Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral I–Curso 2004

EXAMEN

14 de febrero de 2005

1. Supóngase que $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una solución de la ecuación diferencial

$$y' = e^{-y} + 2xe^{-y} + (\alpha + 2)x + 1,$$

y que además φ tiene un extremo en $x = -\frac{1}{2}$.

a) Probar que $\alpha = 0$, que φ tiene un mínimo en $x = -\frac{1}{2}$, y que éste es el único punto donde φ tiene un extremo.

b) Hallar φ sabiendo que se anula exactamente en un punto. **20 PUNTOS**

2. Sea $f \colon (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{1+x}$.

a) Hallar un polinomio p, de grado 2, tal que $|f(x) - p(x)| < \frac{1}{100}$, $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$.

b) Aproximar, con un error menor que $\frac{1}{400}$, el valor de la integral

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{4 - x^2} dx.$$

35 PUNTOS

3. Dado $\alpha > 0$, sea $f_\alpha : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f_\alpha(x) = \operatorname{arc\,tg} \alpha x + \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha}{x}$.

a) Hallar el o los valores de α tales que f_α es constante.

b) Probar que f_α es uniformemente continua en $(0, +\infty)$.

c) Sean $0 < a < b$.

1) Probar que $\int_a^b (\frac{\pi}{2} - f_\alpha) dt = \int_{1/b}^{1/a} \frac{1}{t^2} (\frac{\pi}{2} - f_\alpha) dt$.

2) Deducir que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} (\frac{\pi}{2} - f_\alpha) dt$ es convergente.

d) Para $\beta \geq 0$ clasificar las series $\sum f_{\frac{1}{n^2}}(n^\beta)$ y $\sum (-1)^n f_{\frac{1}{n^2}}(n^\beta)$, discutiendo según β.

e) Mostrar que $\lim_n f_{\frac{1}{n^2}}(x) = 0$, $\forall x \in (0, +\infty)$. Averiguar si la convergencia es uniforme. **45 PUNTOS**