

$$(5) \|\widehat{a}\|_\infty = r(a) = \lim_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Demostración. Probaremos las primeras cuatro afirmaciones a continuación. La quinta será un corolario de la Proposición 1.3.16.

- (1) Si $h_i \xrightarrow{w^*} h$ entonces $h_i(a) \rightarrow h(a)$. Luego es $\widehat{a}(h_i) \rightarrow \widehat{a}(h)$, o sea que $\widehat{a}$ es continua. Además $\|\widehat{a}\|_\infty = \sup_{h \in \widehat{A}} |\widehat{a}(h)| = \sup_{h \in \widehat{A}} |h(a)| \leq \sup_{h \in \widehat{A}} \|h\| \|a\| \leq \|a\|$. Entonces $\|\widehat{a}\|_\infty \leq \|a\|$.
- (2) Si $\widehat{A}$ es compacto no hay nada que probar. Si $\widehat{A}$ no es compacto, entonces $\widehat{a} \in C_0(\widehat{A})$ porque $\lim_{h \rightarrow 0} \widehat{a}(h) = \lim_{h \rightarrow 0} h(a) = 0$.
- (3) $\widehat{ab}(h) = h(ab) = h(a)h(b) = \widehat{a}(h)\widehat{b}(h) = \widehat{a}\widehat{b}(h)$ para todo h , entonces $\widehat{ab} = \widehat{a}\widehat{b}$. La linealidad se prueba igual. Si $A \ni 1$ entonces $\widehat{1}(h) = h(1) = 1$ para todo h ; entonces $\widehat{1}$ es la unidad de $C(\widehat{A})$.
- (4) $a \in \ker(\mathcal{G})$ si y sólo si $\widehat{a}(h) = 0$ para todo $h \in \widehat{A}$ si y sólo si $h(a) = 0$ para todo $h \in \widehat{A}$ si y sólo si $a \in \bigcap_{h \in \widehat{A}} \ker(h) = \bigcap \{M : M \text{ ideal maximal regular de } A\} = \text{rad}(A)$.
- (5) Es un corolario de la Proposición 1.3.16.

□

Supóngase que $\varphi : A \rightarrow B$ es un homomorfismo de álgebras de Banach conmutativas. Entonces, por definición, φ es un operador acotado. Su operador dual $\varphi' : B' \rightarrow A'$, dado por $\varphi'(f) = f \circ \varphi$, también es un operador acotado, que además es continuo si se consideran sobre B' y A' las topologías w^* : si $f_i \rightarrow f$ en (B', w^*) , es decir $f_i(b) \rightarrow f(b) \forall b \in B$, entonces $\varphi'(f_i)|_a = f_i(\varphi(a)) \rightarrow f(\varphi(a)) = \varphi'(f)|_a$, $\forall a \in A$, de modo que $\varphi'(f_i) \rightarrow \varphi'(f)$ en la topología w^* de A' . Se tiene además que si $h \in B'$ es un homomorfismo de álgebras, entonces $\varphi'(h) = h \circ \varphi$ también lo es, puesto que la composición de homomorfismos es un homomorfismo. Sin embargo, es posible que $\varphi'(h) = 0$ aún cuando $h \neq 0$. Por ejemplo, si $\varphi : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{C}^2$ está dada como $\varphi(a) = (a(0), 0)$, y $h : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ es tal que $h(a, b) = b$, entonces $\varphi'(h) = 0$. En otras palabras: no necesariamente se tiene que $\varphi'(\widehat{B}) \subseteq \widehat{A}$. Evidentemente para que $\varphi'(\widehat{B}) \subseteq \widehat{A}$ es necesario y suficiente que se cumpla la condición siguiente:

$$h_B|_{\varphi(A)} \neq 0, \forall h_B \in \widehat{B}. \quad (1.1)$$

Suponiendo que se cumple dicha condición (1.1), φ' induce, por restricción a $\widehat{B}$ y correstricción a $\widehat{A}$, un mapa continuo $\widehat{\varphi}$ entre los espectros: $\widehat{\varphi} : \widehat{B} \rightarrow \widehat{A}$, $\widehat{\varphi}(h_B) = h_B \circ \varphi$.

