Capítulo 1

Álgebras de Banach

1.1. Álgebras de Banach

En todo este capítulo $\mathcal{H}$ denotará un espacio de Hilbert. Consideremos el siguiente espacio vectorial:

$$B(\mathcal{H}) := \{T : \mathcal{H} \to \mathcal{H} : \ T \text{ es lineal y continua } \}.$$

Si $T \in B(\mathcal{H})$, entonces $\|T\| := \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$ es finito, y el mapa $T \mapsto \|T\|$ es una norma con respecto a la cual $B(\mathcal{H})$ es completo, es decir, es un espacio de Banach.. Se sabe de cursos anteriores que $B(\mathcal{H})$ es un espacio de Banach que verifica las siguientes propiedades:

1. La composición de operadores $(S, T) \mapsto ST$ define un mapa $B(\mathcal{H}) \times B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ que es $\mathbb{C}$-bilineal y asociativo, con el cual $B(\mathcal{H})$ es un álgebra con unidad.

2. La norma de operadores es submultiplicativa: si $S, T \in B(\mathcal{H})$ entonces $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$.

3. La adjunción $* : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ dada por $T \mapsto T^*$, donde T^* es el único elemento de $B(\mathcal{H})$ que satisface $\langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ para todos $x, y \in \mathcal{H}$,

$$\text{cumple que : } \begin{cases} T^{**} = T, \\ (ST)^* = T^*S^*, \\ * \quad \text{es antilineal,} \\ \|T^*\| = \|T\| \quad \text{y} \quad \|T^*T\| = \|T\|^2 \quad \text{para todo} \quad T \in B(\mathcal{A}). \end{cases}$$

Una C^*-álgebra *concreta* $\mathcal{A} \subseteq B(\mathcal{H})$ es una subálgebra tal que $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ es cerrada en la topología definida por la norma de operadores.

Teorema (Gelfand-Naimark, 1943)**.** Da una caracterización abstracta de tales álgebras.

Buena parte de estas notas está dedicada a dar una demostración de dicho teorema.

Definición 1.1.1. El par $(\mathcal{A}, \mu)$ es un *álgebra* si $\mathcal{A}$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y $\mu : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es un mapa bilineal asociativo. Escribiremos simplemente ab en lugar de $\mu(a, b)$. Se dice que

$\mathcal{A}$ tiene unidad si existe $1 \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(a, 1) = a = \mu(1, a)$ para todo $a \in \mathcal{A}$ (observar que si existe una unidad, esta es única).

Un homomorfismo de álgebras $\phi : A \to B$ es una transformación $\mathbb{C}$-lineal que también es un homomorfismo de anillos. Si A y B tienen unidad y $\phi(1_A) = 1_B$, diremos que ϕ es unital.

Definición 1.1.2. Se dice que $(\mathcal{A}, \mu, \| \ \|)$ es un *álgebra normada* si $(\mathcal{A}, \mu)$ es un álgebra, $\| \ \|$ es una norma y $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$, para todos $a, b \in \mathcal{A}$.

- Si $\mathcal{A} \ni 1$ se pide también que $\|1\| = 1$.
- Si además $(\mathcal{A}, \| \ \|)$ es de Banach, se dice que $(\mathcal{A}, \mu, \| \ \|)$ es un *álgebra de Banach*.

Un homomorfismo entre álgebras normadas es un homomorfismo de álgebras que además es continuo.

Ejemplos 1.1.3.

1. $M_n(\mathbb{C}) \cong B(\mathbb{C}^n)$ es un álgebra de Banach con la norma de operadores.

2. $T_n(\mathbb{C}) = \{M \in M_n(\mathbb{C}) \ : \ M \text{ triangular superior}\}$ es un álgebra de Banach con la norma de operadores.

3. Si X es un espacio de Hausdorff localmente compacto, entonces

$$C_b(X) := \{a : X \to \mathbb{C} / \ a \text{ es continua y acotada}\}$$

   es un álgebra de Banach con las operaciones usuales y la norma del supremo.

4. Si E es un espacio de Banach entonces $B(E) := \{T : E \to E / \ T \text{ es lineal y continua}\}$ es un álgebra de Banach con $\|T\| := \sup\{\|Tx\| : \ \|x\| = 1\}$.

5. *El Álgebra del disco.* Sean $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, y $A(\mathbb{D}) := \{f \in C(\overline{\mathbb{D}}) : \ f \in H(\mathbb{D})\}$ con la norma $\| \ \|_\infty$ (o sea $\|f\|_\infty = \sup_{z \in \overline{\mathbb{D}}} \|f(z)\|$). Veamos que es de Banach: si $(f_n) \subseteq A(\mathbb{D})$ es tal que $f_n \xrightarrow{\| \ \|_\infty} f \in C(\overline{\mathbb{D}})$, entonces es un resultado bien conocido sobre funciones holomorfas que $f \in H(\mathbb{D})$; luego $A(\mathbb{D})$ es cerrada en $C(\mathbb{D})$, y por lo tanto es de Banach.

