Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Cálculo I–Curso 2004

Práctico 1

§1. Demostrar que:

(a) La suma de dos números reales negativos es negativa.

(b) Si $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, entonces $a > 0$ si y sólo si $1/a > 0$.

(c) Si $0 < a < b$ entonces $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

(d) Si a y b son números reales tales que $b \leq x$ siempre que $a \leq x$, entonces $b \leq a$. En particular, si $0 \leq a \leq \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$, entonces $a = 0$.

§2. Supongamos que $a \in \mathbb{Q}$ es no nulo, y que $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Probar que $a + b$, ab, a/b y b/a son irracionales. ¿La suma y el producto de dos irracionales son siempre irracionales?

§3. Considérense dos números reales a y b, tales que $a < b$.

(a) Probar que existe un racional r tal que $a < r < b$.

(b) Probar que existe un irracional z tal que $a < z < b$.

(c) Deducir que entre a y b hay infinitos racionales e infinitos irracionales.

§4. Si a y b son dos números reales, con $a < b$, se definen las siguientes medias entre a y b:

Media aritmética: $$A := \frac{a+b}{2}$$

Media geométrica: $$G := \sqrt{ab}$$

Media armónica: $$H := \frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})}$$

Demostrar que $a < H < G < A < b$.

§5. En los siguientes casos calcular los supremos e ínfimos de los conjuntos dados, y determinar si se trata de máximos o mínimos respectivamente.

(a) $A := \{x \in \mathbb{R} : (3x+1)/(x-2) \leq 0\}$.

(b) $A := \{\cos(n\pi/2) : n \in \mathbb{N}\}$.

(c) $A := [0,1] \setminus \mathbb{Q}$.

(d) $A := \{m/n : 0 < m < n,\ m, n \in \mathbb{N}\}$.

(e) $A := \{2^{-p} + 2^{-q} : p, q \in \mathbb{N}\}$.

§6. Dados dos subconjuntos no vacíos A y B de $\mathbb{R}$, y $t \in \mathbb{R}$, se definen los siguientes conjuntos:

$$A + B := \{a + b : \ a \in A, b \in B\} \qquad tA := \{ta : \ a \in A\}$$

(a) Por analogía con las definiciones anteriores, definir los conjuntos $-A$, $A - B$, AB, A^{-1} y BA^{-1} (estos últimos sólo en los casos en que sea posible, es decir, si $0 \notin A$). Calcular todos estos conjuntos cuando $A = [1, 2]$ y $B = \{(-1, 0)\}$ o $B = \{1 + 1/n : \ n \in \mathbb{Z}^+\}$.

(b) Probar que ínf $(A+B) = $ ínf$A+$ínf$B$ y $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

(c) Si $t > 0$, probar que $\sup tA = t \sup A$ y ínf $tA = t$ínf A.

(d) Si $t < 0$, probar que $\sup tA = t$ínf A y ínf $tA = t \sup A$. En particular $\sup(-A) = -$ínf A.

§7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. se dice que f es *localmente constante* si dado $a \in \mathbb{R}$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$ entonces $f(x) = f(a)$. Interpretar esta condición a través de un dibujo. Usando el axioma de completitud, demostrar que f es localmente constante si y sólo si f es constante.

§8. Un *par de clases contiguas* de números racionales (PCC) es un par (A, B) tal que:

(I) A y B son subconjuntos no vacíos de $\mathbb{Q}$.

(II) Para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$ se verifica $a \leq b$.

(III) Para todo $\epsilon > 0$ positivo existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $b - a < \epsilon$.

(a) Demostrar que si (A, B) es un PCC, entonces A y B tienen supremo e ínfimo en $\mathbb{R}$ respectivamente, y que estos coinciden. A este elemento se le llama elemento de separación del PCC (A, B).

(b) Sean $A := \{(n-1)/n \ : \ n \in Z^+\}$, y $B := \{1 + 1/n, n \in \mathbb{Z}^+\}$. Demostrar que (A, B) es un PCC de números racionales, y determinar su elemento de separación. Dar otro PCC que tenga el mismo elemento de separación.

(c) Probar que todo número real es el elemento de separación de algún PCC de racionales.