+1} en función de a_n y b_n usando las conocidas fórmulas de seno y coseno de una suma. Deducir que existe $\text{lím}_n\, a_n$ si y sólo si existe $\text{lím}_n\, b_n$.

(b) Demostrar que ni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ni $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen.

(c) Probar que si $\alpha/\pi \in \mathbb{Q}$, entonces ambas sucesiones aglomeran en un número finito de puntos.

(d) Probar que si $\alpha/\pi \notin \mathbb{Q}$, entonces ambas sucesiones aglomeran en todos los puntos de $[-1,1]$ (Sugerencia: mostrar que si $\beta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, entonces todo número real puede ser aproximado tanto como se quiera por un elemento de la forma $m\beta + n$, $m, n \in \mathbb{Z}$).