La condición (1.1) se cumple, por ejemplo, siempre que A y B tengan unidad y φ sea unital, pues en este caso $h_B(\varphi(1)) = h_B(1) = 1, \forall h_B \in \widehat{B}$.

Supóngase que $\varphi : A \rightarrow B$ y $\psi : B \rightarrow C$ son homomorfismos de álgebras de Banach que satisfacen ambos la condición (1.1). Entonces el homomorfismo $\psi\varphi : A \rightarrow C$ también la cumple. En efecto, si $h_C \in \widehat{C}$, entonces $\psi'(h_C) \in \widehat{B}$, y por lo tanto $\psi'(h_C)|_{\varphi(A)} \neq 0$, es decir, $h_C|_{\psi\varphi(A)} \neq 0$.

Entonces tenemos el mapa $\widehat{\psi\varphi} : \widehat{C} \rightarrow \widehat{A}$, que evidentemente coincide con $\widehat{\varphi}\widehat{\psi}$. En otras palabras, tenemos un functor (contravariante) de la categoría de álgebras de Banach conmutativas y los homomorfismos de álgebras de Banach que satisfacen la condición (1.1) en la categoría de espacios topológicos de Hausdorff localmente compactos y funciones continuas. En particular, restringiéndose a las álgebras con unidad, tenemos un functor entre las categorías de álgebras de Banach conmutativas con unidad y sus homomorfismos unitales en la categoría de espacios de Hausdorff compactos y funciones continuas.

Otro caso en el que $\varphi : A \rightarrow B$ evidentemente cumple la condición (1.1) es cuando φ es un isomorfismo. En este caso de la discusión anterior y del Ejemplo 1.3.13 se deduce el siguiente resultado:

Proposición 1.3.18. Si A y B son álgebras de Banach conmutativas isomorfas, entonces sus espectros $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ son homeomorfos. En particular, si X e Y son espacios de Hausdorff localmente compactos, entonces X e Y son homeomorfos si y sólo si $C_0(X)$ y $C_0(Y)$ son álgebras de Banach isomorfas.

Sean X un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto y B un álgebra de Banach. Supongamos que $\varphi : B \rightarrow C_0(X)$ es un homomorfismo de álgebras. Para cada $x \in X$, sea $\varphi_x : B \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\varphi_x(b) = \varphi(b)(x)$. Entonces φ_x es homomorfismo y por lo tanto $\|\varphi_x\| \leq 1$. Entonces $|\varphi(b)(x)| = |\varphi_x(b)| \leq \|b\|$ para todo $x \in X$ y para todo $b \in B$. Entonces $\|\varphi(b)\|_\infty \leq \|b\|$ para todo $b \in B$, por lo cual $\|\varphi\| \leq 1$. De este hecho, combinado con 1.3.18, se deduce el siguiente corolario.

Corolario 1.3.19. Si X e Y son espacios de Hausdorff localmente compactos tales que existe un isomorfismo de álgebras entre $C_0(X)$ y $C_0(Y)$ entonces el isomorfismo es isométrico, y los espacios X e Y son homeomorfos.

Ejemplos 1.3.20.

$$(1) \widehat{C_0(\mathbb{R})} = C(S^1).$$

$$(2) \widehat{C_0(\mathbb{R}^2)} = C(S^2).$$

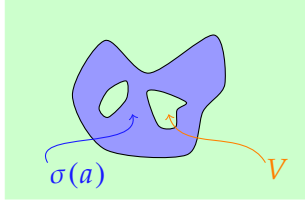
APLICACIONES

Proposición 1.3.21. Sean A un álgebra de Banach conmutativa con unidad y $a \in A$, tal que A está generada por a y por la unidad de A , es decir: $A = \overline{\{p(a) : p(X) \in \mathbb{C}[X]\}}$. Entonces la evaluación $\text{ev}_a : \widehat{A} \rightarrow \sigma(a)$, dada por $\text{ev}_a(h) = h(a)$, es un homeomorfismo.

