Capítulo 1

Álgebras de Banach

1.1. Álgebras de Banach

En todo este capítulo $\mathcal{H}$ denotará un espacio de Hilbert. Consideremos el siguiente espacio vectorial:

$$B(\mathcal{H}) := \{T : \mathcal{H} \to \mathcal{H} : \ T \text{ es lineal y continua } \}.$$

Si $T \in B(\mathcal{H})$, entonces $\|T\| := \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$ es finito, y el mapa $T \mapsto \|T\|$ es una norma con respecto a la cual $B(\mathcal{H})$ es completo, es decir, es un espacio de Banach.. Se sabe de cursos anteriores que $B(\mathcal{H})$ es un espacio de Banach que verifica las siguientes propiedades:

1. La composición de operadores $(S, T) \mapsto ST$ define un mapa $B(\mathcal{H}) \times B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ que es $\mathbb{C}$-bilineal y asociativo, con el cual $B(\mathcal{H})$ es un álgebra con unidad.

2. La norma de operadores es submultiplicativa: si $S, T \in B(\mathcal{H})$ entonces $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$.

3. La adjunción $* : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ dada por $T \mapsto T^*$, donde T^* es el único elemento de $B(\mathcal{H})$ que satisface $\langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ para todos $x, y \in \mathcal{H}$,

$$\text{cumple que : } \begin{cases} T^{**} = T, \\ (ST)^* = T^*S^*, \\ * \quad \text{es antilineal,} \\ \|T^*\| = \|T\| \quad \text{y} \quad \|T^*T\| = \|T\|^2 \quad \text{para todo} \quad T \in B(\mathcal{A}). \end{cases}$$

Una C^*-álgebra *concreta* $\mathcal{A} \subseteq B(\mathcal{H})$ es una subálgebra tal que $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ es cerrada en la topología definida por la norma de operadores.

Teorema (Gelfand-Naimark, 1943)**.** Da una caracterización abstracta de tales álgebras.

Buena parte de estas notas está dedicada a dar una demostración de dicho teorema.

Definición 1.1.1. El par $(\mathcal{A}, \mu)$ es un *álgebra* si $\mathcal{A}$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y $\mu : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es un mapa bilineal asociativo. Escribiremos simplemente ab en lugar de $\mu(a, b)$. Se dice que

$\mathcal{A}$ tiene unidad si existe $1 \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(a, 1) = a = \mu(1, a)$ para todo $a \in \mathcal{A}$ (observar que si existe una unidad, esta es única).

Un homomorfismo de álgebras $\phi : A \to B$ es una transformación $\mathbb{C}$-lineal que también es un homomorfismo de anillos. Si A y B tienen unidad y $\phi(1_A) = 1_B$, diremos que ϕ es unital.

Definición 1.1.2. Se dice que $(\mathcal{A}, \mu, \| \ \|)$ es un *álgebra normada* si $(\mathcal{A}, \mu)$ es un álgebra, $\| \ \|$ es una norma y $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$, para todos $a, b \in \mathcal{A}$.

- Si $\mathcal{A} \ni 1$ se pide también que $\|1\| = 1$.
- Si además $(\mathcal{A}, \| \ \|)$ es de Banach, se dice que $(\mathcal{A}, \mu, \| \ \|)$ es un *álgebra de Banach*.

Un homomorfismo entre álgebras normadas es un homomorfismo de álgebras que además es continuo.

Ejemplos 1.1.3.

1. $M_n(\mathbb{C}) \cong B(\mathbb{C}^n)$ es un álgebra de Banach con la norma de operadores.
2. $T_n(\mathbb{C}) = \{M \in M_n(\mathbb{C}) \ : \ M$ triangular superior$\}$ es un álgebra de Banach con la norma de operadores.
3. Si X es un espacio de Hausdorff localmente compacto, entonces
$$C_b(X) := \{a : X \to \mathbb{C} / \ a \text{ es continua y acotada}\}$$
es un álgebra de Banach con las operaciones usuales y la norma del supremo.
4. Si E es un espacio de Banach entonces $B(E) := \{T : E \to E / \ T$ es lineal y continua$\}$ es un álgebra de Banach con $\|T\| := \sup\{\|Tx\| : \ \|x\| = 1\}$.
5. *El Álgebra del disco.* Sean $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, y $A(\mathbb{D}) := \{f \in C(\overline{\mathbb{D}}) : \ f \in H(\mathbb{D})\}$ con la norma $\| \ \|_\infty$ (o sea $\|f\|_\infty = \sup_{z \in \overline{\mathbb{D}}} \|f(z)\|$). Veamos que es de Banach: si $(f_n) \subseteq A(\mathbb{D})$ es tal que $f_n \xrightarrow{\| \ \|_\infty} f \in C(\overline{\mathbb{D}})$, entonces es un resultado bien conocido sobre funciones holomorfas que $f \in H(\mathbb{D})$; luego $A(\mathbb{D})$ es cerrada en $C(\mathbb{D})$, y por lo tanto es de Banach.
6. Para cualquier espacio de medida (X, μ) se tiene que $L^\infty(X, \mu)$ es un álgebra de Banach con las operaciones usuales y la norma $\| \ \|_\infty$.
7. Sea G un espacio localmente compacto y de Hausdorff (en adelante LCH) que además tiene una estructura de grupo tal que el mapa $G \times G \to G$ dado por $(r, s) \to rs^{-1}$ es continuo (es decir: tanto el producto como la inversión son continuos). Por el teorema de Riesz se tiene que $M(G) = C_0(G)^*$ donde
$$M(G) = \{\text{medidas complejas regulares de Borel sobre} G\}.$$
El isomorfismo $I : M(G) \to C_0(G)^*$ está dado por: $\mu \mapsto I_\mu$, donde $I_\mu(f) = \int_G f d\mu$. Recordar que $\|I_\mu\| = \|\mu\| = |\mu|(G)$. Como producto $M(G) \times M(G) \to M(G)$ se considera

la convolución: $(\mu,\nu)\mapsto \mu*\nu$, donde $\mu*\nu$ está dado por $\mu*\nu(f)=\int_G\int_G f(rs)d\mu(r)d\nu(s)$. Notar que $\mu*\nu\in C_0(G)^*$ y $\|\mu*\nu\|\leq\|\mu\|\|\nu\|$ porque

$$|\mu*\nu(f)|=|\int_G\int_G f(rs)d\mu(r)d\nu(s)|\leq\int_G\int_G|f(rs)|d|\mu|(r)d|\nu|(s)$$
$$\leq\|f\|_\infty\int_G\int_G d|\mu|(r)d|\nu|(s)=\|f\|_\infty\|\,\|\mu\|\,\|\nu\|.$$

8. Si E es un espacio de Banach, entonces E puede ser visto como un álgebra de Banach, considerando sobre E el producto nulo.

Ejercicio 1. Sea $\omega:\mathbb{Z}^+\to(0,\infty)$ tal que $\omega(m+n)\leq\omega(m)\omega(n),\forall n$. Sea $\mathbb{C}[X]$ el álgebra de polinomios en una variable con coeficientes complejos. En $\mathbb{C}[X]$ se considera la norma

$$\|a\|_\omega:=\sum_{n=1}^{\infty}|a(n)|\omega(n),\quad\forall a\in\mathbb{C}[X].$$

Dar ejemplos de tales funciones ω. Sea ℓ^1_ω la completación de $\mathbb{C}[X]$ con repecto a $\|\ \|_\omega$ (por ejemplo si $\omega(n)=1\ \forall n$, entonces $\ell^1_\omega=\ell^1$). Demostrar que ℓ^1_ω es un álgebra de Banach, y que es isométricamente isomorfa a ℓ^1 como espacio de Banach. Mostrar que, sin embargo, diferentes elecciones de ω dan lugar a álgebras de Banach ℓ^1_ω no isomorfas.

Ejercicio 2. Sea A un álgebra de Banach con unidad. Se define $L:A\to B(A)$ como $L_a(x):=ax$, $\forall a,x\in A$. Probar que L es un homomorfismo de álgebras de Banach cuya imagen es cerrada.

Ejercicio 3. Supóngase que A es una álgebra compleja con una norma con respecto a la cual es un espacio de Banach, y tal que el producto es continuo, es decir, existe K tal que $\|ab\|\leq K\|a\|\,\|b\|$, $\forall a,b\in A$. Probar que en A se puede definir una norma equivalente $\|\ \|_L$ con la cual A es un álgebra de Banach, y que en el caso de que A tenga unidad, entonces $\|1\|_L=1$ (sugerencia: si A no tiene unidad, adjuntársela, y luego usar el *Ejercicio* 2).

Definición 1.1.4. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra, se dice que $*:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ es una *involución* si verifica que

- $*$ es antilineal: $(\alpha a+\beta b)^*=\bar{\alpha}a^*+\bar{\beta}b^*,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}, a,b\in A$.
- $a^{**}=a$ para todo $a\in\mathcal{A}$,
- $*$ es antimultiplicativa: $(ab)^*=b^*a^*$ para todos $a,b\in\mathcal{A}$.

En este caso el par $(\mathcal{A},*)$ se llama *$*$-álgebra* o álgebra con involución. Un homomorfismo $\phi:A\to B$ entre $*$-álgebras es un un homomorfismo de álgebras tal que $\phi(a^*)=\phi(a)^*$, para todo $a\in A$.

Definición 1.1.5. Una *$*$-álgebra normada* es un álgebra normada con una involución tal que $\|a^*\|=\|a\|$ para todo a. Si además es completa se dice que es una *$*$-álgebra de Banach*. Un homomorfismo de $*$-álgebras normadas es un homomorfismo de $*$-álgebras que además es continuo.

Definición 1.1.6. Una *$pre - C^*$-álgebra* es una $*$-álgebra normada en la cual todo elemento $a \in \mathcal{A}$ satisface la *C^*-identidad:*

$$\|a^* a\| = \|a\|^2.$$

Si además A es completo se dice que A es una C^*-álgebra.

Ejemplos 1.1.7. Retomando los ejemplos anteriores, veamos cuáles son C^*-álgebras.

1. Si en $\mathbb{C}^n$ se considera la norma euclidiana, entonces $M_n(\mathbb{C})$ es una C^*-álgebra con la norma de operadores y con la involución $*$ dada por el adjunto.

