Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebras de Operadores–Curso 2020

Lista 2 de ejercicios

1. Sean H un espacio de Hilbert, y $T \in B(H)$. El *espectro de Weyl* de T se define como $\sigma_W(T) := \bigcap\{\sigma(T+K) : K \in \mathcal{K}\}$, donde $\mathcal{K}$ es el álgebra de operadores compactos de H. Demostrar que $\sigma_W(T)$ es no vacío.

2. Probar que todo subconjunto compacto y no vacío del plano es el espectro de un elemento en alguna álgebra de Banach.

3. Sean A y B álgebras de Banach, donde B es conmutativa y semisimple. Probar que si $\phi : A \to B$ es un homomorfismo de álgebras, entonces ϕ es continuo (sugerencia: usar el teorema del gráfico cerrado).

4. Sea $A := \{a \in C[0,1] : a' \in C[0,1]\}$ con las operaciones definidas punto a punto y la norma $\|a\| := \|a\|_\infty + \|a'\|_\infty$. Probar que A es un álgebra de Banach conmutativa con unidad, y describir su espectro. Mostrar que la transformada de Gelfand no es isométrica ni sobreyectiva.

5. Sean A una *-álgebra de Banach conmutativa, $\hat{A}$ su espacio de Gelfand y $\hat{A}_s := \{h \in \hat{A} : h(a^*) = \overline{h(a)}, \forall a \in A\}$.

   a) Probar que $\hat{A}_s$ es un subconjunto cerrado de $\hat{A}$, y que el mapa $A \to C_0(\hat{A}_s)$: $a \mapsto \hat{a}\big|_{\hat{A}_s}$ es un *-homomorfismo de álgebras.

   b) Supongamos que X es un espacio de Hausdorff localmente compacto y que $\alpha : X \to X$ es un homeomorfismo tal que $\alpha^2 = id$. Si $a \in A := C_0(X)$ definimos $a^\star \in C_0(X)$ como $a^\star(x) := \overline{a\big(\alpha(x)\big)}$, $\forall x \in X$. Probar que $(A, \star, \| \ \|_\infty)$ es una *-álgebra de Banach. Comparar $\hat{A}$ y $\hat{A}_s$.

6. Si A es un álgebra de Banach con unidad y $S \subseteq A$, entonces la familia de subálgebras de Banach con unidad que contiene a S es no vacía, y su intersección es también un álgebra de Banach con unidad que contiene a S. Diremos que es el álgebra de Banach con unidad generada por F dentro de A. Supongamos que A es conmutativa y que $F := \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$ genera A como álgebra de Banach con unidad. Demostrar que $\hat{A}$ es homeomorfo a un subconjunto cerrado de $\sigma(a_1) \times \cdots \times \sigma(a_n) \subseteq \mathbb{C}^n$.

7. Sea $b : [0,1] \to \mathbb{C}$ acotada y continua salvo en $1/2$. Sea A la subálgebra de $\ell^\infty[0,1]$ generada por b y $C[0,1]$. Determinar el espacio de Gelfand $\hat{A}$.

8. Supóngase que a y b son elementos normales de dos C^*-álgebras con unidad. Probar que $\sigma(a) = \sigma(b)$ si y sólo si existe un isomorfismo $\Phi : C^*(1, a) \to C^*(1, b)$ tal que $\phi(a) = b$.

9. Sean X un espacio localmente compacto de Hausdorff y $A := C_0(X)$. Si τ es la topología de X e $\mathcal{I}(A)$ es la familia de ideales (cerrados) de A, probar que el mapa $\Psi : \tau \to \mathcal{I}(A)$ tal que $U \overset{\Psi}{\mapsto} C_0(U)$ es un isomorfismo de reticulados. Mostrar que $U \in \tau$ es denso si y sólo si $C_0(U)$ es un ideal esencial de A.

10. Sean A y B C^*-álgebras, y $\phi : A \to B$ un homomorfismo. Se dice que ϕ es no degenerado si el conjunto $\phi(A)B$ es denso en B.

    a) Supóngase que $\alpha : X \to Y$ es una función continua entre espacios de Hausdorff localmente compactos, y para $g \in C_0(Y)$ sea $\alpha_*(g) := g \circ \alpha$. Probar que $\alpha_*(g) \in C_0(X)$ $\forall g \in C_0(Y)$ si y sólo si α es propia (es decir: $\alpha^{-1}(K)$ es compacto en X para todo subconjunto compacto $K \subseteq Y$).

    b) En la situación de *a*), probar que si α es propia entonces α_* es un homomorfismo no degenerado.

    c) Probar que la composición de homomorfismos no degenerados es un homomorfismo no degenerado.

    d) Probar que las categorías de espacios de Hausdorff localmente compactos y funciones continuas propias es equivalente a la categoría de C^*-álgebras conmutativas y homomorfismos no degenerados.

11. *a*) Probar que si $\phi : A \to M(B)$ es un homomorfismo no degenerado en el sentido del Ejercicio 9, donde $M(B)$ es el álgebra de multiplicadores de B, entonces ϕ se extiende de manera única a un homomorfismo $\bar{\phi} : M(A) \to M(B)$. Diremos que ϕ es un morfismo de A a B.

    b) Sea C^* la categoría cuyos objetos son las C^*-álgebras y cuyos morfismos son los definidos en la parte previa. Probar que la categoría de espacios de Hausdorff localmente compactos y funciones continuas es equivalente a la subcategoría plena de C^* cuyos objetos son las C^*-álgebras conmutativas.

Para la aprobación del curso: entregar los ejercicios 7, 9, 10 y al menos otros dos.
Fecha límite: lunes 4 de mayo.