6. Para cualquier espacio de medida (X, μ) se tiene que $L^\infty(X, \mu)$ es un álgebra de Banach con las operaciones usuales y la norma $\| \ \|_\infty$.

7. Sea G un espacio localmente compacto y de Hausdorff (en adelante LCH) que además tiene una estructura de grupo tal que el mapa $G \times G \to G$ dado por $(r, s) \to rs^{-1}$ es continuo (es decir: tanto el producto como la inversión son continuos). Por el teorema de Riesz se tiene que $M(G) = C_0(G)^*$ donde

$$M(G) = \{\text{medidas complejas regulares de Borel sobre} G\}.$$

   El isomorfismo $I : M(G) \to C_0(G)^*$ está dado por: $\mu \mapsto I_\mu$, donde $I_\mu(f) = \int_G f d\mu$. Recordar que $\|I_\mu\| = \|\mu\| = |\mu|(G)$. Como producto $M(G) \times M(G) \to M(G)$ se considera la convolución: $(\mu,\nu)\mapsto\mu*\nu$, donde $\mu*\nu$ está dado por $\mu*\nu(f)=\int_G\int_G f(rs)d\mu(r)d\nu(s)$. Notar que $\mu*\nu\in C_0(G)^*$ y $\|\mu*\nu\|\leq\|\mu\|\|\nu\|$ porque

$$|\mu*\nu(f)|=|\int_G\int_G f(rs)d\mu(r)d\nu(s)|\leq\int_G\int_G|f(rs)|d|\mu|(r)d|\nu|(s)$$
$$\leq\|f\|_\infty\int_G\int_G d|\mu|(r)d|\nu|(s)=\|f\|_\infty\|\,\|\mu\|\,\|\nu\|.$$

8. Si E es un espacio de Banach, entonces E puede ser visto como un álgebra de Banach, considerando sobre E el producto nulo.

Ejercicio 1. Sea $\omega:\mathbb{Z}^+\to(0,\infty)$ tal que $\omega(m+n)\leq\omega(m)\omega(n),\forall n$. Sea $\mathbb{C}[X]$ el álgebra de polinomios en una variable con coeficientes complejos. En $\mathbb{C}[X]$ se considera la norma

$$\|a\|_\omega:=\sum_{n=1}^{\infty}|a(n)|\omega(n),\quad\forall a\in\mathbb{C}[X].$$

Dar ejemplos de tales funciones ω. Sea ℓ^1_ω la completación de $\mathbb{C}[X]$ con repecto a $\|\ \|_\omega$ (por ejemplo si $\omega(n)=1\ \forall n$, entonces $\ell^1_\omega=\ell^1$). Demostrar que ℓ^1_ω es un álgebra de Banach, y que es isométricamente isomorfa a ℓ^1 como espacio de Banach. Mostrar que, sin embargo, diferentes elecciones de ω dan lugar a álgebras de Banach ℓ^1_ω no isomorfas.

Ejercicio 2. Sea A un álgebra de Banach con unidad. Se define $L:A\to B(A)$ como $L_a(x):=ax$, $\forall a,x\in A$. Probar que L es un homomorfismo de álgebras de Banach cuya imagen es cerrada.

Ejercicio 3. Supóngase que A es una álgebra compleja con una norma con respecto a la cual es un espacio de Banach, y tal que el producto es continuo, es decir, existe K tal que $\|ab\|\leq K\|a\|\,\|b\|$, $\forall a,b\in A$. Probar que en A se puede definir una norma equivalente $\|\ \|_L$ con la cual A es un álgebra de Banach, y que en el caso de que A tenga unidad, entonces $\|1\|_L=1$ (sugerencia: si A no tiene unidad, adjuntársela, y luego usar el *Ejercicio* 2).

Definición 1.1.4. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra, se dice que $*:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ es una *involución* si verifica que

- $*$ es antilineal: $(\alpha a+\beta b)^*=\bar{\alpha}a^*+\bar{\beta}b^*,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{C},a,b\in A$.
- $a^{**}=a$ para todo $a\in\mathcal{A}$,
- $*$ es antimultiplicativa: $(ab)^*=b^*a^*$ para todos $a,b\in\mathcal{A}$.

En este caso el par $(\mathcal{A},*)$ se llama *$*$-álgebra* o álgebra con involución. Un homomorfismo $\phi:A\to B$ entre $*$-álgebras es un un homomorfismo de álgebras tal que $\phi(a^*)=\phi(a)^*$, para todo $a\in A$.