2. Como subálgebra de la anterior, $T_n(\mathbb{C})$ no es una C^*-álgebra pues no es cerrada por $*$.

3. $C_b(X)$ es una C*-álgebra con la conjugación como involución.

4. En general $B(E)$ no es una $*$-álgebra. Pero cuando E es de Hilbert sí es una $*$-álgebra, de hecho una C^*-álgebra.

5. Como es sabido, $A(\mathbb{D})$ no es cerrado por conjugación. Sin embargo, podemos considerar el mapa antilineal $* : A(\mathbb{D}) \to A(\mathbb{D})$ tal que $f^*(z) := \overline{f(\bar{z})}$. Se trata de una involución con la cual $A(\mathbb{D})$ es una $*$-álgebra de Banach, aunque no una C^*-álgebra.

6. $L^\infty(X, \mu)$ es una C*-álgebra con la conjugación como involución.

7. Supongamos que G es un grupo discreto (es decir, un grupo con la topología discreta). Entonces $M(G) = l^1(G)$. Si $\mu \in M(G)$ la vemos como $\mu \in l^1(G)$. Se define μ^* tal que $\mu^*(t) = \overline{\mu(t^{-1})}$. Entonces se verifica: $\|\mu^*\| = \|\mu^*\|_1 = \sum_{t \in G} |\mu^*(t)| = \sum_{t \in G} |\mu(t^{-1})| = \sum_{t \in G} |\mu(t)| = \|\mu\|$. También podemos definir a μ^* de la siguiente manera: $\mu^*(E) = \overline{\mu(-E)}$ para todo $E \subseteq G$, o $\mu^*(f) = \overline{\int f(t^{-1}) d\mu(t)}$.
   Notar que $G \hookrightarrow M(G)$ a través del mapa $t \mapsto \delta_t$. Entonces es $\delta_t^* = \delta_{t^{-1}}$ y $\delta_s * \delta_t = \delta_{st}$.

Ejemplo 1.1.8. Sea X un espacio LCH. Si $a : X \to \mathbb{C}$, decimos que $\lim\limits_{x \to \infty} a(x) = 0$ si dado $\epsilon > 0$ existe $K \subseteq X$, compacto, tal que $|a(x)| < \epsilon \ \forall x \in X \setminus K$. Sea

$$C_0(X) := \left\{ a : X \to \mathbb{C} : a \text{ continua y } \lim_{x \to \infty} a(x) = 0 \right\}.$$

Con $\|a\|_\infty = \sup\{|a(x)| : \ x \in X\}$ y $a^*(x) = \overline{a(x)}$, resulta que $C_0(X)$ es una C^*-álgebra conmutativa. Uno de nuestros primeros objetivos en este curso será mostrar el resultado siguiente, cuyas consecuencias son muy importantes, en particular desde el punto de vista heurístico:

Teorema (Gelfand-Naimark)**.** Toda C^*-álgebra conmutativa es naturalmente isomorfa a $C_0(X)$, para cierto espacio localmente compacto y de Hausdorff X, que es único a menos de homeomorfismos.

Ejemplos 1.1.9.

1. Supongamos que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert. Consideremos el conjunto $\mathcal{K}(\mathcal{H}) = \{T \in B(\mathcal{H}) : T$ es compacto$\}$. Recordar que T es compacto si $\overline{T(B(0,1))}$ es compacto. Equivalentemente, T es compacto sii T es el límite de operadores de rango finito. Entonces:

   - $\overline{\mathcal{F}(\mathcal{H})} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ es la $*$-álgebra de los operadores de rango finito.
   - $\mathcal{K}(\mathcal{H})^* = \mathcal{K}(\mathcal{H})$,
   - $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ es un ideal bilateral cerrado de $B(\mathcal{H})$, es decir, $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es un subespacio cerrado de $B(\mathcal{H})$ tal que TS, $ST \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ para todo $T \in \mathcal{K}$ y para todo $S \in B(\mathcal{H})$. Notación: $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \lhd B(\mathcal{H})$.

   Entonces $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es una C^*-álgebra, sin unidad si $\dim(\mathcal{H}) = \infty$, y no conmutativa si $\dim(\mathcal{H}) > 1$.

2. *El álgebra de Wiener*:

$$\mathcal{W} := \left\{ a \in C(S^1) : a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n, \text{ con } (a_n) \in l^1(\mathbb{Z}) \right\}.$$

   El producto de $\mathcal{W}$ es punto a punto, y la involución está dada por la conjugación. Con estas operaciones y la norma $\|a\| := \|(a_n)\|_1$, $\mathcal{W}$ es una $*$-álgebra de Banach conmutativa con unidad. La transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{W} \to \ell^1(\mathbb{Z})$ es un isomorfismo de $*$-álgebras de Banach.

1.1.1. Algunas construcciones con álgebras de Banach

Producto directo

Si $(A_i)_{i\in I}$ es una familia de álgebras de Banach (o $*$-álgebras de Banach, o C^*-álgebras), se define:

$$\prod_{i\in I} A_i := \left\{ f : I \to \cup A_i \,/\, f(i) \in A_i, \text{ para todo } i \in I \text{ y } \sup_{i\in I} \|f(i)\| < \infty \right\},$$

con las operaciones obvias punto a punto y $\|f\|_\infty = \sup_{i\in I} \|f(i)\|$. Entonces $\prod_{i\in I} A_i$ es un álgebra de Banach (respectivamente: $*$-álgebra de Banach, C^*-álgebra).

Suma directa

$$\bigoplus A_i := \left\{ f \in \prod_{i\in I} A_i : \text{ dado } \varepsilon > 0,\ \exists F \subseteq I \text{ finito} \,/\, \|f(i)\| < \varepsilon \text{ para todo } i \notin F \right\}.$$

Entonces $\bigoplus_{i\in I} A_i$ es un ideal (ver 1.1.12) cerrado de $\prod_{i\in I} A_i$, así que es un álgebra de Banach. Si cada A_i es una $*$-álgebra de Banach (C^*-álgebra) entonces $\bigoplus_{i\in I} A_i$ es un álgebra de Banach (C^*-álgebra).

Adjunción de la unidad

Sea A un álgebra. Definimos $\tilde{A} := A \oplus \mathbb{C}$ como espacio vectorial y sobre $\tilde{A}$ definimos el producto

$$\begin{aligned} \tilde{A} \times \tilde{A} &\to \tilde{A} \\ (a+\alpha, b+\beta) &\mapsto (ab+\alpha b+\beta a)+\alpha\beta \end{aligned}$$

Entonces $\tilde{A}$ es un álgebra con unidad, la cual es $0+1$:

$$\begin{aligned} (a+\alpha)(0+1) &= a0+\alpha 0+1a+\alpha 1 = a+\alpha, \\ (0+1)(a+\alpha) &= 0a+1a+0\alpha+1\alpha = a+\alpha. \end{aligned}$$

Observar que si A tiene unidad, ésta no está relacionada con la unidad de $\tilde{A}$. Si además A es un álgebra normada se define sobre $\tilde{A}$ la siguiente norma: $\|a+\alpha\| := \|a\|+|\alpha|$. Entonces $(\tilde{A}, \| \ \|)$ es un álgebra de Banach. Además tenemos que:

$$\begin{aligned} \|(a+\alpha)(b+\beta)\| = \|ab+\alpha b+\beta a+\alpha\beta\| &= \|ab+\alpha b+\beta a\|+|\alpha\beta| \\ &\leq \|ab\|+|\alpha|\|b\|+|\beta|\|a\|+|\alpha||\beta| \\ &\leq (\|a\|+|\alpha|)(\|b\|+|\beta|) = \|a+\alpha\|+\|b+\beta\|. \end{aligned}$$

Entonces $\tilde{A}$ es un álgebra normada. Si A es una $*$-álgebra entonces $\tilde{A}$ también es una $*$-álgebra si se define $(a+\alpha)^* := a^*+\bar{\alpha}$. Si A es una $*$-álgebra de Banach, $\tilde{A}$ también lo es. Si A es una C^*-álgebra entonces $\tilde{A}$ no es C^*-álgebra en general (para que lo sea es necesario cambiar la norma por otra equivalente: ver la Proposición 2.1.11).

Ejemplo 1.1.10. Si $A = \mathbb{C}$ entonces $(\mathbb{C}, | \ |)$ es una C^*-álgebra. Pero $\mathbb{C}^2$ con la norma $\|(\alpha,\beta)\|_1 = |\alpha|+|\beta|$ no lo es.

Notar que A es un ideal bilateral cerrado de $\tilde{A}$, que es maximal ($A\tilde{A} \subseteq A \supseteq \tilde{A}A$, $\bar{A} = A$ y $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\tilde{A}}{A} = 1$).

Si $\varphi : A \to B$ es un homomorfismo de álgebras, se define $\tilde{\varphi} : \tilde{A} \to \tilde{B}$ como $\tilde{\varphi}(a+\alpha) := \varphi(a)+\alpha$. Entonces $\tilde{\varphi}$ es un homomorfismo unital de álgebras que extiende a φ. Veamos que $\tilde{\varphi}$ lleva la unidad en la unidad: $\tilde{\varphi}(0+1) = \varphi(0)+1 = 0+1$. Si φ es acotado entonces $\tilde{\varphi}$ también lo es (demostrarlo). Con algunas verificaciones rutinarias más, se concluye en definitiva que las asignaciones: $A \mapsto \tilde{A}$, $(\varphi : A \to B) \mapsto (\tilde{\varphi} : \tilde{A} \to \tilde{B})$ constituyen un functor de la categoría de las álgebras de Banach en la categoría de las álgebras de Banach con unidad.

Ejemplo 1.1.11. Sea $A = C_0(\mathbb{R})$ con la norma $\| \ \|_\infty$. En este caso $\tilde{A}$ se identifica con el álgebra de Banach:

$$B := \left\{ b : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ continua} / \ \exists b_\infty \in \mathbb{C} \text{ tal que } \lim_{x\to\pm\infty} b(x) = b_\infty \right\},$$

con $\|b\| := \|b-b_\infty\|+|b_\infty|$, a través del isomorfismo $\phi : B \to \tilde{A}$ dado por $\phi(b) = (b-b_\infty, b_\infty)$. Es claro que ϕ es un homomorfismo sobreyectivo. Veamos la inyectividad: si b es tal que $\phi(b) = (0,0)$, entonces $b_\infty = 0$ y $b-b_\infty = 0$. Luego es $b = b_\infty = 0$.

