Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral I–Curso 2004

EXAMEN

6 de diciembre de 2004

1. Supóngase que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable tal que $f(0) = 2$ y que existe $\beta \geq 0$ tal que
$$f'(x) = f(x)^{2\beta+1} - \cos x(\cos x + 2 \operatorname{sen} x) - 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$
Supóngase además que en un entorno de cero se tiene que $f(x) \leq 2$.

   a) Probar que $\beta = 0$.

   b) Hallar f. **20 PUNTOS**

2. Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x) = e^x - e^{-x}.$$

   a) Determinar el polinomio de Taylor de orden 3 de f en $x = 0$.

   b) Clasificar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^a f(1/n)^3$ discutiendo según $a \geq 0$.

   c) Calcular los volúmenes de revolución con respecto a los ejes Ox y Oy de la función f en el intervalo $[0, 1]$. **35 PUNTOS**

3. Sea $a_n = \int_0^1 (1 - x^2)^n dx$, definida para $n = 0, 1, 2, \ldots$.

   a) Probar que la sucesión (a_n) es decreciente y convergente.

   b) Sea $\delta \in (0, 1)$.

      (I) Probar que la sucesión $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = (1 - x^2)^n$ converge uniformemente a la función nula sobre $[\delta, 1]$.

      (II) Mostrar que $\int_0^{\delta} (1 - x^2)^n dx \leq \delta$, $\forall n \geq 0$.

   Deducir que $\lim_n a_n = 0$.

   c) Mostrar que $a_n = \frac{2n}{2n+1} a_{n-1}, \forall n \geq 1$, y deducir el valor de $\lim \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

   d) Demostrar que la serie $\sum (-1)^n \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ converge, y que
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right)$$

45 PUNTOS