Definición 1.1.5. Una *$*$-álgebra normada* es un álgebra normada con una involución tal que $\|a^*\|=\|a\|$ para todo a. Si además es completa se dice que es una *$*$-álgebra de Banach*. Un homomorfismo de $*$-álgebras normadas es un homomorfismo de $*$-álgebras que además es continuo.

Definición 1.1.6. Una $pre-C^*$*-álgebra* es una $*$-álgebra normada en la cual todo elemento $a \in \mathcal{A}$ satisface la *C^*-identidad:*

$$\|a^*a\| = \|a\|^2.$$

Si además A es completo se dice que A es una C^*-álgebra.

Ejemplos 1.1.7. Retomando los ejemplos anteriores, veamos cuáles son C^*-álgebras.

1. Si en $\mathbb{C}^n$ se considera la norma euclidiana, entonces $M_n(\mathbb{C})$ es una C^*-álgebra con la norma de operadores y con la involución $*$ dada por el adjunto.

2. Como subálgebra de la anterior, $T_n(\mathbb{C})$ no es una C^*-álgebra pues no es cerrada por $*$.

3. $C_b(X)$ es una C*-álgebra con la conjugación como involución.

4. En general $B(E)$ no es una $*$-álgebra. Pero cuando E es de Hilbert sí es una $*$-álgebra, de hecho una C^*-álgebra.

5. Como es sabido, $A(\mathbb{D})$ no es cerrado por conjugación. Sin embargo, podemos considerar el mapa antilineal $* : A(\mathbb{D}) \to A(\mathbb{D})$ tal que $f^*(z) := \overline{f(\bar{z})}$. Se trata de una involución con la cual $A(\mathbb{D})$ es una $*$-álgebra de Banach, aunque no una C^*-álgebra.

6. $L^\infty(X, \mu)$ es una C*-álgebra con la conjugación como involución.

7. Supongamos que G es un grupo discreto (es decir, un grupo con la topología discreta). Entonces $M(G) = l^1(G)$. Si $\mu \in M(G)$ la vemos como $\mu \in l^1(G)$. Se define μ^* tal que $\mu^*(t) = \overline{\mu(t^{-1})}$. Entonces se verifica: $\|\mu^*\| = \|\mu^*\|_1 = \sum_{t\in G} |\mu^*(t)| = \sum_{t\in G} |\mu(t^{-1})| = \sum_{t\in G} |\mu(t)| = \|\mu\|$. También podemos definir a μ^* de la siguiente manera: $\mu^*(E) = \overline{\mu(-E)}$ para todo $E \subseteq G$, o $\mu^*(f) = \overline{\int f(t^{-1}) d\mu(t)}$.
   Notar que $G \hookrightarrow M(G)$ a través del mapa $t \mapsto \delta_t$. Entonces es $\delta_t^* = \delta_{t^{-1}}$ y $\delta_s * \delta_t = \delta_{st}$.

Ejemplo 1.1.8. Sea X un espacio LCH. Si $a : X \to \mathbb{C}$, decimos que $\lim_{x\to\infty} a(x) = 0$ si dado $\epsilon > 0$ existe $K \subseteq X$, compacto, tal que $|a(x)| < \epsilon \ \forall x \in X \setminus K$. Sea

$$C_0(X) := \left\{ a : X \to \mathbb{C} : a \text{ continua y } \lim_{x\to\infty} a(x) = 0 \right\}.$$

Con $\|a\|_\infty = \sup\{|a(x)| : \ x \in X\}$ y $a^*(x) = \overline{a(x)}$, resulta que $C_0(X)$ es una C^*-álgebra conmutativa. Uno de nuestros primeros objetivos en este curso será mostrar el resultado siguiente, cuyas consecuencias son muy importantes, en particular desde el punto de vista heurístico:

Teorema (Gelfand-Naimark)**.** Toda C^*-álgebra conmutativa es naturalmente isomorfa a $C_0(X)$, para cierto espacio localmente compacto y de Hausdorff X, que es único a menos de homeomorfismos.

Ejemplos 1.1.9.

1. Supongamos que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert. Consideremos el conjunto $\mathcal{K}(\mathcal{H}) = \{T \in B(\mathcal{H}) : \ T \text{ es compacto}\}$. Recordar que T es compacto si $\overline{T(B(0,1))}$ es compacto. Equivalentemente, T es compacto sii T es el límite de operadores de rango finito. Entonces:

   - $\overline{\mathcal{F}(\mathcal{H})} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ es la $*$-álgebra de los operadores de rango finito.
   - $\mathcal{K}(\mathcal{H})^* = \mathcal{K}(\mathcal{H})$,
   - $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ es un ideal bilateral cerrado de $B(\mathcal{H})$, es decir, $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es un subespacio cerrado de $B(\mathcal{H})$ tal que TS, $ST \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ para todo $T \in \mathcal{K}$ y para todo $S \in B(\mathcal{H})$. Notación: $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \lhd B(\mathcal{H})$.