Demostración. Ya sabemos que $\text{Im}(\widehat{a}) = \{h(a) : h \in \widehat{A}\} = \sigma(a)$, de manera que el mapa en cuestión es sobreyectivo. Sólo hay que ver que $h \mapsto h(a)$ es inyectivo. Supongamos que $h_1, h_2 \in \widehat{A}$ son tales que $h_1(a) = h_2(a)$. Entonces $h_1(p(a)) = p(h_1(a)) = p(h_2(a)) = h_2(p(a))$, $\forall p \in \mathbb{C}[X]$. Por lo tanto los homomorfismos continuos h_1 y h_2 coinciden sobre una subálgebra densa de A , y en consecuencia son iguales. $\square$

Proposición 1.3.22. En las mismas hipótesis de la proposición anterior se tiene que $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ es conexo.

Demostración. Supongamos que $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ no es conexo, es decir que tiene alguna componente conexa acotada, digamos V , como en la figura. Sea $v \in V$, y tomemos $p \in \mathbb{C}[X]$. Observar que:



- $\hat{a}$ es la identidad sobre $\sigma(a)$ vía la identificación de $\hat{A}$ con $\sigma(a)$ dada por $h \mapsto h(a)$ de acuerdo a la Proposición 1.3.21.
- $\partial V \subseteq \partial \sigma(a) \subseteq \sigma(a)$.
- $|p(v)| \leq \|p\|_{\partial V} \leq \|p\|_{\sigma(a)}$ (aplicando el principio del módulo máximo a p , que es holomorfa).

Entonces $|p(v)| \leq \|p\|_{\infty} = \|\widehat{p(a)}\|_{\infty} \leq \|p(a)\|$. Luego el mapa $\{q(a) : q \in \mathbb{C}[X]\} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $q(a) \mapsto q(v)$ es un homomorfismo de álgebras continuo. Por lo tanto se extiende a $h \in \hat{A}$. Entonces

$$v = \hat{a}(h) = h(a) \in \sigma(a),$$

y esto es absurdo porque $v \in V$. La contradicción obtenida implica que $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ es conexo. $\square$

Ejemplo 1.3.23 (El álgebra del disco). Sea $a : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}$, la inclusión. Entonces $a \in A(\mathbb{D})$. Notar que si p es un polinomio entonces $p(z) = p(a)|_z$ para todo $z \in \bar{\mathbb{D}}$. Afirmamos que a genera a $A(\mathbb{D})$ como álgebra de Banach. En efecto, fijemos $b \in A(\mathbb{D})$, y sea A la subálgebra de Banach unital de $A(\mathbb{D})$ generada por a .

- (1) Para $r \in (0, 1)$ sea $b_r : \bar{\mathbb{D}}(0, \frac{1}{r}) \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $b_r(z) = b(rz)$. Entonces $b_r|_{\bar{\mathbb{D}}} \in A(\mathbb{D})$ y $\lim_{r \rightarrow 1} b_r|_{\bar{\mathbb{D}}} = b$ porque b es uniformemente continua en $\bar{\mathbb{D}}$.
- (2) Por otro lado, si $c \in \text{Hol}(\bar{\mathbb{D}}(0, s))$ para algún $s > 1$, entonces $c(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, uniformemente en $\bar{\mathbb{D}}$. Entonces $c = \lim_n c(n)$ donde $c(n) = \sum_{k=0}^n c_k a^k$. Luego $c \in A$.

Como cada b_r está en las hipótesis de (2), se tiene que $b_r \in A$, y por lo tanto su límite, b , también está en A . En conclusión a es un generador de $A(\mathbb{D})$.

Nótese que, como $\|a\| = 1$, entonces $\sigma(a) \subseteq \bar{\mathbb{D}}$. Por otro lado, cada $z \in \bar{\mathbb{D}}$ define un elemento $h_z \in \widehat{A(\mathbb{D})}$, definido como $h_z(b) := b(z)$. Por la Proposición 1.3.21, sabemos que $\widehat{A(\mathbb{D})} \cong \sigma(a)$ a través $h \mapsto h(a)$. Como la restricción de este mapa a $\{h_z : z \in \bar{\mathbb{D}}\}$ tiene imagen $\bar{\mathbb{D}}$, concluimos primero que $\sigma(a) = \bar{\mathbb{D}}$, y luego que $\widehat{A(\mathbb{D})} = \{h_z : z \in \bar{\mathbb{D}}\} \cong \bar{\mathbb{D}}$.

