Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebras de Operadores–Curso 2020

Lista 3 de ejercicios

1. Sea A una C^*-álgebra. Si $a \in A$, se define $|a| := \sqrt{a^*a}$.

   a) Sea $a \in A_{\text{sa}}$. Probar que $|a| = a_+ + a_-$.

   b) Sean $a, b \in A_{\text{sa}}$ tales que $ab = ba$ y $a \leq b$. Probar que, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y creciente, se tiene que $f(a) \leq f(b)$.

   c) Mostrar que es posible $0 \leq a \leq b$ pero $a^2 \not\leq b^2$ (buscar en $A = M_2(\mathbb{C})$).

   d) Sean $a, b \in A^+$. Probar que $\|a\| \leq \|a + b\|$.

2. Sean A una C^*–álgebra con unidad, A_{nor} el conjunto de elementos normales de A, y $\mathscr{F}$ el espacio de funciones continuas de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ con la topología de la convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$. Probar que la función $\langle\ ,\ \rangle : \mathscr{F} \times A_{\text{nor}} \to A_{\text{nor}}$ dada por $\langle f, a\rangle = f(a)$ es continua.

3. Sea A una C^*-álgebra con unidad. Probar que:

   a) Si $a, b \in A^+$ se tiene que $\sigma(ab) \subset \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

   b) Si $a \in \text{Inv}(A)$ existe un único unitario $u \in A$ tal que $a = u|a|$. Dar un ejemplo de un elemento de una C^*-álgebra que no pueda escribirse como el producto de un unitario por un operador positivo.

   c) Si $a \in \text{Inv}(A)$, probar que a es unitario si y sólo si $\|a\| = \|a^{-1}\| = 1$.

4. Sean A y B C^*-álgebras y $\phi : A \to B$ un *-homomorfismo sobreyectivo.

   a) Probar que si $b \in B_{\text{sa}}$ existe $a \in A_{\text{sa}}$ tal que $\phi(a) = b$.

   b) Probar que si $b \in B^+$ existe $a \in A^+$ tal que $\phi(a) = b$.

   c) Si además A y B tienen unidad, probar o dar un contraejemplo: si $b \in B_{\text{sa}}$ es invertible existe $a \in A_{\text{sa}}$, invertible, tal que $\phi(a) = b$.

5. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable, y sea $\mathsf{K}(\mathcal{H}) := \{T \in \mathsf{B}(\mathcal{H}) : T \text{ es compacto}\}$. Probar que si $I \neq 0$ es un ideal (cerrado o no) de $\mathsf{B}(\mathcal{H})$, entonces I contiene a todos los operadores de rango 1. Deducir que: $\mathsf{K}(\mathcal{H})$ es el único ideal cerrado no trivial de $\mathsf{B}(\mathcal{H})$, y por lo tanto esencial en $\mathsf{B}(\mathcal{H})$, y deducir que $\mathsf{K}(\mathcal{H})$ es simple

6. Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto, Se considera la C*-álgebra $A := C(X, M_2)$, donde $\|a\| := \sup_{x \in X} \|a(x)\|_{M_2}$. Hallar todos los ideales cerrados y las C*-subálgebras hereditarias de A.

7. Sean $* : \mathsf{B}(\mathcal{H}) \to \mathsf{B}(\mathcal{H})$ la adjunción y, fijado $T \in \mathsf{B}(\mathcal{H})$, sea $L_T : \mathsf{B}(\mathcal{H}) \to \mathsf{B}(\mathcal{H})$ tal que $L_T(S) := TS$.

   a) $*$ no es SOT continua (considerar el shift unilateral), pero sí lo es restringida a $\mathsf{B}(\mathcal{H})_{\text{nor}}$.

   b) $*$ es WOT continua.

   c) L_T es WOT y SOT continua.

   d) La multiplicación $\mathsf{B}(\mathcal{H}) \times \mathsf{B}(\mathcal{H}) \to \mathsf{B}(\mathcal{H})$ no es WOT ni SOT continua.

8. Sean E un espacio normado, E^{**} su bidual, y $\phi : E \to \mathsf{B}(\mathcal{H})$ un operador acotado, donde H es un espacio de Hilbert. Probar que existe un único operador acotado $\tilde{\phi} : E^{**} \to \mathsf{B}(\mathcal{H})$ tal que $\tilde{\phi}$ es $(w^* - WOT)$–continuo y $\phi = \tilde{\phi}J$, donde $J : E \to E^{**}$ es el mapa canónico: $J_x(\psi) = \psi(x)$, $\forall x \in E$, $\psi \in E^*$ (sugerencia: para cada $\Lambda \in E^{**}$ considerar el mapa $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ dado por $(\xi, \eta) \mapsto \phi^{**}(\Lambda)|_{w_{\xi,\eta}}$, donde $w_{\xi,\eta} : \mathsf{B}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ está dado por $w_{\xi,\eta}(T) = \langle T\xi, \eta \rangle$).

Para la aprobación del curso entregar al menos los Ejercicios 4 y 8
Fecha límite: lunes 25 de mayo.