   Entonces $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es una C^*-álgebra, sin unidad si $\dim(\mathcal{H}) = \infty$, y no conmutativa si $\dim(\mathcal{H}) > 1$.

2. *El álgebra de Wiener*:

$$\mathcal{W} := \left\{ a \in C(S^1) : a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n, \text{ con } (a_n) \in l^1(\mathbb{Z}) \right\}.$$

   El producto de $\mathcal{W}$ es punto a punto, y la involución está dada por la conjugación. Con estas operaciones y la norma $\|a\| := \|(a_n)\|_1$, $\mathcal{W}$ es una $*$-álgebra de Banach conmutativa con unidad. La transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{W} \to \ell^1(\mathbb{Z})$ es un isomorfismo de $*$-álgebras de Banach.

1.1.1. Algunas construcciones con álgebras de Banach

Producto directo

Si $(A_i)_{i \in I}$ es una familia de álgebras de Banach (o $*$-álgebras de Banach, o C^*-álgebras), se define:

$$\prod_{i \in I} A_i := \left\{ f : I \to \cup A_i \;/\; f(i) \in A_i, \text{ para todo } \ i \in I \text{ y } \sup_{i \in I} \|f(i)\| < \infty \right\},$$

con las operaciones obvias punto a punto y $\|f\|_\infty = \sup_{i \in I} \|f(i)\|$. Entonces $\prod_{i \in I} A_i$ es un álgebra de Banach (respectivamente: $*$-álgebra de Banach, C^*-álgebra).

Suma directa

$$\bigoplus A_i := \left\{ f \in \prod_{i \in I} A_i : \text{ dado } \varepsilon > 0, \exists F \subseteq I \text{ finito} \,/\, \|f(i)\| < \varepsilon \text{ para todo } i \notin F \right\}.$$

Entonces $\bigoplus_{i \in I} A_i$ es un ideal (ver 1.1.12) cerrado de $\prod_{i \in I} A_i$, así que es un álgebra de Banach. Si cada A_i es una $*$-álgebra de Banach (C^*-álgebra) entonces $\bigoplus_{i \in I} A_i$ es un álgebra de Banach (C^*-álgebra).

Adjunción de la unidad

Sea A un álgebra. Definimos $\tilde{A} := A \oplus \mathbb{C}$ como espacio vectorial y sobre $\tilde{A}$ definimos el producto

$$\begin{aligned} \tilde{A} \times \tilde{A} &\to \tilde{A} \\ (a+\alpha, b+\beta) &\mapsto (ab+\alpha b+\beta a)+\alpha\beta \end{aligned}$$

Entonces $\tilde{A}$ es un álgebra con unidad, la cual es $0+1$:

$$\begin{aligned} (a+\alpha)(0+1) &= a0+\alpha 0+1a+\alpha 1 = a+\alpha, \\ (0+1)(a+\alpha) &= 0a+1a+0\alpha+1\alpha = a+\alpha. \end{aligned}$$

Observar que si A tiene unidad, ésta no está relacionada con la unidad de $\tilde{A}$. Si además A es un álgebra normada se define sobre $\tilde{A}$ la siguiente norma: $\|a+\alpha\| := \|a\|+|\alpha|$. Entonces $(\tilde{A}, \| \ \|)$ es un álgebra de Banach. Además tenemos que:

$$\begin{aligned} \|(a+\alpha)(b+\beta)\| &= \|ab+\alpha b+\beta a+\alpha\beta\| = \|ab+\alpha b+\beta a\|+|\alpha\beta| \\ &\leq \|ab\|+|\alpha|\|b\|+|\beta|\|a\|+|\alpha||\beta| \\ &\leq (\|a\|+|\alpha|)(\|b\|+|\beta|) = \|a+\alpha\|+\|b+\beta\|. \end{aligned}$$

Entonces $\tilde{A}$ es un álgebra normada. Si A es una $*$-álgebra entonces $\tilde{A}$ también es una $*$-álgebra si se define $(a+\alpha)^* := a^*+\bar{\alpha}$. Si A es una $*$-álgebra de Banach, $\tilde{A}$ también lo es. Si A es una C^*-álgebra entonces $\tilde{A}$ no es C^*-álgebra en general (para que lo sea es necesario cambiar la norma por otra equivalente: ver la Proposición 2.1.11).

Ejemplo 1.1.10. Si $A = \mathbb{C}$ entonces $(\mathbb{C}, | \ |)$ es una C^*-álgebra. Pero $\mathbb{C}^2$ con la norma $\|(\alpha,\beta)\|_1 = |\alpha|+|\beta|$ no lo es.