Proposición 1.3.24. Sean A un álgebra de Banach con unidad y a un elemento invertible de A . Si a y a^{-1} generan A como álgebra de Banach, es decir, $A = \overline{\{p(a, a^{-1}) : p \in \mathbb{C}[x, y]\}}$, entonces la evaluación $\text{ev}_a : \hat{A} \rightarrow \sigma(a)$, dada por $\text{ev}_a(h) = h(a)$, es un homeomorfismo.

Demostración. Como en 1.3.21, sabemos que ev_a es continuo y sobreyectivo. Si $h_1, h_2 \in \hat{A}$ son tales que $h_1(a) = h_2(a)$, entonces también se tiene que $h_1(a^{-1}) = h_1(a)^{-1} = h_2(a)^{-1} = h_2(a^{-1})$, y por lo tanto $h_1(p(a, a^{-1})) = p(h_1(a), h_1(a)^{-1}) = p(h_2(a), h_2(a)^{-1}) = h_2(p(a, a^{-1}))$. Se concluye que los mapas continuos h_1 y h_2 coinciden en un conjunto denso en A , y por lo tanto son iguales. $\square$

1.3.1. Perspectiva categórica

Consideremos las siguientes categorías:

$\mathcal{B}_c$: álgebras de Banach conmutativas y sus homomorfismos que satisfacen (1.1).

$\mathcal{T}'_{lch}$: espacios topológicos de Hausdorff localmente compactos y funciones continuas.

$\mathcal{C}_c^*$: C^* -álgebras conmutativas y sus homomorfismos que satisfacen (1.1).

Ya hemos visto que tenemos un functor $\hat{\cdot} : \mathcal{B}_c \rightarrow \mathcal{T}'_{lch}$, que a un elemento $A \in \mathcal{B}_c$ asigna su espectro $\hat{A}$, y que a un morfismo $\varphi : A \rightarrow B$ asigna la función continua $\hat{\varphi} : \hat{B} \rightarrow \hat{A}$, obtenida por restricción del mapa dual $\varphi' : B' \rightarrow A'$. Restringiendo dicho functor a la subcategoría plena $\mathcal{C}_c^*$ de $\mathcal{B}_c$, obtenemos un functor $\hat{\cdot} : \mathcal{C}_c^* \rightarrow \mathcal{T}'_{lch}$.

Por otro lado, también tenemos un mapa que relaciona las categorías $\mathcal{T}'_{lch}$ y $\mathcal{C}_c^*$ al nivel de los objetos:

$$\text{Ob}(\mathcal{T}'_{lch}) \ni X \mapsto C_0(X) \in \mathcal{C}_c^*.$$

Si esta asignación correspondiera a un functor al nivel de los objetos, parecería natural completarlo al nivel de los morfismos de la siguiente manera: si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua, entonces es posible asignar a cada elemento $b \in C_0(Y)$ la función $f_*(b) : X \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f_*(b) = b \circ f$; pero ocurre que, si bien $f_*(b)$ es continua, ella no necesariamente pertenece a $C_0(X)$, como desearíamos. Para verlo, basta considerar un espacio no compacto X y cualquier elemento $b \in C_0(Y)$ que no se anule en algún punto $y_0 \in Y$, y tomar $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(x) = y_0$, $\forall x \in X$. Entonces f es continua, y $f_*(b)(x) = b \circ f(x) = b(y_0) \neq 0$; entonces $f_*(b) \notin C_0(X)$. El problema no es difícil de identificar: todo el espacio X , que no es compacto, va a través de Y sobre un conjunto compacto, $\{y_0\}$. La solución es simple: basta restringir los morfismos considerados a aquellas funciones continuas que son *propias*:

Definición 1.3.25. Una función continua $f : X \rightarrow Y$ entre los espacios de Hausdorff localmente compactos X e Y es propia si $f^{-1}(K)$ es compacto en X siempre que K sea compacto en Y .

Es claro que la composición de funciones propias es también una función propia, y también que toda función continua definida en un espacio compacto también es propia.

Proposición 1.3.26. Sean X e Y espacios de Hausdorff localmente compactos, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, y $\alpha : X \rightarrow Y$ una función continua y propia tal que $\alpha(x) = y_0 \iff x = x_0$. Sea $\beta : X \setminus \{x_0\} \rightarrow Y \setminus \{y_0\}$ tal que $\beta(x) = \alpha(x)$, $\forall x \in X \setminus \{x_0\}$. Entonces β también es propia.