Más en general supongamos que X es un espacio localmente compacto y de Hausdorff, no compacto, y sea X^+ su compactificación de Alexandroff. Es decir: $X^+ = X \cup \{\infty\}$ con $\infty \notin X$, y la topología de X^+ es la topología generada por la topología de X y $\{X^+ \setminus K : \ K \subseteq X \text{ compacto}\}$. Entonces X^+ es compacto y de Hausdorff, y $\widetilde{C_0(X)} \cong C(X^+)$.

1.1.2. Ideales y Cocientes

Definición 1.1.12. Si A es un álgebra e I es un subespacio vectorial de A, se dice que I es un *ideal a izquierda* (*derecha, bilateral*) de A si $AI \subseteq I$ (respectivamente $IA \subseteq I$, $AI + IA \subseteq I$).

Observación 1.1.13. Si A es un álgebra e I es un ideal bilateral, entonces $\frac{A}{I}$ es un álgebra. Si A es una $*$-álgebra e $I^* = I$, entonces A/I es una $*$-álgebra con $(a + I)^* = a^* + I$.

Si A es un álgebra normada (de Banach) e I es un ideal bilateral cerrado en A entonces A/I es un álgebra normada (de Banach) con la norma

$$\|a + I\| := \text{ distancia}(a, I) = \text{ínf}\{\|a - x\| : \ x \in I\}.$$

En efecto, tenemos que A/I es un álgebra y A/I es un espacio normado (de Banach), por resultados conocidos de álgebra y de análisis funcional. Por otro lado:

$$\begin{aligned}\|(a + I)(b + I)\| &= \|ab + I\| = \text{ínf}\{\|ab - x\| : \ x \in I\} \leq \text{ínf}\{\|(a - y)(b - z)\| : \ y, z \in I\} \\ &\leq \text{ínf}\{\|a - y\| \, \|b - z\| : \ y, z \in I\} = \text{ínf}\{\|a - y\| : \ y \in I\} \, \text{ínf}\{\|b - z\| : \ z \in I\} \\ &= \|a + I\| \, \|b + I\|.\end{aligned}$$

Entonces es A/I es un álgebra normada (de Banach). La proyección canónica es un homomorfismo de álgebras normadas.

Proposición 1.1.14. Si A es una $*$-álgebra de Banach e $I = I^*$ es un ideal cerrado en A. Entonces A/I es una $*$-álgebra de Banach.

Definición 1.1.15. Si A es un anillo e I es un ideal de A, se dice que I es *regular* (o modular) si A/I tiene unidad. Equivalentemente: existe $u \in A$ tal que $a - au$, $a - ua \in I$ para todo $a \in A$.

NOTACIÓN: $I \lhd A$ indicará que el ideal I es bilateral y cerrado en A.

Ejemplos 1.1.16.

1. Si $A \ni 1$ entonces todo ideal es regular.

2. A es regular en $\tilde{A}$ porque $\frac{\tilde{A}}{A} \cong \mathbb{C}$.

3. Sea $A = C_0((0, 1])$; en este caso A no tiene unidad. Dado $\alpha \in (0, 1)$ sea $I_\alpha := \{a \in A : a|_{[\alpha,1]} = 0\}$. Entonces $I_\alpha \lhd A$ es regular. Basta tomar u de la siguiente manera:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [\alpha, 1], \\ \frac{t}{\alpha} & \text{si} \quad t \in (0, \alpha). \end{cases}$$

Entonces $u \in A$ y verifica que $(a - au)|_{[\alpha,1]} = 0$ para todo $a \in A$.

Proposición 1.1.17. Si I es un ideal regular propio de A, entonces existe un ideal regular R en A tal que

1. $I \subseteq R \subsetneq A$.
2. Si J es un ideal regular propio de A tal que $J \supseteq R$ entonces $J = R$.

Todo ideal regular, maximal con dicha propiedad, es un ideal maximal.

Demostración. Como $\frac{A}{I}$ es un anillo con unidad existe un ideal maximal M de $\frac{A}{I}$. Sea $R \subseteq A$ la preimagen de M por la proyección canónica. Entonces $I \subseteq R$ y R es un ideal propio de A. Como $\frac{A}{I}$ tiene unidad y $\frac{A}{R} \cong \frac{A/I}{R/I}$, tenemos que $\frac{A}{R}$ también tiene unidad. Entonces R es regular.

Sea ahora J un ideal regular propio de A, tal que $R \subseteq J$. Entonces tenemos que $M = \pi(R) \subseteq \pi(J)$. Como M es maximal y J es propio es $M = \pi(J)$. Luego $J = R$.

Sea R regular maximal y sea J ideal propio de A tal que $R \subseteq J$ Como $A/J \cong \frac{A/R}{J/R}$ y $\frac{A}{R}$ tiene unidad, J es regular. Por la maximalidad de R entre los regulares tenemos que $J = R$. Entonces R es un ideal maximal de A. □

Ejemplo 1.1.18. Sea $A = C_0((0,1])$ e $I_\alpha = \{a \in A : \ a|_{[\alpha,1]} = 0\}$. Entonces I_1 es regular maximal e $I_\alpha \subseteq I_1$.

Ejercicio 4. Sean $A(\mathbb{D})$ el álgebra del disco y $\varphi, \psi : A(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$ dadas por $\varphi(a) = a(0)$, $\psi(a) = a'(0)$. Mostrar que $A := \ker \varphi$ es un ideal sin unidad de $A(\mathbb{D})$, y que $B := \ker \psi$ es una subálgebra cerrada con unidad de $A(\mathbb{D})$. Mostrar $I := A \cap B$ es un ideal maximal de A que no es modular.

Definición 1.1.19. Sea A un anillo, se define el *radical (de Jacobson)* de A como

$$\mathrm{rad}(A) := \cap\{M \lhd A / \ M \text{ regular maximal}\}.$$

Si A no tiene ideales regulares maximales, entonces $\mathrm{rad}(A) := A$.
Si $\mathrm{rad}(A) = 0$ se dice que A es *semisimple*.

Observación 1.1.20. $\frac{A}{\mathrm{rad}(A)}$ es semisimple.

1.2. Teoría espectral

Estudiaremos los elementos invertibles de un álgebra de Banach.

Definición 1.2.1. Sea A un álgebra de Banach con unidad. Se dice que $a \in A$ es *invertible* si existe $b \in A$ tal que $ab = 1 = ba$. En este caso b se llama *inverso* de a y se denota a^{-1}.

$$\mathrm{Inv}(A) := \{a \in A \ / \text{ es invertible}\}.$$

Observación 1.2.2. $\mathrm{Inv}(A)$ es un grupo con la multiplicación de A.

Ejemplos 1.2.3.

(1) $\mathrm{Inv}(C([0,1])) = \{f \in C([0,1]) : 0 \notin \mathrm{Im}(f)\}$.

(2) $\mathrm{Inv}(M_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C}) = \{M \in M_n(\mathbb{C}) : \det(M) \neq 0)\}$.

(3) Sea E un espacio de Banach, y considérese el álgebra de Banach $B(E)$. Si $T \in B(E)$, se tiene que
$$\sigma_{B(E)}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ no es inyectivo o no es sobreyectivo}\}$$
porque del teorema de la aplicación abierta se deduce que si $T \in B(E)$ es biyectivo, entonces $T^{-1} \in B(E)$.

Teorema 1.2.4. Sea A un álgebra de Banach con unidad.

(i) Si $a \in A$ tal que $\|1-a\| < 1$ entonces $a \in \mathrm{Inv}(A)$, y $a^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(1-a)^n$.

(ii) $\mathrm{Inv}(A)$ es abierto en A; más precisamente, si $a \in \mathrm{Inv}(A)$ entonces
$$B\left(a, \frac{1}{\|a^{-1}\|}\right) \subseteq \mathrm{Inv}(A).$$

(iii) $\mathrm{Inv}(A)$ es un grupo topológico.

Demostración. (i) Como $\|1-a\| < 1$ tenemos que $\sum_{n=0}^{\infty}\|(1-a)^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\|1-a\|^n < \infty$. Entonces $\sum_{n=0}^{\infty}(1-a)^n$ converge en A. Sea $b = \sum_{n=0}^{\infty}(1-a)^n$. Entonces:
$$ab = (1-(1-a))(\lim_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{k}(1-a)^j) = \lim_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{k}(1-a)^j - \sum_{j=0}^{k}(1-a)^{j+1} = \lim_{k\to\infty} 1-(1-a)^{k+1} = 1.$$

Por lo tanto $ab = 1$, y de igual forma tenemos que $ba = 1$.

(ii) Sea $b \in B\left(a, \frac{1}{\|a^{-1}\|}\right)$, entonces $b = a - (a-b) = a(1-(a^{-1}(a-b)))$. Ahora tenemos que
$$\|a^{-1}(a-b)\| \leq \|a^{-1}\|\|a-b\| < \|a^{-1}\|\frac{1}{\|a^{-1}\|} = 1.$$

Entonces aplicando (i) $1 - a^{-1}(a-b) \in \mathrm{Inv}(A)$. Como $\mathrm{Inv}(A)$ es un grupo se deduce que $b = a(1-a^{-1}(a-b)) \in \mathrm{Inv}(A)$.

(iii) Como A es un álgebra de Banach tenemos que el producto es continuo. Hay que probar que $a \mapsto a^{-1}$ es continuo.
Sea $a \in \mathrm{Inv}(A)$ y $b \in B\left(a, \frac{1}{\|a^{-1}\|}\right)$. Entonces, como $b = a(1-a^{-1}(a-b))$, se tiene que $b^{-1} = (1-a^{-1}(a-b))^{-1}a^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}[a^{-1}(a-b)]^n a^{-1}$.

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\|b^{-1} - a^{-1}\| &= \left\| \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(a^{-1}(a-b) \right)^n - 1 \right) a^{-1} \right\| \\
&\leq \|a^{-1}\| \sum_{n=1}^{\infty} \|a^{-1}(a-b)\|^n = \|a^{-1}\| \frac{\|a^{-1}(a-b)\|}{1 - \|a^{-1}(a-b)\|} \\
&\leq \frac{\|a-b\| \|a^{-1}\|^2}{1 - \|a^{-1}(a-b)\|} \to 0 \text{ si } b \to a.
\end{aligned}$$

Entonces $\lim_{b \to a} \|b^{-1} - a^{-1}\| = 0$. Luego la inversión es continua.