Notar que A es un ideal bilateral cerrado de $\tilde{A}$, que es maximal ($A\tilde{A} \subseteq A \supseteq \tilde{A}A$, $\bar{A} = A$ y $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\tilde{A}}{A} = 1$).

Si $\varphi : A \to B$ es un homomorfismo de álgebras, se define $\tilde{\varphi} : \tilde{A} \to \tilde{B}$ como $\tilde{\varphi}(a+\alpha) := \varphi(a)+\alpha$. Entonces $\tilde{\varphi}$ es un homomorfismo unital de álgebras que extiende a φ. Veamos que $\tilde{\varphi}$ lleva la unidad en la unidad: $\tilde{\varphi}(0+1) = \varphi(0)+1 = 0+1$. Si φ es acotado entonces $\tilde{\varphi}$ también lo es (demostrarlo). Con algunas verificaciones rutinarias más, se concluye en definitiva que las asignaciones: $A \mapsto \tilde{A}$, $(\varphi : A \to B) \mapsto (\tilde{\varphi} : \tilde{A} \to \tilde{B})$ constituyen un functor de la categoría de las álgebras de Banach en la categoría de las álgebras de Banach con unidad.

Ejemplo 1.1.11. Sea $A = C_0(\mathbb{R})$ con la norma $\| \ \|_\infty$. En este caso $\tilde{A}$ se identifica con el álgebra de Banach:

$$B := \left\{ b : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ continua}/ \ \exists b_\infty \in \mathbb{C} \text{ tal que } \lim_{x\to\pm\infty} b(x) = b_\infty \right\},$$

con $\|b\| := \|b-b_\infty\|+|b_\infty|$, a través del isomorfismo $\phi : B \to \tilde{A}$ dado por $\phi(b) = (b-b_\infty, b_\infty)$. Es claro que ϕ es un homomorfismo sobreyectivo. Veamos la inyectividad: si b es tal que $\phi(b) = (0,0)$, entonces $b_\infty = 0$ y $b-b_\infty = 0$. Luego es $b = b_\infty = 0$.

Más en general supongamos que X es un espacio localmente compacto y de Hausdorff, no compacto, y sea X^+ su compactificación de Alexandroff. Es decir: $X^+ = X \cup \{\infty\}$ con $\infty \notin X$, y la topología de X^+ es la topología generada por la topología de X y $\{X^+ \setminus K : \; K \subseteq X \text{ compacto}\}$. Entonces X^+ es compacto y de Hausdorff, y $\widetilde{C_0(X)} \cong C(X^+)$.

1.1.2. Ideales y Cocientes

Definición 1.1.12. Si A es un álgebra e I es un subespacio vectorial de A, se dice que I es un *ideal a izquierda* (*derecha, bilateral*) de A si $AI \subseteq I$ (respectivamente $IA \subseteq I$, $AI + IA \subseteq I$).

Observación 1.1.13. Si A es un álgebra e I es un ideal bilateral, entonces $\frac{A}{I}$ es un álgebra. Si A es una $*$-álgebra e $I^* = I$, entonces A/I es una $*$-álgebra con $(a + I)^* = a^* + I$.

Si A es un álgebra normada (de Banach) e I es un ideal bilateral cerrado en A entonces A/I es un álgebra normada (de Banach) con la norma

$$\|a + I\| := \text{ distancia}(a, I) = \text{ínf}\{\|a - x\| : \; x \in I\}.$$

En efecto, tenemos que A/I es un álgebra y A/I es un espacio normado (de Banach), por resultados conocidos de álgebra y de análisis funcional. Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\|(a + I)(b + I)\| = \|ab + I\| &= \text{ínf}\{\|ab - x\| : \; x \in I\} \leq \text{ínf}\{\|(a - y)(b - z)\| : \; y, z \in I\} \\
&\leq \text{ínf}\{\|a - y\| \, \|b - z\| : \; y, z \in I\} = \text{ínf}\{\|a - y\| : \; y \in I\} \, \text{ínf}\{\|b - z\| : \; z \in I\} \\
&= \|a + I\| \, \|b + I\|.
\end{aligned}$$

Entonces es A/I es un álgebra normada (de Banach). La proyección canónica es un homomorfismo de álgebras normadas.

Proposición 1.1.14. Si A es una $*$-álgebra de Banach e $I = I^*$ es un ideal cerrado en A. Entonces A/I es una $*$-álgebra de Banach.

Definición 1.1.15. Si A es un anillo e I es un ideal de A, se dice que I es *regular* (o modular) si A/I tiene unidad. Equivalentemente: existe $u \in A$ tal que $a - au$, $a - ua \in I$ para todo $a \in A$.

NOTACIÓN: $I \lhd A$ indicará que el ideal I es bilateral y cerrado en A.

Ejemplos 1.1.16.