Demostración. En primer lugar obsérvese que la definición de β es correcta, pues $\alpha(x) \in Y \setminus \{y_0\}$ si $x \neq x_0$. Supongamos ahora que K es un subconjunto compacto de $Y \setminus \{y_0\}$, y por lo tanto también de Y . Entonces $\alpha^{-1}(K)$ es compacto en X , porque α es una función propia. Como hemos supuesto que la única preimagen de y_0 por α es x_0 , entonces $x_0 \notin \alpha^{-1}(K)$, de donde $\alpha^{-1}(K) = \beta^{-1}(K)$ es un subconjunto compacto de $X \setminus \{x_0\}$. Es decir, β es propia. $\square$

En lugar de considerar la categoría $\mathcal{T}'_{lch}$ consideraremos.

$\mathcal{T}_{lch}$: espacios topológicos de Hausdorff localmente compactos y funciones continuas propias.

Proposición 1.3.27. Las correspondencias $X \mapsto C_0(X)$ y $(X \xrightarrow{f} Y) \mapsto (C_0(Y) \xrightarrow{f_*} C_0(X))$ constituyen un functor contravariante $C_0 : \mathcal{T}_{lch} \rightarrow \mathcal{C}_c^*$.

Demostración. Una vez que mostremos que el homomorfismo $f_* : C_0(Y) \rightarrow C_0(X)$ satisface la condición (1.1), el resto de las verificaciones son de rutina y las dejamos a cargo del lector. Ahora, dado $x \in X$, por el Lema de Urysohn existe $b \in C_0(Y)$ tal que $b(f(x)) = 1$. Por lo tanto $f_*(b)(x) \neq 0$. $\square$

Después de la corrección hecha en relación a los morfismos entre los espacios topológicos considerados, los problemas podrían persistir: ¿el functor $\hat{\cdot} : \mathcal{B}_c \rightarrow \mathcal{T}'_{lch}$ podrá co-restringirse a $\mathcal{T}_{lch}$?

Proposición 1.3.28. Sean A y B álgebras de Banach, y $\phi : A \rightarrow B$ un homomorfismo que satisface (1.1).

1. Si $\phi' : B' \rightarrow A'$ es el mapa dual de ϕ , entonces $\phi'(\widehat{B}) \subseteq \widehat{A}$.
2. El mapa $\widehat{\phi} : \widehat{B} \rightarrow \widehat{A}$ es una función propia.
3. Si ϕ es sobreyectivo, entonces $\widehat{\phi}$ es inyectivo.

Demostración. Como fue señalado en oportunidad de introducir la condición (1.1), esta es equivalente a $\phi'(\widehat{B}) \subseteq \widehat{A}$. En cuanto a la segunda afirmación, basta tener en cuenta la parte anterior y aplicar la Proposición 1.3.26 a la restricción-correstricción de ϕ' a $\widehat{B} \cup \{0\}$ y $\widehat{A} \cup \{0\}$. La última parte es consecuencia de que el mapa dual de un operador sobreyectivo siempre es inyectivo. $\square$

Corolario 1.3.29. Las correspondencias $A \mapsto \widehat{A}$ y $(A \xrightarrow{\phi} B) \mapsto (\widehat{B} \xrightarrow{\widehat{\phi}} \widehat{A})$ constituyen un functor contravariante $\hat{\cdot} : \mathcal{B}_c \rightarrow \mathcal{T}_{lch}$.

Las cosas lucen más simples cuando uno se restringe a álgebras de Banach con unidad y homomorfismos uniales por un lado, y a espacios compactos y funciones continuas por otro. En efecto, el espacio de Gelfand de un álgebra de Banach unital es siempre compacto, y si $\phi : A \rightarrow B$ es un homomorfismo unital, entonces el mapa transpuesto ϕ' lleva $\widehat{B}$ dentro de $\widehat{A}$, pues $h_B(\phi(1)) = h_B(1) = 1 \neq 0$, $\forall h_B \in \widehat{B}$, y como ϕ' es $(w^* - w^*)$ -continuo, su restricción $\widehat{\phi}$ a $\widehat{B}$ es continua. Por lo tanto pasar al espectro es un functor contravariante de la categoría $\mathcal{B}_c^1$ de álgebras de Banach conmutativas con unidad y los homomorfismos uniales en la categoría $\mathcal{T}_{ch}$ de los espacios topológicos de Hausdorff compactos y las funciones continuas. Recíprocamente, la imagen del functor C_0 restringido a $\mathcal{T}_{ch}$ está contenida en $\mathcal{C}_c^{*,1}$, la subcategoría plena de $\mathcal{B}_c^1$ cuyos objetos son C^* -álgebras.

