Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebras de Operadores–Curso 2020

Lista 1 de ejercicios

1. *a*) Demostrar que la completación de un álgebra normada (o $*$-álgebra normada) tiene una estructura natural de álgebra de Banach (respectivamente: $*$-álgebra de Banach).

   b) Sea $A := \mathbb{C}[X]$ el álgebra de polinomios con coeficientes complejos. Si $a = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j X^j \in A$ se definen:

$$\|a\| := \text{máx}\{|a(t)| : t \in [0,1]\} \qquad y \qquad \|a\|' := \sum_{j=0}^{n} |\alpha_j|.$$

   Probar que $(A, \| \, \|)$ y $(A, \| \, \|')$ son álgebras normadas, y hallar las correspondientes completaciones.

2. Considérese un álgebra A. Probar que $\tilde{A}$ es la "menor" álgebra con unidad que contiene a A como ideal propio. Más precisamente: si B es un álgebra con unidad y $A \lhd B$, $A \neq B$, entonces existe un único homomorfismo de álgebras $\phi : \tilde{A} \to B$ tal que $\phi(1) = 1$ y $\phi\big|_A =$ inclusión canónica de A en B. Mostrar que si además B es un álgebra normada, entonces ϕ es un homomorfismo continuo.

3. Sean A el álgebra del disco, y $A_0 := \{a \in A : a(0) = 0\}$. Probar que A_0 es un álgebra de Banach que tiene un ideal maximal que no es modular.

4. Sean A un álgebra de Banach con unidad y $(a_n) \subset \text{Inv}(A)$ una sucesión convergente a $a \in A$. Probar que $a \in \text{Inv}(A)$ si y sólo si $\{\|a_n^{-1}\|\}$ está acotado.

5. Sea A un álgebra de Banach con unidad. Se dice que un elemento no nulo $a \in A$ es un *divisor topológico de cero* si existe una sucesión $(b_n) \subset A$ tal que $\|b_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\text{lím}_n b_n a = \text{lím}_n a b_n = 0$.

   a) Probar que los divisores topológicos de cero no son invertibles.

   b) Probar que si $a \neq 0$ no es invertible y es de acumulación de $\text{Inv}(A)$, entonces es un divisor topológico de cero (sugerencia: usar el ejercicio anterior).

   c) Deducir que A tiene divisores topológicos de cero, a menos que $A = \mathbb{C}$.

6. Sea A un álgebra, y sean $a, b \in A$. Mostrar que $\sigma(ab) \Delta \sigma(ba) \subseteq \{0\}$ (Sugerencia: si $u := (1 - xy)^{-1}$ existe, entonces $(1 - yx)^{-1}$ también, y es igual $1 + yux$). Dar un ejemplo en el que se tenga $\sigma(ab) \Delta \sigma(ba) = \{0\}$. Probar que si A es un álgebra normada con unidad no existen elementos $a, b \in A$ tales que $ab - ba = 1$.

7. Sean A un álgebra de Banach, $a \in A$, y $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto tal que $\sigma(a) \subseteq U$. Probar que existe $\delta > 0$ tal que $\sigma(b) \subseteq U$ siempre que $\|a - b\| < \delta$. Deducir que:

a) Si $a_n \to a$, $\alpha_n \in \sigma(a_n)$ y $\alpha_n \to \alpha$, entonces $\alpha \in \sigma(a)$

b) $a \mapsto r(a)$ es una función semicontinua superiormente, es decir: $r^{-1}(-\infty, \alpha)$ es abierto en A, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Si además a es tal que $r(a) = 0$, entonces r es continua en a. ¿Se puede decir algo más cuando A es conmutativa?

8. Sea A un álgebra.

   a) Probar que $I \mapsto I \cap A$ es una biyección entre el conjunto de ideales maximales de $\tilde{A}$ diferentes de A y el conjunto de ideales regulares maximales de A.

   b) Sean X un espacio de Hausdorff localmente compacto y X_∞ su compactificación con un punto. Hallar el conjunto de ideales maximales de $C(X_\infty)$ y el conjunto de ideales regulares maximales de $C_0(X)$.

9. Sean A un álgebra de Banach con unidad, $a \in A$, y $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función racional que no tiene polos en $\sigma(a)$. Supongamos que $f = g/h$, donde g y h son polinomios. Probar que $h(a)$ es invertible. Mostrar que $f(a) := g(a)h(a)^{-1}$ depende sólo de f, y demostrar que $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$.

10. Sea $A := L^1(\mathbb{R}, \frac{m}{\sqrt{2\pi}})$, donde m es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

    a) Si $a, b \in A$ son no negativas, la *convolución* de a con b en $t \in \mathbb{R}$ es por definición la integral $a * b(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} a(t-s)b(s)ds \in [0, +\infty]$. Probar que la convolución $a * b$ de a con b es una función medible, y también que $a * b \in A$. Concretamente, mostrar que $\|a * b\|_1 \leq \|a\|_1 \|b\|_1$ (notar que $\| \ \|_1$ es con respecto a la medida $\frac{m}{\sqrt{2\pi}}$, así que si $a \in A$: $\|a\|_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |a(t)|dt$).

    b) Sean ahora a y b elementos arbitrarios de A. Probar que la convolución de a con b en t, definida de nuevo como $a * b(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} a(t-s)b(s)ds$, existe para casi todo t, y que $a * b \in A$.

    c) Dado $a \in A$, se define a^* como $a^*(t) := \overline{a(-t)}$. Probar que $a \mapsto a^*$ es una involución en A, y que con esta involución y la convolución definida en la parte anterior, A es una $*$-álgebra de Banach con conmutativa sin unidad.

    d) Sea $a \in A$ tal que $a(t) = \frac{1-|t|}{\sqrt{2\pi}} \chi_{[-1,1]}$. Probar que $a = b^* * b$, donde $b = \chi_{[0,1]}$, y deducir que $\sigma(a) \subseteq [0, \frac{1}{2\pi}]$. Calcular $\hat{a}$ y concluir que $\sigma(a) = [0, \frac{1}{2\pi}]$.

Para la aprobación del curso: entregar los ejercicios 5, 7 y al menos otros dos.
Fecha límite: lunes 13 de abril.