1. Si $A \ni 1$ entonces todo ideal es regular.

2. A es regular en $\tilde{A}$ porque $\frac{\tilde{A}}{A} \cong \mathbb{C}$.

3. Sea $A = C_0((0, 1])$; en este caso A no tiene unidad. Dado $\alpha \in (0, 1)$ sea $I_\alpha := \{a \in A : a|_{[\alpha,1]} = 0\}$. Entonces $I_\alpha \lhd A$ es regular. Basta tomar u de la siguiente manera:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [\alpha, 1], \\ \frac{t}{\alpha} & \text{si} \quad t \in (0, \alpha). \end{cases}$$

   Entonces $u \in A$ y verifica que $(a - au)|_{[\alpha,1]} = 0$ para todo $a \in A$.

Proposición 1.1.17. Si I es un ideal regular propio de A, entonces existe un ideal regular R en A tal que

1. $I \subseteq R \subsetneq A$.
2. Si J es un ideal regular propio de A tal que $J \supseteq R$ entonces $J = R$.

Todo ideal regular, maximal con dicha propiedad, es un ideal maximal.

Demostración. Como $\frac{A}{I}$ es un anillo con unidad existe un ideal maximal M de $\frac{A}{I}$. Sea $R \subseteq A$ la preimagen de M por la proyección canónica. Entonces $I \subseteq R$ y R es un ideal propio de A. Como $\frac{A}{I}$ tiene unidad y $\frac{A}{R} \cong \frac{A/I}{R/I}$, tenemos que $\frac{A}{R}$ también tiene unidad. Entonces R es regular.

Sea ahora J un ideal regular propio de A, tal que $R \subseteq J$. Entonces tenemos que $M = \pi(R) \subseteq \pi(J)$. Como M es maximal y J es propio es $M = \pi(J)$. Luego $J = R$.

Sea R regular maximal y sea J ideal propio de A tal que $R \subseteq J$ Como $A/J \cong \frac{A/R}{J/R}$ y $\frac{A}{R}$ tiene unidad, J es regular. Por la maximalidad de R entre los regulares tenemos que $J = R$. Entonces R es un ideal maximal de A. □

Ejemplo 1.1.18. Sea $A = C_0((0,1])$ e $I_\alpha = \{a \in A : \; a|_{[\alpha,1]} = 0\}$. Entonces I_1 es regular maximal e $I_\alpha \subseteq I_1$.

Ejercicio 4. Sean $A(\mathbb{D})$ el álgebra del disco y $\varphi, \psi : A(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$ dadas por $\varphi(a) = a(0)$, $\psi(a) = a'(0)$. Mostrar que $A := \ker \varphi$ es un ideal sin unidad de $A(\mathbb{D})$, y que $B := \ker \psi$ es una subálgebra cerrada con unidad de $A(\mathbb{D})$. Mostrar $I := A \cap B$ es un ideal maximal de A que no es modular.

Definición 1.1.19. Sea A un anillo, se define el *radical (de Jacobson)* de A como

$$\mathrm{rad}(A) := \cap\{M \lhd A / \; M \text{ regular maximal}\}.$$

Si A no tiene ideales regulares maximales, entonces $\mathrm{rad}(A) := A$.
Si $\mathrm{rad}(A) = 0$ se dice que A es *semisimple*.

Observación 1.1.20. $\frac{A}{\mathrm{rad}(A)}$ es semisimple.

1.2. Teoría espectral

Estudiaremos los elementos invertibles de un álgebra de Banach.

Definición 1.2.1. Sea A un álgebra de Banach con unidad. Se dice que $a \in A$ es *invertible* si existe $b \in A$ tal que $ab = 1 = ba$. En este caso b se llama *inverso* de a y se denota a^{-1}.

$$\mathrm{Inv}(A) := \{a \in A \;/ \text{ es invertible}\}.$$

Observación 1.2.2. $\mathrm{Inv}(A)$ es un grupo con la multiplicación de A.

Ejemplos 1.2.3.

(1) $\mathrm{Inv}(C([0,1])) = \{f \in C([0,1]) : 0 \notin \mathrm{Im}(f)\}$.

(2) $\mathrm{Inv}(M_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C}) = \{M \in M_n(\mathbb{C}) : \det(M) \neq 0)\}$.

(3) Sea E un espacio de Banach, y considérese el álgebra de Banach $B(E)$. Si $T \in B(E)$, se tiene que

$$\sigma_{B(E)}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ no es inyectivo o no es sobreyectivo}\}$$

porque del teorema de la aplicación abierta se deduce que si $T \in B(E)$ es biyectivo, entonces $T^{-1} \in B(E)$.

Teorema 1.2.4. Sea A un álgebra de Banach con unidad.

