Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Cálculo I–Curso 2004

Práctico 10

§1. Calcular: A – el área encerrada por una elipse; B – el área encerrada entre los gráficos de las funciones $e^{x-1} - 1$ y $1 - x^2$ en el intervalo $[0, 2]$.

§2. *Longitud del gráfico de una función.* Sea f una función de clase $C^{(1)}$ en un intervalo $[a, b]$.

(a) Dada la partición $P_n = \{x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ de $[a, b]$, donde $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, $\forall j = 0, 1, \ldots, n$, se define

$$L_n := \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Interpretar geométricamente la suma L_n. Probar que existen puntos $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n$ tales que $\hat{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ y $L_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(\hat{x}_i)^2}$.

(b) Probar que existe $\lim_{n\to\infty} L_n$ y que se tiene

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}.$$

Este es el valor que definimos como *longitud del gráfico de f en* $[a, b]$.

(c) Calcular la longitud de la circunferencia de radio r.

(d) Calcular la longitud del gráfico de $f(x) = 5 - \sqrt{x^3}$ en $[1, 4]$ y de $g(x) = 1 + 6\sqrt[3]{x^2}$ en $[-8, -1]$.

§3. *Volumen de revolución I: con respecto al eje Ox.* Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$. El volumen del sólido generado al girar la función f respecto al eje Ox es $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$.

(a) Justificar la fórmula dada para el volumen razonando de manera similar a lo hecho para definir la integral de Riemann en un intervalo.

(b) Calcular el volumen del sólido generado al girar una elipse.

(c) Calcular el volumen de un cono recto de revolución

(d) Calcular el volumen obtenido al girar la región acotada por las gráficas de las funciones $g(x) = x^4$ y $h(x) = 1$ alrededor de la recta $y = 1$.

§4. *Volumen de revolución II: con respecto al eje Oy.* Sea f una función no negativa de clase $C^{(1)}$ en un intervalo $[a, b]$, con $a \geq 0$. Sea $P_n = \{x_o = a < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ una partición de $[a, b]$. El volumen del sólido generado al girar la función f respecto al eje Oy es $V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$.

(a) Mostrar que la fórmula dada se deduce de aproximar los volúmenes engendrados al girar con respecto al eje $0y$ la función f en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, considerando cilindros concéntricos de altura $f(x_i)$.

(b) Calcular el volumen del sólido obtenido al girar una circunferencia que no corta al eje $0y$ con respecto a dicho eje.

§5. Clasificar las siguientes integrales impropias:

$\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^2+1}\,dx$ $\quad\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}\,dx$ $\quad\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx\,(\alpha \in \mathbb{R})$

$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2-1}\,dx$ $\quad\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ $\quad\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx\,(\alpha \in \mathbb{R})$

$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ $\quad\int_{-1}^{+1} \frac{e^{\frac{-1}{x-1}}}{(x-1)^2}\,dx$ $\quad\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha(\ln x)^\beta}\,dx\,(\alpha,\beta \in \mathbb{R})$

$\int_0^{\pi} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{x}\,dx$ $\quad\int_0^{+\infty} e^{-x^2-\frac{1}{x^2}}\,dx$ $\quad\int_0^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,(\alpha \in \mathbb{R})$

$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}\,dx$ $\quad\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}dx$ $\quad\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\operatorname{sen}^\alpha x\ \cos^\beta x}\,dx\ (\alpha,\beta \in \mathbb{R})$

§6. (a) Sean f y g funciones derivables en $[a, +\infty)$ tales que $f', g' \in R_a^x$, $\forall x \geq a$. Supongamos además $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) = L \in \mathbb{R}$. Probar que $\int_a^{+\infty} f'(x)g(x)\,dx$ converge si y sólo si $\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)\,dx$ converge.

(b) Clasificar la integral $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}\,dx$, $\alpha > 0$, y las *integrales de Fresnel*: $\int_0^\infty \cos(t^2)dt$, $\int_0^\infty \operatorname{sen}(t^2)dt$.

§7. Estudiar la convergencia y la convergencia absoluta de las siguientes integrales: $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ $\quad\int_0^\infty \operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$ $\quad\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{(x+\cos x)^\alpha}$ $\quad\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}$.

§8. Usando el criterio integral clasificar la serie $\displaystyle\sum_{n>2} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha(\ln(\ln n))^\beta}$.

§9. *Criterio de Cauchy.* Sea $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f \in R_a^x$, $\forall x \geq a$. Probar que $\int_a^\infty f(t)dt$ converge si y sólo si dado $\epsilon > 0$ existe $x_\epsilon \geq a$ tal que si $x, x' \geq x_\epsilon$, entonces $|\int_x^{x'} f(t)dt| < \epsilon$.

§10. Se considera la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $[1, +\infty)$. Mostrar que la integral $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ es divergente, pero sin embargo se puede calcular el volumen del sólido engendrado al girar la función con respecto al eje $0x$. Dar un ejemplo de una función cuya integral impropia converja pero sin embargo no se pueda calcular el volumen del sólido engendrado al girarla con respecto al eje $0y$.

§11. Considérese la función *Gamma*: $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$, para todo $x > 0$.

(a) Probar que $\Gamma(n)$ es una integral impropia convergente para todo $n \in \mathbb{N}^*$. (En realidad se puede probar que es convergente y derivable para todo $x > 0$.)

(b) Encontrar una relación entre $\Gamma(n)$ y $\Gamma(n-1)$.

(c) Probar que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Esto muestra que la función Γ es una extensión del factorial a todos los reales positivos.