Componiendo C_0 y $\hat{\cdot}$ se obtienen funtores $\hat{\cdot} \circ C_0 : \mathcal{T}_{lch} \rightarrow \mathcal{T}_{lch}$ y $C_0 \circ \hat{\cdot} : \mathcal{B}_c \rightarrow \mathcal{C}_c^*$.

Proposición 1.3.30. El functor $\widehat{} \circ C_0 : \mathcal{T}_{lch} \rightarrow \mathcal{T}_{lch}$ es isomorfo al functor identidad.

Demostración. Para cada $X \in Ob(\mathcal{T}_{lch})$ consideremos el homeomorfismo $\delta_X : Id(X) = X \rightarrow C_0(X)$ dado por $\delta_X(x) := \delta_x$, donde $\delta_x(a) = a(x)$, $\forall a \in C_0(X)$. Si $\alpha : X \rightarrow Y$ es un morfismo en $\mathcal{T}_{lch}$, entonces el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & Y, \\ \delta_X \downarrow \cong & & \downarrow \cong \delta_Y \\ \overline{C_0(X)} & \xrightarrow{(\alpha_*)} & \overline{C_0(Y)} \end{array}$$

En efecto, si $x \in X$ y $b \in C_0(Y)$:

$$(\widehat{\alpha_*}) \circ \delta_X(x)|_b = (\widehat{\alpha_*}) \circ \delta_x|_b = \delta_x \circ \alpha_*|_b = \delta_x(b \circ \alpha) = b(\alpha(x)) = \delta_Y(\alpha(x))|_b = \delta_Y \circ \alpha(x)|_b,$$

y por lo tanto $\widehat{(\alpha_*)} \circ \delta_X = \delta_Y \circ \alpha$.

□

El teorema de Gelfand-Naimark para C^* -álgebras conmutativas, que veremos en el próximo capítulo, implica que la restricción del functor $C_0 \circ \widehat{}$ a $\mathcal{C}_c^*$ es isomorfo al functor identidad $Id : \mathcal{C}_c^* \rightarrow \mathcal{C}_c^*$ a través de la transformada de Gelfand. Este hecho, junto con el que acabamos de probar en 1.3.30, muestran que las categorías $\mathcal{C}_c^*$ y $\mathcal{T}_{lch}$ son duales.

1.4. Álgebras de funciones

Definición 1.4.1. Sean X un espacio de Hausdorff localmente compacto y $A \subseteq C_0(X)$ un álgebra de Banach (la norma de A no es necesariamente la $\|\cdot\|_\infty$). Se dice que A es un *álgebra de funciones sobre X* si:

- (i) A separa puntos de X , es decir si $x_1, x_2 \in X$ son tales que $a(x_1) = a(x_2)$ para todo $a \in A$ entonces $x_1 = x_2$.
- (ii) $A(x) \neq 0$, es decir, para todo $x \in X$ existe $a \in A$ tal que $a(x) \neq 0$ (se dice entonces que A no se anula en X).

Observación 1.4.2. De acuerdo al Corolario 1.3.2, la inclusión natural $A \xhookrightarrow{\iota} C_0(X)$ es un homomorfismo de álgebras, y por lo tanto $\|\iota(a)\|_\infty \leq \|a\|$ para todo $a \in A$. Luego es $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|$.

Proposición 1.4.3. Si B es un álgebra de Banach conmutativa y $A := \overline{\mathcal{G}(B)}^{\|\cdot\|_\infty} \subseteq C_0(\widehat{B})$, entonces A es un álgebra de funciones sobre $\widehat{B}$.