(i) Si $a \in A$ tal que $\|1 - a\| < 1$ entonces $a \in \mathrm{Inv}(A)$, y $a^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(1-a)^n$.

(ii) $\mathrm{Inv}(A)$ es abierto en A; más precisamente, si $a \in \mathrm{Inv}(A)$ entonces

$$B\left(a, \frac{1}{\|a^{-1}\|}\right) \subseteq \mathrm{Inv}(A).$$

(iii) $\mathrm{Inv}(A)$ es un grupo topológico.

Demostración. (i) Como $\|1 - a\| < 1$ tenemos que $\sum_{n=0}^{\infty} \|(1-a)^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|1-a\|^n < \infty$. Entonces $\sum_{n=0}^{\infty}(1-a)^n$ converge en A. Sea $b = \sum_{n=0}^{\infty}(1-a)^n$. Entonces:

$$ab = (1-(1-a))(\lim_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{k}(1-a)^j) = \lim_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{k}(1-a)^j - \sum_{j=0}^{k}(1-a)^{j+1} = \lim_{k\to\infty} 1-(1-a)^{k+1} = 1.$$

Por lo tanto $ab = 1$, y de igual forma tenemos que $ba = 1$.

(ii) Sea $b \in B\left(a, \frac{1}{\|a^{-1}\|}\right)$, entonces $b = a - (a-b) = a(1-(a^{-1}(a-b)))$. Ahora tenemos que

$$\|a^{-1}(a-b)\| \leq \|a^{-1}\|\|a-b\| < \|a^{-1}\|\frac{1}{\|a^{-1}\|} = 1.$$

Entonces aplicando (i) $1 - a^{-1}(a-b) \in \mathrm{Inv}(A)$. Como $\mathrm{Inv}(A)$ es un grupo se deduce que $b = a(1-a^{-1}(a-b)) \in \mathrm{Inv}(A)$.

(iii) Como A es un álgebra de Banach tenemos que el producto es continuo. Hay que probar que $a \mapsto a^{-1}$ es continuo.
Sea $a \in \mathrm{Inv}(A)$ y $b \in B\left(a, \frac{1}{\|a^{-1}\|}\right)$. Entonces, como $b = a(1-a^{-1}(a-b))$, se tiene que $b^{-1} = (1-a^{-1}(a-b))^{-1}a^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}[a^{-1}(a-b)]^n a^{-1}$.

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\|b^{-1} - a^{-1}\| &= \left\| \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(a^{-1}(a-b) \right)^n - 1 \right) a^{-1} \right\| \\
&\leq \|a^{-1}\| \sum_{n=1}^{\infty} \|a^{-1}(a-b)\|^n = \|a^{-1}\| \frac{\|a^{-1}(a-b)\|}{1 - \|a^{-1}(a-b)\|} \\
&\leq \frac{\|a-b\| \|a^{-1}\|^2}{1 - \|a^{-1}(a-b)\|} \to 0 \text{ si } b \to a.
\end{aligned}$$

Entonces $\lim_{b \to a} \|b^{-1} - a^{-1}\| = 0$. Luego la inversión es continua.

□

Corolario 1.2.5. Si un subespacio I_0 de un álgebra de Banach con unidad A es un ideal propio de A en el sentido algebraico, entonces $\bar{I}_0$ es un ideal propio de A.

Demostración. La continuidad de las operaciones de A implican fácilmente que $\bar{I}_0$ es un ideal de A. Como $B(1,1)$ es abierto y $B(1,1) \cap I_0 = \emptyset$, entonces también es $B(1,1) \cap \bar{I}_0 = \emptyset$. □

Ejercicio 5. Sea A un álgebra de Banach con unidad. Sean $G := \mathrm{Inv}(A)$ y G_0 la componente conexa de G que contiene a la unidad. Probar que G_0 es un subgrupo normal abierto y cerrado de G, que las componentes conexas de G son exactamente las coclases de G_0 en G, y que $\Lambda_A := G/G_0$ es un grupo discreto. El grupo Λ_A se llama *grupo del índice abstracto* del álgebra A.

Definición 1.2.6. Sean A un álgebra y $a \in A$. El *espectro* de a en A se define como:

(i) si A tiene unidad: $\sigma_A(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ a - \lambda \notin \mathrm{Inv}(A)\}$;

(ii) si A no tiene unidad: entonces $\sigma_A(a) := \sigma_{\widetilde{A}}(a)$.

Observación 1.2.7.

(1) Si $A \not\ni 1$ entonces $0 \in \sigma_A(a)$ para todo $a \in A$. En este caso $\sigma_A(a) = \sigma_{\widetilde{A}}(a)$, y si $a + \lambda \in \mathrm{Inv}(\widetilde{A})$ entonces $\lambda \neq 0$.

