

Introducción

En 1932 John von Neumann publicó su libro: *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*¹, título que describe claramente las intenciones de su autor. En dicha obra von Neumann utiliza los espacios de Hilbert y los operadores en espacios de Hilbert para formalizar, en el marco de la mecánica cuántica, conceptos de la física clásica tales como el espacio de fases, los estados, los observables y las transformaciones de un sistema. De este modo los estados son representados por vectores de longitud igual a uno en un espacio de Hilbert, los observables por operadores autoadjuntos, la dinámica de un sistema es expresada a través de un grupo de operadores unitarios, etc.

Los observables de un cierto sistema cuántico generan, algebraicamente, una cierta $*$ -álgebra, que puede completarse topológicamente en más de una manera. La forma en que lo hizo von Neumann fue con respecto a la hoy llamada topología débil de operadores, en la cual una red (T_i) de operadores converge a un operador T si y sólo si $\langle T_i \xi, \eta \rangle \rightarrow \langle T \xi, \eta \rangle$ para todo par de vectores ξ y η del espacio de Hilbert involucrado. Este tipo de álgebras de operadores se llaman hoy *álgebras de von Neumann*, y fueron intensamente estudiadas por von Neumann en colaboración con F. Murray en la década de los años 30, cuya motivación inicial era desarrollar una herramienta útil para el estudio de las representaciones de grupos y la mecánica cuántica.

Otra forma de completarlas es en relación a la norma de operadores, lo que da lugar a las llamadas C^* -álgebras. Toda álgebra de von Neumann es también una C^* -álgebra, pero los puntos de vista y las técnicas utilizadas para estudiar unas y otras son en muchos casos muy diferentes, si bien la interacción entre ambas teorías es muy abundante y fértil. Los primeros resultados importantes acerca de las C^* -álgebras son del año 1943, cuando Israel Gelfand y Mark Naimark probaron dos teoremas fundamentales. En uno de ellos caracterizan de manera abstracta a las C^* -álgebras en general. En otro muestran que las C^* -álgebras conmutativas con unidad son esencialmente lo mismo que los espacios compactos de Hausdorff. Con algo más de precisión: para cualquier C^* -álgebra conmutativa existe un tal espacio X , esencialmente único, tal que el álgebra es isomorfa a $C(X)$, el álgebra de las funciones complejas continuas definidas en X y que se anulan en infinito.

La caracterización de las C^* -álgebras conmutativas como espacios de funciones continuas es el punto culminante de la teoría de Gelfand, que éste desarrolló en la década de 1930 bajo el auspicio de Kolmogorov. En esta teoría, que incorpora herramientas algebraicas al análisis funcional, Gelfand estudia las álgebras normadas, y muestra que aquellas que son conmutativas

¹En realidad la versión original está escrita en alemán, la versión en inglés es de 1955.

pueden, hasta cierto punto, pensarse también como espacios de funciones continuas. Aparentemente una motivación importante para el trabajo de Gelfand fue un sorprendente teorema de Norbert Wiener de 1932: si la serie de Fourier de $f : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ es absolutamente convergente y f no se anula en ningún punto, entonces la serie de Fourier de $1/f$ también es absolutamente convergente. El primer gran éxito de la teoría de Gelfand fue la de proveer una sencilla demostración de este teorema utilizando las herramientas por él desarrolladas.

Durante unos cuantos años, hasta la década de 1960, el desarrollo principal de las álgebras de operadores estuvo en torno a su teoría de representaciones. En la década de los setenta la teoría de álgebras de von Neumann tienen un gran impulso con el advenimiento de la teoría de Tomita-Takesaki y los notables teoremas de Alain Connes de clasificación de álgebras de von Neumann inyectivas. Es también en esta década que Mark Rieffel introduce una versión adecuada de equivalencia Morita en el contexto de las C^* -álgebras, y que irrumpe la topología no conmutativa con el desarrollo de la K -teoría y la K -homología, en particular cuando George Elliott muestra que el grupo ordenado K_0 es un invariante completo para las C^* -álgebras aproximadamente finitas. A partir de los años 80 el área vivió una verdadera explosión, incorporando ideas y técnicas de varias ramas de la matemática, que llevaron al desarrollo de la KK -teoría, la cohomología cíclica, etc., en buena medida alentados por el vasto programa de la geometría no conmutativa de A. Connes. También de esta década son el célebre trabajo de Vaughan Jones sobre álgebras de von Neumann y teoría de nudos, y el comienzo del desarrollo de la probabilidad no conmutativa por parte de Dan Voiculescu. A partir de los noventa la clasificación de álgebras de operadores a partir de invariantes de K -teoría cobró un gran vigor y obtuvo algunos éxitos resonantes, como el teorema de clasificación de Kirchberg-Phillips. También se fueron desarrollando nuevas técnicas, como una gran diversidad de productos cruzados y otras construcciones, como las C^* -álgebras de grafos o de grupoides.

En estas breves notas nos limitamos a presentar los elementos más básicos de las teorías de las álgebras de Banach y de las C^* -álgebras. Sin perjuicio de ello incluimos algunos ejemplos que corresponden a desarrollos más recientes y que no necesitan de herramientas demasiado sofisticadas para ser abordados.