Demostración. En primer lugar A separa puntos de $\widehat{B}$: dados $h_1, h_2 \in \widehat{B}$, entonces $\widehat{b}(h_1) = \widehat{b}(h_2)$ para todo $b \in B$ si y sólo si $h_1(b) = h_2(b)$ para todo $b \in B$, es decir, si y sólo si $h_1 = h_2$. En segundo lugar A no se anula en $\widehat{B}$: si $h \in \widehat{B}$, entonces por definición es $h \neq 0$, de donde existe $b \in B$ tal que $h(b) \neq 0$; luego es $\widehat{b}(h) \neq 0$. $\square$

Proposición 1.4.4. Sea A un álgebra de funciones sobre X . Para cada $x \in X$ sea $\delta_x \in \widehat{A}$ tal que $\delta_x(a) = a(x)$. Entonces el mapa $\delta : X \rightarrow \widehat{A}$ tal que $x \mapsto \delta_x$ es un homeomorfismo entre X y un subconjunto cerrado de $\widehat{A}$.

Demostración. Efectivamente $\delta_x \in \widehat{A}$ porque $A(x) \neq 0$. El mapa δ es inyectivo: si $\delta_x = \delta_{x'}$ entonces $a(x) = a(x')$ para todo $a \in A$, lo que implica que $x = x'$ porque A separa puntos. Si $x_i \rightarrow x$ en X y $a \in A$ entonces $\delta_{x_i}(a) = a(x_i) \rightarrow a(x) = \delta_x(a)$ porque a es continua; por lo tanto $\delta_{x_i} \xrightarrow{\omega^*} \delta_x$, lo que muestra que δ es continua.

Supongamos que $\eta \in \widehat{A}$ es tal que existe una red $(x_i) \subset X : \delta_{x_i} \xrightarrow{\omega^*} \eta$. Sea X_∞ la compactificación de X con un punto. Entonces existen alguna subred (y_j) de (x_i) y un punto (único) $y \in X_\infty$ tal que $y_j \rightarrow y$. Por otro lado hay una inclusión natural $A \hookrightarrow \{b \in C(X_\infty) : b(\infty) = 0\}$. Teniendo en cuenta esta inclusión: $a(y) = \lim_j a(y_j) = \eta(a)$. Entonces $\eta = \delta_y$. Como $\eta \in \widehat{A}$ no se anula en todo A , entonces $y \neq \infty$. Luego es $y \in X$. Esto muestra que $\delta(X)$ es cerrado en $\widehat{A}$. Además se tiene que $x_i \rightarrow y$: basta ver que toda subred de (x_i) tiene una subred convergente a y , para lo cual es suficiente probar que toda subred convergente de (x_i) tiene límite y . Ahora, si (z_j) es una subred convergente de (x_i) , entonces para todo $a \in A$ es $\delta_y(a) = \eta(a) = \lim_j \delta_{z_j}(a) = \delta_{\lim_j z_j}(a)$. Entonces $y = \lim_j z_j$. Esto prueba que δ^{-1} es continua. $\square$

Ejemplo 1.4.5 (El álgebra del disco). Considérese el álgebra

$$A = \{a \in C(S^1) : a \text{ admite una extensión continua y holomorfa en } \mathbb{D}\} \subseteq C(S^1).$$

Entonces $(A, \|\cdot\|_\infty)$ es un álgebra de funciones sobre S^1 . Como la inclusión $a : S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}$ pertenece a A es claro que A separa puntos y no se anula sobre S^1 . Para ver que A es de Banach, basta mostrar que A es cerrada en $C(S^1)$ con $\|\cdot\|_\infty$. Ahora, supongamos que $(b_n) \subset A$ converge a $b \in C(S^1)$. Si $\tilde{b}_n$ es una extensión holomorfa¹ de b_n a $\mathbb{D}$, entonces $(\tilde{b}_n)$ es de Cauchy en $C(\mathbb{D})$ por el teorema del módulo máximo; sea c su límite. Como el límite uniforme de funciones holomorfas es holomorfo, tenemos que c es holomorfa en $\mathbb{D}$. Como además $c|_{S^1} = b$ resulta que $b \in A$, y además que $\tilde{b} = c$. Entonces la imagen del mapa $\delta : S^1 \rightarrow \widehat{A}$ incluye a S^1 como subconjunto cerrado de $\widehat{A}$ por la proposición anterior. Sin embargo $\widehat{A} \neq S^1$ vía esta inclusión: por ejemplo el mapa $a \mapsto \tilde{a}(0)$ es un homomorfismo no nulo ($\tilde{1} = 1$). De hecho A es claramente isomorfa al álgebra del disco $A(\mathbb{D})$, y por lo tanto $\widehat{A} \cong \mathbb{D}$.