□

Corolario 1.2.5. Si un subespacio I_0 de un álgebra de Banach con unidad A es un ideal propio de A en el sentido algebraico, entonces $\bar{I}_0$ es un ideal propio de A.

Demostración. La continuidad de las operaciones de A implican fácilmente que $\bar{I}_0$ es un ideal de A. Como $B(1,1)$ es abierto y $B(1,1) \cap I_0 = \emptyset$, entonces también es $B(1,1) \cap \bar{I}_0 = \emptyset$. □

Ejercicio 5. Sea A un álgebra de Banach con unidad. Sean $G := \mathrm{Inv}(A)$ y G_0 la componente conexa de G que contiene a la unidad. Probar que G_0 es un subgrupo normal abierto y cerrado de G, que las componentes conexas de G son exactamente las coclases de G_0 en G, y que $\Lambda_A := G/G_0$ es un grupo discreto. El grupo Λ_A se llama *grupo del índice abstracto* del álgebra A.

Definición 1.2.6. Sean A un álgebra y $a \in A$. El *espectro* de a en A se define como:

(i) si A tiene unidad: $\sigma_A(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ a - \lambda \notin \mathrm{Inv}(A)\}$;

(ii) si A no tiene unidad: entonces $\sigma_A(a) := \sigma_{\widetilde{A}}(a)$.

Observación 1.2.7.

(1) Si $A \not\ni 1$ entonces $0 \in \sigma_A(a)$ para todo $a \in A$. En este caso $\sigma_A(a) = \sigma_{\widetilde{A}}(a)$, y si $a + \lambda \in \mathrm{Inv}(\widetilde{A})$ entonces $\lambda \neq 0$.

(2) Si $A \ni 1$ entonces $\sigma_A(1) = \{\lambda : \ 1 - \lambda \notin \mathrm{Inv}(A)\} = \{1\}$.

(3) Si $A \ni 1$ entonces $\sigma_A(a + \lambda) = \sigma(a) + \lambda = \{\alpha + \lambda : \ \alpha \in \sigma_A(a)\}$ ($\alpha \in \sigma_A(a + \lambda)$ sii $a + (\lambda - \alpha) \notin \mathrm{Inv}(A)$ sii $\alpha - \lambda \in \sigma_A(a)$ sii $\alpha \in \lambda + \sigma_A(a)$).

(4) $\sigma_A(\lambda a) = \lambda \sigma_A(a)$.

Proposición 1.2.8. Si $\varphi : A \to B$ es un homomorfismo unital entre álgebras con unidad, entonces $\sigma_B(\varphi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$.

Demostración. Si $\lambda \notin \sigma_A(a)$, entonces existe $b \in A$ tal que $b(a - \lambda) = (a - \lambda)b = 1$. Entonces $1 = \varphi(1) = \varphi(b)\varphi(a - \lambda) = \varphi(b)(\varphi(a) - \lambda) = (\varphi(a) - \lambda)\varphi(b)$, de donde $\varphi(a) - \lambda \in \mathrm{Inv}(B)$, y por lo tanto $\lambda \notin \sigma_B(\varphi(a))$. □

Corolario 1.2.9. Si A es un álgebra de Banach con unidad y $h : A \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo no nulo, entonces $h(a) \in \sigma(a)$, $\forall a \in A$.

Demostración. Extendiendo h a un homomorfismo definido en $\tilde{A}$ si fuera necesario, se puede suponer que A y h son unitales. Por lo tanto, de acuerdo a 1.2.8: $h(a) \in \sigma_{\mathbb{C}}(h(a)) \subseteq \sigma(a)$. □

Proposición 1.2.10. Supongamos que A es una subálgebra conmutativa de un álgebra de Banach B con unidad, que es maximal con esta propiedad. Si $a \in A$, entonces $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

Demostración. Observar en primer lugar que $\bar{A}$ es una subálgebra conmutativa que contiene a A, y como esta es maximal con respecto a dicha propiedad, se tiene entonces que $A = \bar{A}$. El mismo argumento muestra que A contiene a la unidad de B, pues la subálgebra generada por $A \cup \{1_B\}$ es conmutativa y contiene a A. Ya sabemos que $\sigma_B(a) \subseteq \sigma_A(a)$, para todo $a \in A$ pues $A \hookrightarrow B$ es un homomorfismo unital. Veamos ahora la otra inclusión. Supongamos que $\lambda \notin \sigma_B(a)$, de modo que existe $b \in B$ tal que $(a - \lambda)b = 1 = b(a - \lambda)$. Si $c \in A$, entonces $cb = b(a - \lambda)cb = bc(a - \lambda)b = bc$, de manera que b conmuta con todo elemento de A, y por lo tanto, utilizando una vez más la maximalidad de A, se concluye que $b \in A$. Luego es $\lambda \notin \sigma_A(a)$. □

Denotemos por $\mathbb{C}[X]$ el álgebra de polinomios en una variable, con coeficientes complejos. Si A es un álgebra con unidad y $a \in A$ es un elemento cualquiera, por la propiedad universal de $\mathbb{C}[X]$ existe un único homomorfismo unital $\tau : \mathbb{C}[X] \to A$ tal que $\tau(X) = a$. Por lo tanto si $p(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_n X^n \in \mathbb{C}[X]$, entonces $\tau(p(X)) = \alpha_0 + \alpha_1 a + \cdots + \alpha_n a^n$. En adelante pondremos $p(a)$ en lugar de $\tau(p(X))$.

Proposición 1.2.11. Si A es un álgebra con unidad y $p \in \mathbb{C}[X]$. Entonces

$$\sigma(p(a)) = p(\sigma(a)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Demostración. Si $w \in \mathbb{C}$ entonces $p(X) - w = \beta(X - r_1)(X - r_2)\cdots(X - r_n)$. Por lo tanto es $p(a) - w = \beta(a - r_1)(a - r_2)\cdots(a - r_n)$, ya que τ es un homomorfismo de álgebras. Los factores del miembro derecho de la igualdad anterior conmutan dos a dos, de modo que su producto será invertible sii cada uno de ellos es invertible. En otras palabras: $w \notin \sigma(p(a))$ sii $r_i \notin \sigma(a)$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces:

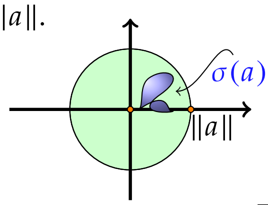
$$w \in \sigma(p(a)) \Leftrightarrow \text{ existe } i : \; r_i \in \sigma(a) \Leftrightarrow \text{ existe } r_i \in \sigma(a) : \; p(r_i) = w \Leftrightarrow \; w \in p(\sigma(a)).$$

□

Proposición 1.2.12. Si A es un álgebra de Banach y $a \in A$, entonces $\sigma(a)$ es compacto. Además $\sigma(a) \subseteq \bar{D}(0, \|a\|)$.

Demostración. Se puede suponer que A tiene unidad. Sea $\rho(a) := \mathbb{C} \backslash \sigma(a)$. El conjunto $\rho(a)$ se llama r e s o l v e n t e d e a. Entonces $\rho(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \; a - \lambda \in \mathrm{Inv}(A)\} = \Lambda_a^{-1}(\mathrm{Inv}(A))$, donde $\Lambda_a : \mathbb{C} \to A$ está dada por $\Lambda_a(\lambda) = a - \lambda$. Este mapa es continuo, y como $\mathrm{Inv}(A)$ es abierto,

$\Lambda_a^{-1}(\mathrm{Inv}(A))$ también lo es. Entonces $\sigma(a)$ es cerrado en $\mathbb{C}$. Sea $\lambda: \ |\lambda| > \|a\|$. Entonces $\|\frac{a}{\lambda}\| < 1$, así que $1 - \frac{a}{\lambda} \in \mathrm{Inv}(A)$, y por lo tanto $\lambda\left(1 - \frac{a}{\lambda}\right) \in \mathrm{Inv}(A)$ ya que $\lambda \neq 0$. Entonces $\lambda - a \in \mathrm{Inv}(A)$, de donde $\lambda \notin \sigma(a)$. Entonces tenemos que $\sigma(a) \subseteq \bar{D}(0, \|a\|)$. Luego $\sigma(a)$ es cerrado y acotado, y por lo tanto compacto.



□

El siguiente objetivo es demostrar que el espectro de un elemento es no vacío, resultado que es clave para el desarrollo ulterior de la teoría.

PRELIMINARES:

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ una región, A un espacio de Banach y $f : \Omega \to A$.

- f es *holomorfa* en Ω ($f \in \mathrm{Hol}(\Omega, A)$) si para todo $z_0 \in \Omega$ existe su derivada en z_0:

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in A.$$

- f es *analítica* en Ω si para todo $z_0 \in \Omega$ existen $\varepsilon > 0$ y $(a_n) \subseteq A$ tales que $B(z_0, \varepsilon) \subseteq \Omega$ y $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ para todo $z \in B(z_0, \varepsilon)$.

Teorema 1.2.13. $f \in \mathrm{Hol}(\Omega, A)$ si y sólo si f es analítica en Ω.

Este teorema se puede demostrar igual que en el caso $A = \mathbb{C}$. Los pasos serían entonces los siguientes:

(1) Definir integral de Riemann para $g \in C([a, b], A)$ (vale regla de Barrow, etc.). Esto está hecho más abajo en el *Ejercicio* 6, en el cual hay que completar los detalles.

(2) Definir $\int_\gamma f(z)dz$, donde $f \in \mathrm{Hol}(\Omega, A)$ y γ es una curva en Ω.

(3) Sea Γ un ciclo en Ω tal que $n(\Gamma, z) = 0, \forall z \notin \Omega$. Probar que valen:

- El *Teorema de Cauchy*: $\int_\Gamma f = 0$.
- La *fórmula de Cauchy*: si $z_0 \notin \Gamma^*$, entonces $n(\Gamma, z_0) f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$.

(4) El radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ está dado por $R = \dfrac{1}{\overline{\lim}(\|a_n\|)^{\frac{1}{n}}}$. Ver el *Ejercicio* 7.