(2) Si $A \ni 1$ entonces $\sigma_A(1) = \{\lambda : \ 1 - \lambda \notin \mathrm{Inv}(A)\} = \{1\}$.

(3) Si $A \ni 1$ entonces $\sigma_A(a + \lambda) = \sigma(a) + \lambda = \{\alpha + \lambda : \ \alpha \in \sigma_A(a)\}$ ($\alpha \in \sigma_A(a + \lambda)$ sii $a + (\lambda - \alpha) \notin \mathrm{Inv}(A)$ sii $\alpha - \lambda \in \sigma_A(a)$ sii $\alpha \in \lambda + \sigma_A(a)$).

(4) $\sigma_A(\lambda a) = \lambda \sigma_A(a)$.

Proposición 1.2.8. Si $\varphi : A \to B$ es un homomorfismo unital entre álgebras con unidad, entonces $\sigma_B(\varphi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$.

Demostración. Si $\lambda \notin \sigma_A(a)$, entonces existe $b \in A$ tal que $b(a - \lambda) = (a - \lambda)b = 1$. Entonces $1 = \varphi(1) = \varphi(b)\varphi(a - \lambda) = \varphi(b)(\varphi(a) - \lambda) = (\varphi(a) - \lambda)\varphi(b)$, de donde $\varphi(a) - \lambda \in \mathrm{Inv}(B)$, y por lo tanto $\lambda \notin \sigma_B(\varphi(a))$. □

Corolario 1.2.9. Si A es un álgebra de Banach con unidad y $h : A \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo no nulo, entonces $h(a) \in \sigma(a)$, $\forall a \in A$.

Demostración. Extendiendo h a un homomorfismo definido en $\tilde{A}$ si fuera necesario, se puede suponer que A y h son unitales. Por lo tanto, de acuerdo a 1.2.8: $h(a) \in \sigma_{\mathbb{C}}(h(a)) \subseteq \sigma(a)$. □

Proposición 1.2.10. Supongamos que A es una subálgebra conmutativa de un álgebra de Banach B con unidad, que es maximal con esta propiedad. Si $a \in A$, entonces $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

Demostración. Observar en primer lugar que $\bar{A}$ es una subálgebra conmutativa que contiene a A, y como ésta es maximal con respecto a dicha propiedad, se tiene entonces que $A = \bar{A}$. El mismo argumento muestra que A contiene a la unidad de B, pues la subálgebra generada por $A \cup \{1_B\}$ es conmutativa y contiene a A. Ya sabemos que $\sigma_B(a) \subseteq \sigma_A(a)$, para todo $a \in A$ pues $A \hookrightarrow B$ es un homomorfismo unital. Veamos ahora la otra inclusión. Supongamos que $\lambda \notin \sigma_B(a)$, de modo que existe $b \in B$ tal que $(a - \lambda)b = 1 = b(a - \lambda)$. Si $c \in A$, entonces $cb = b(a - \lambda)cb = bc(a - \lambda)b = bc$, de manera que b conmuta con todo elemento de A, y por lo tanto, utilizando una vez más la maximalidad de A, se concluye que $b \in A$. Luego es $\lambda \notin \sigma_A(a)$. □

Denotemos por $\mathbb{C}[X]$ el álgebra de polinomios en una variable, con coeficientes complejos. Si A es un álgebra con unidad y $a \in A$ es un elemento cualquiera, por la propiedad universal de $\mathbb{C}[X]$ existe un único homomorfismo unital $\tau : \mathbb{C}[X] \to A$ tal que $\tau(X) = a$. Por lo tanto si $p(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_n X^n \in \mathbb{C}[X]$, entonces $\tau(p(X)) = \alpha_0 + \alpha_1 a + \cdots + \alpha_n a^n$. En adelante pondremos $p(a)$ en lugar de $\tau(p(X))$.

Proposición 1.2.11. Si A es un álgebra con unidad y $p \in \mathbb{C}[X]$. Entonces

$$\sigma(p(a)) = p(\sigma(a)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Demostración. Si $w \in \mathbb{C}$ entonces $p(X) - w = \beta(X - r_1)(X - r_2)\ldots(X - r_n)$. Por lo tanto es $p(a) - w = \beta(a - r_1)(a - r_2)\ldots(a - r_n)$, ya que τ es un homomorfismo de álgebras. Los factores del miembro derecho de la igualdad anterior conmutan dos a dos, de modo que su producto será invertible sii cada uno de ellos es invertible. En otras palabras: $w \notin \sigma(p(a))$ sii $r_i \notin \sigma(a)$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces:

$$w \in \sigma(p(a)) \Leftrightarrow \text{ existe } i : \ r_i \in \sigma(a) \Leftrightarrow \text{ existe } r_i \in \sigma(a) : \ p(r_i) = w \Leftrightarrow \ w \in p(\sigma(a)).$$