¹Observar que, como consecuencia del principio del módulo máximo, dicha extensión es única. De hecho, si $a \in A$ entonces su extensión está dada por: $\tilde{a}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} \frac{a(w)}{w-z} dw$, $\forall z \in \mathbb{D}$.

Ejemplo 1.4.6. Teorema de Wiener

“Si $a : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ continua tiene serie de Fourier absolutamente convergente y no se anula, entonces $\frac{1}{a}$ también tiene serie de Fourier absolutamente convergente”. Recordemos que el álgebra de Wiener es

$$\mathcal{W}(S^1) = \left\{ a : S^1 \rightarrow \mathbb{C} : a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n, \text{ con } \sum_n |a_n| < \infty \right\},$$

con la norma $\|a\| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|$. $\mathcal{W}(S^1)$ es un álgebra de funciones sobre S^1 y $\mathcal{W}(S^1) \cong l^1(\mathbb{Z})$. De acuerdo a la Proposición 1.4.4, el mapa $\delta : S^1 \rightarrow \overline{\mathcal{W}(S^1)}$, dado por $z \mapsto \delta_z$, es un homeomorfismo sobre un subconjunto cerrado de $\overline{\mathcal{W}(S^1)}$.

Para cada $k \in \mathbb{Z}$, sea $e_k : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $e_k(z) = z^k$. Entonces $e_k = e_1^k \in \mathcal{W}(S^1)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ y $\mathcal{W}(S^1) = \overline{\text{span}\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}}$. Entonces $\mathcal{W}(S^1)$ está generado por e_1 y $e_{-1} = e_1^{-1}$ como álgebra de Banach. Por lo tanto la Proposición 1.3.24 implica que el mapa evaluación $ev_{e_1} : \overline{\mathcal{W}(S^1)} \rightarrow \sigma(e_1)$ es un homeomorfismo. Por otra parte:

1. $\sigma(e_k) \subseteq \overline{D(0, \|e_k\|)} = \bar{\mathbb{D}}$.
2. $e_{-1} = e_1^{-1}$. Entonces $\sigma(e_{-1}) = \sigma(e_1)^{-1}$, lo que implica que $\sigma(e_1) \subset \bar{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) = S^1$. Entonces $\sigma(e_1) \subseteq S^1$ y como es obvio que $S^1 \subseteq \sigma(e_1)$, entonces $\sigma(e_1) = S^1$. Por lo tanto el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{id} & S^1 = \sigma(e_1), \\ & \searrow \delta & \uparrow \cong \uparrow ev_{e_1} \\ & & \overline{\mathcal{W}(S^1)} \end{array} \quad \text{pues} \quad \begin{array}{ccc} & \curvearrowright & z = \delta_z(e_1) \\ z \mapsto & & \downarrow \\ & \searrow & \delta_z \end{array}$$

Esto muestra que δ es un homeomorfismo; en particular $\overline{\mathcal{W}(S^1)} = \delta(S^1)$.

Finalmente si $a \in \mathcal{W}(S^1)$ es tal que $a(z) \neq 0$ para todo $z \in S^1$, entonces

$$\sigma(a) = \{h(a) : h \in \overline{\mathcal{W}(S^1)}\} = \{a(z) : z \in S^1\} \not\ni 0.$$

Entonces $a \in \text{Inv}(\mathcal{W}(S^1))$, es decir $\frac{1}{a} \in \mathcal{W}(S^1)$.

Notar que, como $\ell^1(\mathbb{Z}) \cong \mathcal{W}(S^1)$, entonces $\widehat{\ell^1(\mathbb{Z})} = S^1$, es decir, el espectro de $\ell^1(\mathbb{Z})$ se identifica con S^1 , el grupo dual de $\mathbb{Z}$. Esto es parte de un hecho más general.