Ejercicio 6. Desarrollar una teoría de integración de funciones definidas en un intervalo $[a, b]$ a valores en un espacio de Banach X. A tales efectos considérese el espacio de Banach $(B([a, b], X), \| \ \|_\infty)$ cuyos elementos son las funciones $f : [a, b] \to X$ tales que $\|f\|_\infty := \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\| < \infty$. Por ejemplo, si $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ es una partición de $[a, b]$, y $x_1, \ldots, x_n \in X$, entonces $f : [a, b] \to X$ tal que $t \mapsto \chi_{(a,t_1)}(t)x_1 + \chi_{(t_1,t_2)}(t)x_2 + \cdots + \chi_{(t_{n-1},b)}(t)x_n$, $\forall t \in [a, b] \setminus P$ es una función perteneciente a $B([a, b], X)$. Una función de este tipo se llama *función escalera*. El conjunto E de las funciones escalera es un subespacio vectorial de $B([a, b], X)$. Consideremos sobre E el mapa $\int : E \to X$ tal que si f tiene la expresión de arriba entonces $\int f := \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) x_i$. Es fácil ver que $\int f$ es independiente de la partición particular en la que está expresada f, y también que $\int$ es lineal. Por otro lado, teniendo en cuenta que $\max\{\|x_i\| : 1 \le i \le n\} = \|f\|_\infty$:

$$\| \int f \| = \| \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) x_i \| \le \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \|x_i\| \le (b-a) \|f\|_\infty.$$

Luego $\int$ es un operador acotado y $\| \int \| \le (b-a)$. Por lo tanto $\int$ tiene una extensión única a un operador acotado $\int$ sobre $R := \bar{E}$, el espacio de Banach de las funciones "regladas" (una definición directa de función reglada: f es reglada si en cada punto existen sus límites laterales). El espacio de funciones regladas es suficientemente interesante. Contiene por ejemplo a todas las funciones continuas. Notar que si $f \in R$, entonces $\| \int f \| \le (b-a)\|f\|_\infty$. Por otro lado, si Y es un espacio de Banach y $T : X \to Y$ es un operador acotado, entonces $\int Tf = T(\int f)$ $\forall f \in R$, ya que esto es trivialmente verdadero para $f \in E$. Advertimos al lector que en el caso particular $X = \mathbb{R}$ no se obtiene la integral de Riemann (no toda función integrable según Riemann es una función reglada), sino una integral algo menos general.

Sugerimos al lector que intente extender resultados conocidos a la integral recién definida: regla de Barrow, teorema fundamental del cáculo, cambios de variable, etc.

Ejercicio 7. Sea $\sum c_n (z-z_0)^n$ una serie de potencias con coeficientes c_n pertenecientes a un espacio de Banach E. Considérense los conjuntos:

$$C_1 = \{r \ge 0 : \sum \|c_n\| r^n < \infty\} \quad C_2 = \{r \ge 0 : \lim_n c_n r^n = 0\} \quad C_2 = \{r \ge 0 : \{c_n r^n\} \text{ está acotado.}\}$$

1. Probar que $C_1 \subseteq C_2 \subseteq C_3$, y que si $R_i = \sup C_i$, entonces $R_1 = R_2 = R_3$. Este supremo, que denotaremos por R se llama radio de convergencia de la serie.
2. Probar que $\sum c_n (z-z_0)^n$ converge uniformemente en todo compacto $K \subseteq D(z_0, R)$, y que $\sum c_n (z-z_0)^n$ no converge si $|z - z_0| > R$.
3. Demostrar que $R = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{\|c_n\|}}$.

Definición 1.2.14. Sean A un álgebra de Banach con unidad, y $a \in A$. La *función resolvente* de a es:

$$\mathsf{R}_a : \rho(a) \to A \ / \ \mathsf{R}_a(\lambda) = (\lambda - a)^{-1}.$$

Teorema 1.2.15. $\mathsf{R}_a \in \mathrm{Hol}(\rho(a), A)$ y $\lim_{\lambda \to \infty} \mathsf{R}_a(\lambda) = 0$.

Demostración. Sea $\lambda : |\lambda| > \|a\|$ entonces $\lambda \in \rho(a)$. Además:

$$\mathsf{R}_a(\lambda) = (\lambda - a)^{-1} = \left[\lambda\left(1 - \frac{a}{\lambda}\right)\right]^{-1} = \lambda^{-1}\left(1 - \frac{a}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^{n+1}}.$$

Entonces:

$$\|\mathsf{R}_a(\lambda)\| \le \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|a\|^n}{|\lambda|^n} = \frac{1}{|\lambda|} \frac{|\lambda|}{|\lambda| - \|a\|} = \frac{1}{|\lambda| - \|a\|} \longrightarrow 0 \text{ si } \lambda \to \infty.$$

Veamos ahora que R_a es analítica: sea $\lambda_0 \in \rho(a)$ y consideremos $D := D(\lambda_0, \|\mathsf{R}_a(\lambda_0)\|^{-1}) \subseteq \rho(a)$. Si $\lambda \in D$ tenemos que $\|(\lambda - a) - (\lambda_0 - a)\| = |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|(a-\lambda_0)^{-1}\|}$. Entonces $\lambda - a \in \mathrm{Inv}(A)$. Ahora $\lambda - a = (\lambda_0 - a) - [(\lambda_0 - a) - (\lambda - a)] = (\lambda_0 - a)[1 + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 - a)^{-1}]$, de modo que $\mathsf{R}_a(\lambda) = \left[1 - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 - a)^{-1}\right] \mathsf{R}_a(\lambda_0)$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\mathsf{R}_a(\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n \mathsf{R}_a(\lambda_0)^n \mathsf{R}_a(\lambda_0) \quad [(\lambda_0 - a)^{-1} = \mathsf{R}_a(\lambda_0)] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathsf{R}_a(\lambda_0)^{n+1} (\lambda - \lambda_0)^n, \text{ para todo } \lambda \in D \subseteq \rho(a).\end{aligned}$$

□

Teorema 1.2.16 (Gelfand). Si A es un álgebra de Banach y $a \in A$, entonces $\sigma(a)$ es compacto y no vacío.

Demostración. En la Proposición 1.2.12 se mostró que $\sigma(a)$ es compacto. Falta probar que es no vacío. Podemos suponer que $A \ni 1$. Si fuera $\sigma(a) = \emptyset$, entonces $\mathsf{R}_a \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C}, A)$ y es acotada, porque $\lim_{\lambda\to\infty} \mathsf{R}_a(\lambda) = 0$. Pero entonces, de acuerdo al Teorema de Liouville, R_a es constante, más exactamente $\mathsf{R}_a = 0$, ya que $\lim_{\lambda\to\infty} \mathsf{R}_a(\lambda) = 0$. Sin embargo $\mathrm{Im}(\mathsf{R}_a) \subseteq \mathrm{Inv}(A)$ lo que lleva a la contradicción $0 \in \mathrm{Inv}(A)$. Entonces es $\sigma(a) \neq \emptyset$. □

Ejemplo 1.2.17 (El shift bilateral). Sea $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ tal que $U\xi(n) = \xi(n-1)$, $\forall \xi \in \ell^2(\mathbb{Z})$, $n \in \mathbb{Z}$. El operador U es unitario, pues es una isometría invertible. Entonces $\|U\| = 1 = \|U^{-1}\|$, de donde $\sigma(U)$, $\sigma(U^{-1}) \subseteq \bar{D}(0,1)$ por la Proposición 1.2.12. Si $\lambda \in \sigma(U)$, entonces $\lambda \neq 0$ y

$$\lambda U(U^{-1} - \lambda^{-1}) = \lambda - U,$$

que no es invertible, de modo que $\lambda^{-1} \in \sigma(U^{-1})$. Por lo tanto $\lambda,\ \lambda^{-1} \in \bar{D}(0,1)$, de donde $\lambda \in S^1$. Entonces $\sigma(U) \subseteq S^1$.

Ahora, dado $w \in S^1$, considérese el operador $M_w : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ tal que

$$M_w \xi(n) = w^n \xi(n),\ \forall \xi,\ \forall n.$$

Entonces M_w es un operador unitario, cuyo inverso es $M_{\bar{w}}$. Por lo tanto el mapa $\alpha_w : B(\ell^2(\mathbb{Z})) \to B(\ell^2(\mathbb{Z}))$ dado por $\alpha_w(T) := M_w T M_{\bar{w}}$ es un automorfismo, y por lo tanto, de acuerdo a la Proposición 1.2.8, $\sigma(\alpha_w(T)) = \sigma(T)$, $\forall T \in B(\ell^2(\mathbb{Z}))$. Un cálculo directo muestra que $\alpha_w(U) = wU$, de modo que la observación anterior y la Proposición 1.2.11 implican que $\sigma(U) = \sigma(wU) = w\sigma(U)$. Entonces $\sigma(U)$ es invariante por rotaciones, y como $\sigma(U) \neq \emptyset$ por el Teorema 1.2.16 se concluye que $\sigma(U) = S^1$.

Teorema 1.2.18 (Mazur). Si A es una $\mathbb{C}$-álgebra normada con división, entonces $A = \mathbb{C} \cdot 1$.

Demostración. Sea $a \in A$. Por el Teorema de Gelfand existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $a - \lambda \notin \mathrm{Inv}(A)$, y como A es con división tenemos que $a = \lambda$, lo que concluye la prueba. □

Definición 1.2.19. Sean A un álgebra de Banach y $a \in A$. Se define el *radio espectral* de x como:

$$r(a) := \text{máx}\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Observación 1.2.20. De acuerdo a la Proposición 1.2.12 se tiene $r(x) \leq \|x\|$ pues $\sigma(x) \subset D(0, \|x\|)$. La desigualdad puede ser estricta, como muestra el siguiente ejemplo, cuya justificación es el Teorema 1.2.22 que lo sigue.

Ejemplo 1.2.21. Sea $\mathsf{V} : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ el operador de Volterra, dado por $\mathsf{V}_x(t) = \int_0^t x(s)ds$. Entonces $\mathsf{V} \neq 0$, mientras que $r(\mathsf{V}) = 0$ porque $\sigma(\mathsf{V}) = \{0\}$. Ver detalles en el libro de J. B. Conway, Example 6.14, page 211.

