Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República



# Práctico 3

**§1.** Se dice que un número complejo $z$ es *algebraico* cuando es raíz de algún polinomio no nulo cuyos coeficientes son todos enteros. En caso contrario se dice que $z$ es *trascendente*. Por ejemplo, todos los números racionales son algebraicos, $i$ es algebraico, $\sqrt{2}$ es algebraico, etc. Mientras tanto, se sabe por ejemplo que $e$ es trascendente (Hermite, 1873), y que $\pi$ también lo es (Lindemann, 1882). Probar que los números algebraicos forman un conjunto numerable, mientras que los trascendentes forman un conjunto no numerable.

**§2.** Se considera el conjunto $\Sigma$ formado por las funciones biyectivas $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que $\sigma(n) = n$ para todo natural $n$ excepto para una cantidad finita de ellos. Probar que $\Sigma$ es numerable.

**§3.** Supóngase que $A$ es un subconjunto infinito no numerable de $\mathbb{R}$. Dado $x \in \mathbb{R}$, se consideran los conjuntos: $A_x := \{a \in A : a \leq x\}$ y $A^x := \{a \in A : a > x\}$.

(a) Probar que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $A_x$ y $A^x$ son ambos no numerables, y mostrar que $x$ puede ser tomado en $A$.

(b) Sea $B := \{x \in \mathbb{R} : A_x \text{ y } A^x \text{ son ambos no numerables}\}$. Demostrar que $B$ es un conjunto infinito no numerable. Discutir en función de $A$ si $B$ puede ser acotado; en caso afirmativo averiguar si $B$ tiene máximo o mínimo.

**§4.** Determinar si las sucesiones siguientes tienen límite, y en caso afirmativo hallarlo:

(a) $\left(\dfrac{\sqrt{n}\cos 2n}{n+\frac{1}{2}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (b) $\left(\sqrt[n]{1+\cos^2 n}\,\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(c) $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (d) $\left(\dfrac{\ln n^{70}}{\ln 70n}\right)_{n\geq 1}$

(e) $\left(2+e^{-n}n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (f) $(n^2 \operatorname{sen} n)_{n\in\mathbb{N}}$

**§5.** Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente, y $L$ un número real. Demostrar que $L = \sup A$ si y sólo si $L$ satisface las dos condiciones siguientes: (a) $L$ es una cota superior de $A$ y (b) existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $\lim_n a_n = L$.

**§6.** Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión dada por: $x_0 = 0$, y $x_{n+1} = \dfrac{6+x_n}{6-x_n}$, $\forall n \geq 0$.

(a) Probar que $x_n \in [0,2)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Probar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.

(c) Probar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y calcular su límite.

**§7.** Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión dada por: $x_0 = \sqrt{2}$, y $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$, $\forall n \geq 0$. Tomando como ejemplo el ejercicio anterior, demostrar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y calcular su límite.

**§8.** Sean $x_0 = 1$, y $x_{n+1} = \operatorname{sen} 2x_n$, $\forall n \geq 0$. Graficar la función $f$ dada por $f(x) = \operatorname{sen} 2x$, y la recta $y = x$, y ver en ese dibujo cómo está variando la sucesión en cuestión. Reafirmar las conclusiones obtenidas hallando los primeros 25 o 30 términos de la sucesión con el auxilio de la calculadora o la computadora. Finalmente, usando argumentos similares a los del Ejercicio § 6, demostrar que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge.