Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Cálculo I–Curso 2004

Práctico 2

§1. (a) Expresar en forma binómica y polar, y representar los afijos de los siguientes números complejos:
i) $\frac{5}{-3+4i}$ ii) $\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2$ iii) $e^{\frac{\pi i}{2}}$ iv) $2e^{\frac{-\pi i}{2}}$ v) $i+e^{2\pi i}$ vi) $e^{\frac{\pi i}{4}}-e^{\frac{-\pi i}{4}}$
vii) $\frac{1-e^{\frac{\pi i}{2}}}{1+e^{\frac{\pi i}{2}}}$ viii) $(1+2i)^3$ ix) i^5+i^7 x) $(1+i)^n-(1-i)^n$

(b) Si $z=x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$, hallar la parte real y la parte imaginaria de:
i) z^2 ii) $\frac{1}{z}$ iii) $\frac{z-1}{z+1}$ iv) $\frac{1}{z^2}$

§2. Determinar los x, y reales que cumplan:
i) $|x-iy|=x+iy$ ii) $x+iy=(x-iy)^2$ iii) $\sum_{k=0}^{k=100} i^k=x+iy$
iv) $x+iy=xe^{iy}$ v) $x+iy=-1$ vi) $\frac{1+i}{1-i}=xe^{iy}$

§3. Calcular todos los valores y representar los afijos de:
i) $\sqrt{i}$ ii) $\sqrt{-i}$ iii) $\sqrt{1+i}$ iv) $\sqrt{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}$
v) $\sqrt[4]{-1}$ vi) $\sqrt[4]{i}$ vii) $\sqrt[4]{-i}$ viii) $\sqrt[n]{1}$, $n\geq 2$

§4. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

(i) $\begin{cases} 4ix-y &= -16\pi \\ x+\pi y &= -1 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} x-iy-z &= 1-2i \\ 3x-iy+2z &= -2 \\ 2x-y-5z &= 2+2i \end{cases}$

§5. Si u, z_1, $z_2\in\mathbb{C}$, probar:
i) $|\operatorname{Re}(u)|\leq|u|$ ii) $|u|^2=u\bar{u}$ iii) $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$
iv) $\overline{e^z}=e^{\bar{z}}$ v) $\big||z_1|-|z_2|\big|\leq|z_1-z_2|$ vi) $|e^z|=e^{\operatorname{Re}(z)}$

§6. Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones y reconocer y graficar el lugar geométrico de los afijos de $z\in\mathbb{C}$:

(a) $|z-z_0|>r$, $r>0$, $z_0\in\mathbb{C}$.

(b) $\operatorname{Re}(z)=1$.

(c) $|z-1|+|z+1|\leq 6$.

(d) $z+\bar{z}=1$.

(e) $0<\operatorname{Re}(iz)<1$, a, $b\in\mathbb{R}$.

(f) $\left|\frac{1-z}{1+z}\right|=\sqrt{2}$.

§7. (a) Probar que todo polinomio de coeficientes reales que admite una raíz compleja, admite también su conjugada.

(b) Probar que todo polinomio de coeficientes reales de grado impar admite por lo menos una raíz real.

(c) Resolver $z^4 - 4z^3 + 11z^2 + 8z - 26 = 0$ sabiendo que $2 + 3i$ es raíz.

(d) Resolver $z^3 - (3 + 2i)z^2 + (5i + 1)z + 2 = 0$ sabiendo que admite una raíz real.

§8. En una isla océanica, que tiene dos árboles, A_1 y A_2, y una horca, H, un pirata esconde su tesoro de la siguiente manera:

(a) El pirata se para en H, camina hasta A_1, gira en sentido antihorario $90°$, camina otro tanto y clava una estaca E_1, o sea que $d(A_1, H) = d(A_1, E_1)$.

(b) Repite el mismo procedimiento con A_2, pero girando en sentido horario, y clava una estaca E_2.

(c) En el punto medio M entre E_1 y E_2 entierra el tesoro.

Al cabo de un cierto tiempo vuelve a la isla y la horca y las estacas han desaparecido. Si el pirata estudió números complejos, ¿podrá encontrar el tesoro?. Explicar.