Teorema 1.2.22 (Beurling-Gelfand)**.** Si A es un álgebra de Banach y $a \in A$. Entonces

$$r(a) = \text{ínf}\, \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Demostración. Supondremos, sin perder generalidad, que $A \ni 1$. Como $\sigma(a^n) = \sigma(a)^n$ tenemos que $r(a^n) = r(a)^n$. Entonces $r(a) = r(a^n)^{\frac{1}{n}}$. Por lo tanto es $r(a) \leq \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ para todo n, de donde

$$r(a) \leq \text{ínf}\, \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \underline{\lim} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Por otro lado sea $\mathsf{S}_a : D\left(0, \frac{1}{r(a)}\right) \to A$ definida de la siguiente manera:

$$\mathsf{S}_a(\lambda) = \begin{cases} \mathsf{R}_a(\frac{1}{\lambda}) & \text{si } \lambda \neq 0, \\ 0 & \text{si } \lambda = 0. \end{cases}$$

Entonces $\mathsf{S}_a \in \text{Hol}\left(D\left(0, \frac{1}{r(a)}\right), A\right)$. Luego el desarrollo en serie de potencias de S_a alrededor de 0 tiene radio de convergencia no menor a $\frac{1}{r(a)}$. Para buscar este desarrollo, consideremos $\lambda \in D\left(0, \frac{1}{\|a\|}\right) \subseteq D\left(0, \frac{1}{r(a)}\right)$, $\lambda \neq 0$. Entonces, como $\|\lambda a\| < 1$,

$$\mathsf{S}_a(\lambda) = \mathsf{R}_a\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \left(\frac{1}{\lambda} - a\right)^{-1} = \lambda(1 - \lambda a)^{-1} = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \lambda^{n+1}.$$

Entonces el desarrollo de S_a alrededor de 0 es $\mathsf{S}_a(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \lambda^{n+1}$, y su radio de convergencia es $\geq \frac{1}{r(a)}$, es decir (ver el *Ejercicio* 7):

$$\frac{1}{\overline{\lim}(\|a^{n-1}\|)^{\frac{1}{n}}} \geq \frac{1}{r(a)}.$$

Luego $r(a) \geq \overline{\lim} \|a^{n-1}\|^{\frac{1}{n}} = \lim \|a\|^{\frac{1}{n}} \overline{\lim} \|a^{n-1}\|^{\frac{1}{n}} \geq \overline{\lim} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$, y por lo tanto $\overline{\lim} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(a) \leq \text{ínf}\, \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \underline{\lim} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$, lo que termina de probar que $r(a) = \lim_{n \to \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$. □

1.3. Espacio de Gelfand

TRANSFORMADAS DE FOURIER

El análisis de Fourier es una herramienta de investigación y de cálculo muy importante y potente en diversas áreas: ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones en derivadas parciales, probabilidad, etc.

La transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$.

Sea $A = L^1(\mathbb{R})$. Con el producto de convolución: $a*b = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} a(t-s)b(s)ds$, A es un álgebra de Banach conmutativa y sin unidad, incluso una $*$-álgebra de Banach con $a^*(t) := \overline{a(-t)}$. Dado $a \in L^1(\mathbb{R})$, sea $\widehat{a} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definido por

$$\widehat{a}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} a(s)e^{-its} ds.$$

La función $\widehat{a}$ es continua debido al teorema de convergencia dominada, y $\lim_{t\pm\infty} \widehat{a}(t) = 0$ por el lema de Riemann-Lebesgue. En otras palabras, $\widehat{a} \in C_0(\mathbb{R})$. Cálculos directos muestran además que $\|\widehat{a}\|_\infty \leq \|a\|_1$, $\widehat{(a*b)} = \widehat{a}\,\widehat{b}$, y $\widehat{a^*} = \overline{\widehat{a}}$, $\forall a, b \in A$. Por ejemplo, usando el teorema de Fubini y la invariancia por traslaciones de la medida de Lebesgue se tiene:

$$\widehat{(a*b)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} a*b(s)e^{-ist} ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} a(s-u)b(u)e^{-i(s-u)t} e^{-iut}\, du\, ds$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} a(v)e^{-ivt} dv \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} b(u)e^{-iut} du = \hat{a}(t)\,\hat{b}(t).$$

Entonces tenemos que $\mathcal{F}$ es un homomorfismo de $*$-álgebras de Banach:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) &\to C_0(\mathbb{R}) \\ a &\mapsto \widehat{a}, \end{aligned}$$

que se conoce como transformada de Fourier. Se puede pensar a $\mathcal{F}$ como una colección de homomorfismos $\left\{h_t : A \to \mathbb{C} : h_t(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} a(s)e^{-its} ds\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ que "varía de manera continua". Se puede probar que si h es un homomorfismo complejo no nulo de $L^1(\mathbb{R})$, entonces $h = h_t$ para algún $t \in \mathbb{R}$, que además es único. Cada h_t es la composición de la transformada de Fourier con la evaluación en t. Observar que $|h_t(a)| = |\widehat{a}(t)| \leq \|\widehat{a}\|_\infty \leq \|a\|_1$ para todo a. Entonces $\|h_t\| \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Además si $t_i \to t$ en $\mathbb{R}$ tenemos que $h_{t_i}(a) \to h_t(a)$ para todo $a \in L^1$ porque $\widehat{a}(t_i) \to \widehat{a}(t)$. Entonces $h_{t_i} \overset{\omega^*}{\to} h_t$, es decir, converge en la topología débil-$*$ del espacio $L^1(\mathbb{R})^* \cong L^\infty(\mathbb{R})$, dual de $L^1(\mathbb{R})$.

La transformada de Fourier en $L^1(S^1)$.

Al resolver ecuaciones en derivadas parciales por el método de separación de variables, es necesario desarrollar funciones en serie de Fourier. Para fijar ideas, supongamos que tenemos que buscar la serie de Fourier de $a \in L^1([0, 2\pi])$. Para eso es necesario calcular los coeficientes de Fourier de a:

$$\hat{a}(n) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(t)e^{-int}dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

La función $n \mapsto \hat{a}(n)$ se llama transformada de Fourier de a, y satisface $\text{lím}_{|n|\to\infty} \hat{a}(n) = 0$. Es fácil ver, por otro lado, que el mapa $a \mapsto \hat{a}(n)$ es un $*$-homomorfismo. El mapa $\mathcal{F} : L^1([0, 2\pi]) \to C_0(\mathbb{Z})$ tal que $a \mapsto \hat{a}$ se llama transformada de Fourier.

El espacio de Banach $L^1([0, 2\pi])$ es una $*$-álgebra de Banach con la involución $a \mapsto a^*$ dada por $a^*(n) := \overline{a(-n)}$, y el producto dado por la convolución $(a, b) \mapsto a * b$ dada por $a * b(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(t-s)b(s)ds$. Es fácil verificar que $\mathcal{F}$ es un homomorfismo de $*$-álgebras de Banach. Como en el caso de la transformada de Fourier en $\mathbb{R}$, podemos pensar la transformada de Fourier en $\mathbb{Z}$ como la colección de $*$-homomorfismos complejos $\{h_n : n \in \mathbb{Z}\}$, donde $h_n(a) := \hat{a}(n)$.

Notar que $L^1([0, 2\pi])$ se puede identificar con $L^1(S^1)$, donde se considera en S^1 la medida de Borel invariante por rotaciones y de norma 1, es decir, la medida dada por la longitud de arco normalizada para que tenga masa total igual a 1. En efecto, la transformación medible $\psi : [0, 2\pi] \to S^1$ dada por $\psi(t) = e^{it}$ permite identificar estas álgebras de Banach vía $L^1(S^1) \ni a \mapsto a \circ \psi \in L^1([0, 2\pi])$ (ver el *Ejercicio 8*). Entonces $\int_{S^1} a(z)dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(e^{it})dt, \forall a \in L^1(S^1)$. En particular

$$\hat{a}(n) = \widehat{a \circ \psi}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a \circ \psi(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(e^{it})(e^{it})^{-n}dt = \int_{S^1} a(z)z^{-n}dz.$$

$$\begin{aligned}(a \circ \psi) * (b \circ \psi)(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a \circ \psi(t-s) b \circ \psi(s)ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(e^{i(t-s)} b(e^{is})ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(e^{-is}e^{it})b(e^{is})ds = \int_{S^1} a(w^{-1}z)b(w)dw,\end{aligned}$$

donde $z = e^{it}$, $w = e^{is}$. Esto da la fórmula de la convolución en $L^1(S^1)$:

$$a * b(z) = \int_{S^1} a(w^{-1}z)b(w)dw.$$

Finalmente, es claro que la involución en $L^1(S^1)$ queda $a^*(z) = \overline{a(z^{-1})}$. Esta formulación en términos de $L^1(S^1)$ en lugar de $L^1([0, 2\pi])$ es más conveniente porque permite un tratamiento unificado de este ejemplo con el anterior (y el siguiente en términos del *an'alisis de Fourier en grupos conmutativos*).

Ejercicio 8. Supongamos que $\psi : (X, \mathcal{M}) \to (Y, \mathcal{N})$ es una transformación medible entre los espacios medibles $(X, \mathcal{M})$ e $(Y, \mathcal{N})$, y sea μ una medida definida en $\mathcal{M}$. El *push-out* de μ a través de ψ es el mapa ν definido en $\mathcal{N}$ como: $\nu(\Delta) := \mu(\psi^{-1}(\Delta))$. Comprobar que ν es una medida en $\mathcal{N}$. Probar que para toda $f : Y \to [0, \infty]$ medible se tiene que $\int_Y f d\nu \int_Y f \circ \psi d\mu$, y deducir que el mapa $f \mapsto f \circ \psi$ es un isomorfismo isométrico entre los espacios de Banach $L^1(\nu)$ y $L^1(\mu)$.

La transformada de Fourier en $\ell^1(\mathbb{Z})$.

Por último, consideremos la transformada de Fourier en el álgebra de Banach $A := \ell^1(\mathbb{Z})$). Las operaciones en $\ell^1(\mathbb{Z})$ son

- Convolución: $a * b(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a(n-m)b(m)$.
- Involución: $a^*(n) := \overline{a(-n)}$

Dados $a \in A$, $z \in S^1$ se define $\hat{a}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)z^{-n}$. El mapa $h_z : L^1(\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$ tal que $a \mapsto \hat{a}(z)$ es un homomorfismo de álgebras:

$$h_z(a*b) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a*b(n)z^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} a(n-m)b(m)z^{n-m}z^m = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)z^n \sum_{m\in\mathbb{Z}} b(m)z^m = h_z(a)h_z(b).$$

Análogamente a los ejemplos anteriores, estos h_z son todos los homomorfismos complejos no nulos de $\ell^1(\mathbb{Z})$. De forma similar se define entonces la transformada de Fourier $\mathcal{F} : \ell^1(\mathbb{Z}) \to C(S^1)$ como $\mathcal{F}(a) := \hat{a}$ (notar que $\mathcal{F}(\ell^1(\mathbb{Z})) = \mathcal{W}$, el álgebra de Wiener).

