Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Práctico 12

§1. Resolver: (a) $x' + 2xt = t^2$ (b) $x' - 3x = e^{2t}$
(c) $x' + x = te^t$ (d) $tx' - 2x = t^5$, $x(1) = 1$
(e) $x' = -x\cos t + e^{-\operatorname{sen} t}$ (f) $x' - x\operatorname{tg} t = \frac{1}{\cos t}$, $x(0) = 0$

§2. Resolver: (a) $x' = x\ln x$ (b) $x' = \frac{x^2+1}{t^2+1}$
(c) $x' = (1+x)(1+t)$ (d) $x' = -\frac{x}{t} - \frac{x^2}{t^2}$
(e) $(1+e^t)xx' = e^t$, $x(0) = 1$ (f) $x' = \frac{e^t}{1+e^t}$, $x(0) = 1$

§3. (a) Resolver: (i) $x''' - 13x'' - 12x' = 0$
(ii) $x'' - 3x' + 2x = 0$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 3$
(iii) $x'' + 2x' + x = 0$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 1$
(iv) $x'' + 2x' + 5x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$
(v) $x'' - 9x = 0$, $x(0) = 3$, $x'(0) = 15$

(b) Mostrar que $f(x) = -\ln(x)e^{-x}$ es una solución particular de

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{t^2}.$$

Usar esa solución particular para hallar todas las soluciones. Hacer lo mismo para resolver la ecuación

$$y'' - 2y' + y = -2x\cos(x)$$

sabiendo que $f(x) = x\cos(x)$ es una solución particular.

(c) Hallar una solución de la ecuación $x(x-2)y'' - 2y = 0$ que sea un polinomio de segundo grado.

§4. (a) Sea $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$, donde $a_0 = 1$ y se verifica:

$$e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2a_n + (n+1)a_{n+1})x^n.$$

Escribir esta igualdad como una ecuación diferencial y resolverla para hallar f. Comparar con el ejercicio **§7** del práctico 11.

(b) Hallar una función f que verifique $f(0) = 1$ y que sea solución de la ecuación diferencial:

$$y'' + t = y,\ y(0) = 1,$$

escribiendo f como una serie de potencias.

§5. Sin resolverlas, hacer un bosquejo de las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $x' = \frac{1}{t^2+1}$

(b) $x' = \operatorname{sen} x$

§6. Muchas de las sustancias que se introducen en el organismo (los medicamentos, por ejemplo) son eliminados de éste de forma que la concentración decrece en forma proporcional a la concentración existente.

(a) Sea $x(t)$ la concentración de una tal sustancia en la sangre en el instante t y sea x_0 la concentración inicial. Hallar y resolver la ecuación diferencial que describe la variación de la concentración.

(b) Se llama tiempo de vida media de una tal sustancia al tiempo T en que la concentración decrece a la mitad de su valor inicial y se llama concentración media al número $C = \frac{1}{T}\int_0^{+\infty} x(t)\,dt$. Hallar T y C.

(c) Muchos de los medicamentos tienen una vida media de 6 horas, hallar en ese caso la constante de proporcionalidad.