Ejercicio 9. Verificar que $L^1(R)$, $L^1(S^1)$ y $\ell^1(\mathbb{Z})$ son $*$-álgebras de Banach con las convoluciones e involuciones definidas en cada caso, y que la transformadas de Fourier correspondientes son, efectivamente, $*$-homomorfismos.

Como veremos a continuación, la teoría de Gelfand consiste en la extrapolación de estos ejemplos a las álgebras de Banach conmutativas.

Proposición 1.3.1. Sea B un álgebra de Banach. Si $h : B \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo de álgebras, entonces $\|h\| \leq 1$. Además si $h \neq 0$ y B tiene unidad, entonces $h(1) = 1$ y $\|h\| = 1$.

Demostración. Obsérvese antes que nada que si B tiene unidad entonces $h(1) = h(1^2) = h(1)h(1)$, y por lo tanto $h(1) = 0$ o $h(1) = 1$. Si fuera $h(1) = 0$ entonces $h(a) = h(a)h(1) = 0$ para todo $a \in B$, de modo que $h = 0$. Si $h \neq 0$ debe ser $h(1) = 1$ y por lo tanto $\|h\| \geq 1$.

Se puede suponer que B tiene unidad. En efecto, si no la tuviera podríamos extender h a un homomorfismo $\tilde{h} : \widetilde{B} \to \mathbb{C}$ de la única forma posible: $\tilde{h}(b+\lambda) = h(b) + \lambda$. Si se probara la tesis para álgebras con unidad se tendría que $\|\tilde{h}\| \leq 1$, y como $\|h\| \leq \|\tilde{h}\|$, se deduciría también para álgebras sin unidad.

Supongamos pues que $\|h\| > 1$. Entonces existe $b \in B$ tal que $|h(b)| > \|b\|$, es decir $\left\|\frac{b}{h(b)}\right\| < 1$. Luego $c := 1 - \frac{b}{h(b)} \in \mathrm{Inv}(B)$, de modo que

$$1 = h(1) = h(c)h(c^{-1}) = \left(h(1) - h\left(\frac{b}{h(b)}\right)\right)h(c^{-1}) = (1-1)h(c^{-1}) = 0.$$

Así que no puede ser $\|h\| > 1$, y por lo tanto $\|h\| \leq 1$ como se había afirmado. □

Corolario 1.3.2. Si B es un álgebra de Banach y $h : B \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo no nulo, entonces $\ker h$ es un ideal regular maximal cerrado de B.

En realidad los ideales regulares maximales son siempre cerrados:

Lema 1.3.3. La clausura de un ideal modular propio M de un Ãąlgebra de Banach B es tambiÃĺn modular propio. Todo ideal modular maximal de un álgebra de Banach es cerrado.

Demostración. Sea $u \in A$ tal que $u + M = 1_{B/M}$. Entonces $b - bu \in M, \forall b \in B$. Supongamos que $x \in M$ es tal que $\|u - x\| < 1$. Entonces $c := 1 - u + x \in \operatorname{Inv}(\tilde{B})$, y por lo tanto

$$B = Bc = \{b - bu + bx : b \in B\} \subseteq M.$$

Como M es propio, no puede existir un tal x, es decir: $\|u - x\| \geq 1, \forall x \in M$. Esto implica que $u \notin \bar{M}$, y por lo tanto $\bar{M}$ es propio.

La segunda afirmación es consecuencia directa de la primera. □

Definición 1.3.4. Si A es un álgebra sobre $\mathbb{C}$, un homomorfismo complejo $h : A \to \mathbb{C}$ no nulo se llama *carácter* de A.

Proposición 1.3.5. Sea A un álgebra de Banach conmutativa. Entonces el mapa $h \mapsto \ker(h)$ es una biyección entre el conjunto de caracteres de A y el conjunto de ideales regulares maximales de A.

Demostración. Sea h un carácter de A. Entonces $h(A) = \mathbb{C}$. Luego $\frac{A}{\ker(h)} \cong \mathbb{C}$ como álgebras. Por lo tanto $\ker(h)$ es un ideal cerrado maximal y regular (porque $\mathbb{C}$ tiene unidad).

Recíprocamente, sea M un ideal regular maximal. Entonces $\frac{A}{M}$ es un álgebra conmutativa con unidad sin ideales no triviales. Entonces $\frac{A}{M}$ es un cuerpo y un álgebra sobre los complejos. Como M es un ideal regular maximal, por el Lema 1.3.3 se tiene que $M = \bar{M}$, y por lo tanto $\frac{A}{M}$ es también un álgebra normada. Luego, por el Teorema de Mazur (teorema 1.2.18), debe ser $\frac{A}{M} \cong \mathbb{C}$. Sea $\varphi_M : \frac{A}{M} \to \mathbb{C}$ el (único) isomorfismo posible. Entonces $M = \ker(h_M)$ donde $h_M = \varphi_M \circ \pi$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "h_M"'] & \frac{A}{M} \arrow[d, "\varphi_M"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Como φ_M es un isomorfismo y π es sobreyectiva tenemos que h_M es no nulo. Entonces $h \mapsto \ker(h)$ es sobreyectivo. Veamos ahora que es inyectivo. Sean g y h caracteres tales que $\ker(g) = \ker(h)$. Si $u \in A$ es tal que $a - au \in \ker g = \ker h, \forall a \in A$, entonces debe ser $g(u) = 1 = h(u)$. Luego si $a \in A$ y λ es el único número complejo tal que $a - \lambda u \in \ker h = \ker g$, se tiene que

$$g(a) = g(a - \lambda u) + g(\lambda u) = 0 + \lambda = h(a - \lambda u) + h(\lambda u) = h(a).$$

□

Definición 1.3.6. Sea A un álgebra de Banach conmutativa. Se llama *espectro* o *espacio de Gelfand* de A al espacio topológico $(\widehat{A}, w^*)$, donde

$$\widehat{A} = \{h : A \to \mathbb{C} \ / \ h \text{ es un homomorfismo no nulo}\}$$

y w^* es la topología débil-$*$.

RECORDAR:

Si E es un espacio de Banach y $E^* = B(E, \mathbb{C})$ es su espacio dual, la topología w^* (débil-$*$) sobre E^* es la topología vectorial generada por la familia de seminormas $\{p_x : \ x \in E\}$ donde $p_x(\varphi) = |\varphi(x)|$ para todo $x \in E$, $\varphi \in E^*$. La convergencia en esta topología queda caracterizada de la siguiente manera: $\varphi_i \xrightarrow{w^*} \varphi$ si y sólo si $\varphi_i(x) \to \varphi(x)$ para todo $x \in E$.

Teorema 1.3.7 (Alaoglu). $\left(\bar{B}(0,1), w^*\right)$ es compacto.

Teorema 1.3.8. Si E es separable entonces $\left(\bar{B}(0,1), w^*\right)$ es metrizable (y en consecuencia separable, porque los espacios métricos compactos son separables).

Teorema 1.3.9. Sea A un álgebra de Banach conmutativa. Entonces

(1) $\overline{\widehat{A}}^{w^*} \subseteq \widehat{A} \cup \{0\}$.

(2) $\widehat{A}$ es localmente compacto y de Hausdorff.

(3) Si A tiene unidad, entonces $\widehat{A}$ es compacto.

(4) Si A es separable, entonces $\widehat{A}$ es metrizable y separable.

Demostración. Sea $h \in \overline{\widehat{A}}^{w^*}$. Entonces existe una red $(h_i) \subseteq \widehat{A}$ tal que $h_i \xrightarrow{w^*} h$. Luego $h(ab) = \lim_i h_i(ab) = \lim_i h_i(a)h_i(b) = h(a)h(b)$. Entonces $h : A \to B$ es un homomorfismo, y por lo tanto $h \in \widehat{A}$ o $h = 0$. Entonces $\overline{\widehat{A}}^{w^*} = \widehat{A}$ o $\overline{\widehat{A}}^{w^*} = \widehat{A} \cup \{0\}$, como se afirma en (1). Como $\overline{\widehat{A}}^{w^*}$ es cerrado y está contenido dentro del compacto $\bar{B}(0,1)$, es él mismo compacto. Por el cálculo anterior se tiene que, o bien $\widehat{A} = \overline{\widehat{A}}^{w^*}$, o bien $\widehat{A} = \overline{\widehat{A}}^{w^*} \setminus \{0\}$. En el primer caso se tiene que $\widehat{A}$ es compacto, y en el segundo que es localmente compacto, lo que prueba la segunda afirmación.

En el caso en que A tenga unidad, se tiene que $\widehat{A}$ es cerrado, pues si $h_i \to h$, con $h_i \in \widehat{A}$, entonces h es un homomorfismo tal que $h(1) = \lim_i h_i(1) = 1$, de modo que $h \in \widehat{A}$. De esto se concluye la tercera afirmación. Por último, si A es separable se tiene por 1.3.8 que $\bar{B}(0,1)$ es metrizable y separable. Como $\widehat{A} \subset \bar{B}(0,1)$ tenemos que $\widehat{A}$ es metrizable y separable. $\square$

Observación 1.3.10. Notar que $\widehat{A} \neq \emptyset$ sii A admite algún ideal modular. Esto ocurre por ejemplo si A tiene unidad. Si A es un álgebra de Banach con producto nulo, entonces $\widehat{A} = \emptyset$.

Corolario 1.3.11. El mapa $\hat{\tilde{A}} \to \hat{A} \cup \{0\}$ dado por $\tilde{h} \mapsto \tilde{h}|_A$ es un homeomorfismo. Por lo tanto $\hat{\tilde{A}}$ es la compactificación con un punto de $\hat{A}$.

Demostración. Si X es un espacio compacto de Hausdorff y $p \in X$, entonces X es la compactificación con un punto de $X \setminus \{p\}$. En consecuencia $\hat{A} \cup \{0\}$ es la compactificación con un punto de $\hat{A}$, ya que, como se vio en la demostración de 1.3.9, $\hat{A} \cup \{0\}$ es compacto. Si $\tilde{h} \in \hat{\tilde{A}}$, entonces $\tilde{h}|_A : A \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo, así que o bien es nulo o bien pertenece a $\hat{A}$. Recíprocamente, si $h : A \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo, entonces $\tilde{h} : \tilde{A} \to \mathbb{C}$, tal que $\tilde{h}(a + \lambda) = h(a) + \lambda$, es un homomorfismo no nulo de $\tilde{A}$. Es claro que las correspondencias $\tilde{h} \mapsto \tilde{h}|_A$ y $h \mapsto \tilde{h}$ son inversas entre sí. Además, si $\tilde{h}_i, \tilde{h} \in \hat{\tilde{A}}$, entonces

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_i \to \tilde{h} &\iff \tilde{h}_i(a + \lambda) \to \tilde{h}(a + \lambda), \forall a + \lambda \in \tilde{A} \\
&\iff \tilde{h}_i(a) + \lambda \to \tilde{h}(a) + \lambda, \forall a \in A, \lambda \in \mathbb{C} \\
&\iff \tilde{h}_i(a) \to \tilde{h}(a), \forall a \in A \\
&\iff \tilde{h}_i|_A \to \tilde{h}_A
\end{aligned}$$

de donde $\tilde{h} \mapsto \tilde{h}_A$ es un homeomorfismo. □

Ejemplo 1.3.12. Considérese el álgebra de Banach $A = (C_0(X), \| \|_\infty)$, donde X es un espacio de Hausdorff localmente compacto. Entonces $\widehat{A} = X$. Con más precisión: dado $x \in X$ sea $\delta_x : A \to \mathbb{C}$ tal que $\delta_x(a) = a(x)$, $\forall a \in A$; entonces el mapa $\delta : X \to \widehat{A}$ tal que $\delta(x) = \delta_x$ es un homeomorfismo. En efecto, por un lado está claro que $\delta_x \in \widehat{A}$, $\forall x \in X$, y como A separa los puntos de X como consecuencia del Lema de Urysohn, entonces δ es inyectiva. Apelando de nuevo al Lema de Urysohn se ve que $x_i \to x$ en X si y sólo si $a(x_i) \to a(x)$, $\forall a \in A$, es decir, $x_i \to x$ en X si y sólo si $\delta_{x_i} \to \delta_x$ en $\widehat{A}$. Por lo tanto sólo queda mostrar que δ es sobreyectiva.

Supongamos que $h : A \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo de álgebras tal que $h \neq \delta_x$ $\forall x \in X$. Recordar que $C_c(X) := \{b \in C_0(X) : b \text{ tiene soporte compacto}\}$ es una subálgebra densa de A. Probaremos que $h = 0$ mostrando que $C_c(X) \subseteq \ker h$. A tales efectos comenzaremos mostrando que para cada subconjunto compacto K de X existe $a_K \in \ker h$ tal que $a_K(x) = 1$, $\forall x \in K$. Supongamos pues que $K \subseteq X$ es compacto. Para cada $x \in K$ existen $a_x \in \ker h$ y un entorno V_x de x tales que $a_x(y) \neq 0$, $\forall y \in V_x$. Como $|a_x|^2 = a_x \bar{a}_x$ y $\ker h$ es un ideal, podemos suponer además que $a_x \geq 0$. La familia $\{V_x : x \in K\}$ cubre el compacto x, y por lo tanto hay un subcubrimiento finito $\{V_{x_1}, \dots, V_{x_n}\}$. Sea $b_K := \sum_{j=1}^n a_{x_j}$. Entonces $b_K \in \ker h$ y existe $m > 0$ tal que $b_K(y) \geq m$, $\forall y \in K$. Como $b_K \in A$, el conjunto $K' := \{x \in X : b_K(x) \geq m\}$ es un compacto que contiene a K. Definamos $c_K : X \to \mathbb{C}$ como: $c_K(x) = \begin{cases} \frac{m}{b_K(x)} & \text{si } x \in K' \\ \frac{b_K(x)}{m} & \text{si } x \notin K' \end{cases}$. Entonces $c_K \in A$. Sea $a_K := \frac{1}{m} b_K c_K$. Entonces $a_K \in \ker h$, y si $x \in K$ entonces $a_K(x) = 1$. Finalmente, si $a \in C_c(X)$, sean K el soporte de a y $a_K \in \ker h$ un elemento de $\ker h$ como el que acabamos de construir. Entonces $a = aa_K \in \ker h$. Luego $C_c(X) \subseteq \ker h$, y por lo tanto $h = 0$. □

Hemos construido, para toda álgebra de Banach conmutativa A, su espectro $\widehat{A}$. A continuación veremos que además existe un homomorfismo natural $A \to C_0(\widehat{A})$. Este homomorfismo, llamado transformada de Gelfand, extiende la noción de transformada de Fourier.

Definición 1.3.13. Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$. La *transformada de Gelfand* de a es $\widehat{a} : \widehat{A} \to \mathbb{C}$, dada por $\widehat{a}(h) = h(a)$ para todo $h \in \widehat{A}$.

Observación 1.3.14. Notar que, si $\widehat{A} = \emptyset$, entonces $\hat{a} = \emptyset\ \forall a \in A$. Luego $C(\widehat{A})$ tiene un único elemento, $\emptyset$; es el álgebra de Banach nula.

Proposición 1.3.15. Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$.

1. Si A tiene unidad, entonces $\sigma(a) = \sigma(\widehat{a}) = \left\{h(a) :\ h \in \widehat{A}\right\} = \operatorname{Im}(\widehat{a}) = \overline{\operatorname{Im}(\widehat{a})}$.

2. Si A no tiene unidad, entonces $\sigma(a) = \sigma(\hat{a}) \cup \{0\} = \operatorname{Im}(\widehat{a}) \cup \{0\}$. En particular si $\widehat{A}$ no es compacto, entonces $\sigma(a) = \overline{\operatorname{Im}(\widehat{a})}$.

Demostración. Supongamos primero que A tiene unidad. Sabemos que $\sigma(\mathcal{G}(a)) \subseteq \sigma(a)$, es decir, $\sigma(\widehat{a}) \subseteq \sigma(a)$. Recíprocamente, sea $\lambda \in \sigma(a)$. Entonces $a - \lambda \notin \operatorname{Inv}(A)$. Por lo tanto existe un ideal maximal $M \lhd A$ tal que $a - \lambda \in M$. Sea h el homomorfismo complejo tal que $M = \ker(h)$. Entonces

$$0 = h(a - \lambda) = h(a) - h(\lambda) = h(a) - \lambda = \widehat{a}(h) - \lambda.$$

Luego $\lambda \in \operatorname{Im}(\widehat{a})$. Por lo tanto tenemos que $\sigma(\widehat{a}) \subseteq \sigma(a) \subseteq \operatorname{Im}(\hat{a})$. Ahora, si $\lambda \in \operatorname{Im}(\widehat{a})$, sea $h \in \widehat{A}$ tal que $h(a) = \lambda$. Entonces $\widehat{a} - \lambda \notin \operatorname{Inv}(A)$, pues esta función se anula en h. Entonces $\lambda \in \sigma(\widehat{a})$. Por lo tanto $\sigma(\widehat{a}) = \sigma(a) = \operatorname{Im}(\hat{a})$.

Supongamos ahora que A no tiene unidad. Entonces:

$$\sigma(a) = \sigma_{\widetilde{A}}(a) = \left\{\tilde{h}(a) :\ h \in \hat{\tilde{A}}\right\} = \left\{\tilde{h}|_A(a) :\ h \in \hat{\tilde{A}}\right\} = \left\{h(a) :\ h \in \hat{A}\right\} \cup \{0\} = \operatorname{Im}(\widehat{a}) \cup \{0\}.$$

La afirmación final se debe a que, si $\widehat{A}$ no es compacto, entonces necesariamente $0 \in \overline{\operatorname{Im}(\hat{a})}$. □

Proposición 1.3.16. Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$. Entonces

(1) $\widehat{a}$ es continua y $\|\widehat{a}\|_\infty \leq \|a\|$.

(2) $\widehat{a} \in C_0(\widehat{A})$.

(3) $\mathcal{G} : A \to C_0(\widehat{A})$, dada por $a \mapsto \widehat{a}$ para todo $a \in A$, es un homomorfismo de álgebras (unital si $A \ni 1$).

(4) $\ker(\mathcal{G}) = \operatorname{rad}(A)$.

(5) $\|\widehat{a}\|_\infty = r(a) = \text{lím}_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Demostración. Probaremos las primeras cuatro afirmaciones a continuación. La quinta será un corolario de la Proposición 1.3.15.

(1) Si $h_i \xrightarrow{w^*} h$ entonces $h_i(a) \to h(a)$. Luego es $\widehat{a}(h_i) \to \widehat{a}(h)$, o sea que $\widehat{a}$ es continua. Además $\|\widehat{a}\|_\infty = \sup_{h\in\widehat{A}} |\widehat{a}(h)| = \sup_{h\in\widehat{A}} |h(a)| \leq \sup_{h\in\widehat{A}} \|h\|\|a\| \leq \|a\|$. Entonces $\|\widehat{a}\|_\infty \leq \|a\|$.

(2) Si $\widehat{A}$ es compacto no hay nada que probar. Si $\widehat{A}$ no es compacto, entonces $\widehat{a} \in C_0(\widehat{A})$ porque $\text{lím}_{h\overset{w^*}{\to}0} \widehat{a}(h) = \text{lím}_{h\overset{w^*}{\to}0} h(a) = 0$.

(3) $\widehat{ab}(h) = h(ab) = h(a)h(b) = \widehat{a}(h)\,\widehat{b}(h) = \widehat{a}\,\widehat{b}(h)$ para todo h, entonces $\widehat{ab} = \widehat{a}\,\widehat{b}$. La linealidad se prueba igual. Si $A \ni 1$ entonces $\widehat{1}(h) = h(1) = 1$ para todo h; entonces $\widehat{1}$ es la unidad de $C(\widehat{A})$.

(4) $a \in \ker(\mathcal{G})$ si y sólo si $\widehat{a}(h) = 0$ para todo $h \in \widehat{A}$ si y sólo si $h(a) = 0$ para todo $h \in \widehat{A}$ si y sólo si $a \in \bigcap_{h\in\widehat{A}} \ker(h) = \bigcap\{M : M \text{ ideal maximal regular de } A\} = \text{rad}(A)$.

(5) Es un corolario de la Proposición 1.3.15.

$\square$