1. Repaso y complementos
   - Operadores en espacios de Hilbert.
   - Representaciones.
     - Sumas directas y subrepresentaciones
     - Operadores de intercambio y conmutantes.

2. Representaciones (continuación)
   - Representaciones de C*-álgebras conmutativas (I).
   - C*-álgebras de grupos discretos.

Topología SOT. Definida por la familia $\{q_h\}_{h\in\mathcal{H}}$, donde $q_h(T) = \|Th\|$. La red (T_i) SOT converge a T en $\mathrm{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ sii $T_i h \to Th$, $\forall h \in \mathcal{H}$.

Topología WOT. Definida por $\{q_{h,k}\}_{h\in\mathcal{H},\, k\in\mathcal{K}}$, donde $q_{h,k}(T) = |\langle Th, k\rangle|$. La red (T_i) WOT converge a T en $\mathrm{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ sii $\langle T_i h, k\rangle \to \langle Th, k\rangle$, $\forall h \in \mathcal{H},\ k \in \mathcal{K}$.

Es claro que $WOT \subseteq SOT \subseteq \tau_{\|\ \|}$.

Teorema

$\Big(\mathrm{B}(\mathcal{H},\mathcal{K}), SOT\Big)' = \Big(\mathrm{B}(\mathcal{H},\mathcal{K}), WOT\Big)' = span\Big\{\varphi_{h,k} :\ h \in \mathcal{H}, k \in \mathcal{K}\Big\}$, donde $\varphi_{h,k}(T) := \langle Th, k\rangle$, $\forall T \in \mathrm{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$.

Corolario

Si $X \subseteq \mathrm{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ es convexo, entonces: $\overline{X}^{SOT} = \overline{X}^{WOT}$.
Luego un subconjunto convexo C de $\mathrm{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ es SOT cerrado sii es WOT cerrado. En particular $\Big(\mathrm{B}(\mathcal{H},\mathcal{K}), SOT\Big)$ y $\Big(\mathrm{B}(\mathcal{H},\mathcal{K}), WOT\Big)$ tienen los mismos subespacios cerrados.

Representaciones

Definición

Una representación de una $*$-álgebra A en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un homomorfismo de $*$-álgebras $\pi : A \to B(\mathcal{H})$.

- *El **espacio esencial** de π es $\mathcal{H}_{ess} := \overline{span}\{\pi(a)\xi : a \in A, \xi \in \mathcal{H}\}$.*
- *El espacio **nulo** de π es $N(\pi) := \cap_{a\in A} \ker \pi(a)$.*
- *Se dice que π es **no degenerada** si $\mathcal{H}_{ess} = \mathcal{H}$.*

Proposición

Se tiene $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ess} \oplus N(\pi)$, o sea que $N(\pi) = \mathcal{H}_{ess}^{\perp}$. Luego π es no degenerada sii $N(\pi) = 0$.

Definición

*Se dice que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ es π**-invariante** si $\pi(a)\xi \in \mathcal{K}$ $\forall a \in A$, $\xi \in \mathcal{K}$. El reticulado de subespacios invariantes cerrados de π será denotado $\mathrm{Lat}(\pi)$.*

Proposición

Si $\mathcal{K} \in \mathrm{Lat}(\pi)$, *entonces* $\mathcal{K}^\perp \in \mathrm{Lat}(\pi)$.

Proposición

Sean $\mathcal{K} \leq \mathcal{H}$ *y* $P = P_{\mathcal{K}}^{\mathcal{H}} \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ *la proyección ortogonal de* $\mathcal{H}$ *sobre* $\mathcal{K}$. *Entonces* $\mathcal{K}$ *es* π*-invariante sii* $P\pi(a) = \pi(a)P$, $\forall a \in A$.

Proposición

Si (u_λ) *es una unidad aproximada de* A, *entonces* $\pi(u_\lambda) \to P_{ess}$ *en la topología SOT, donde* P_{ess} *es la proyección ortogonal de* $\mathcal{H}$ *en* $\mathcal{H}_{ess}$. *En consecuencia* π *es no degenerada sii* $SOT - \lim_\lambda \pi(u_\lambda) = Id_{\mathcal{H}}$.

Observación

En particular, si A *tiene unidad, entonces* $\pi(1)$ *es la proyección ortogonal de* $\mathcal{H}$ *sobre* $\mathcal{H}_{ess}$. *Luego* π *es no degenerada si y sólo si* $\pi(1) = Id_{\mathcal{H}}$.

Sumas directas

Definición (Suma directa de representaciones)

Sea $\pi_i : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_i)$ *una representación de* A, $\forall i \in I$, *y sea* $\mathcal{H} := \oplus_{i\in I}\mathcal{H}_i$ *la* ***suma directa*** *de los espacios de Hilbert* $\mathcal{H}_i$. *Entonces* $\pi := \oplus_{i\in I}\pi_i : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ *se define como:*

$$(\pi(a)h)(i) = \pi_i(a)(h(i)),\ \forall a \in A,\ h \in \mathcal{H},\ i \in I.$$

Definición

Se dice que la representación $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ *es* ***cíclica*** *si existe* $\xi \in \mathcal{H}$ *tal que* $\overline{\pi(A)\xi} = \mathcal{H}$. *En ese caso se dice que* ξ *es un vector* ***cíclico*** *para* π.

Definición

Se dice que π *es* ***reducible*** *si existe un subespacio cerrado* $\mathcal{K}$ π*-invariante, con* $0 \neq \mathcal{K} \neq \mathcal{H}$. *En caso contrario se dice que* π *es* ***irreducible***.

Subrepresentaciones

Definición

Si $\mathcal{K} \in \mathrm{Lat}(\pi)$ *y* $Q : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ *la proyección ortogonal de* $\mathcal{H}$ *sobre* $\mathcal{K}$*, la subrepresentación* $\pi^{(\mathcal{K})} : A \to \mathrm{B}(\mathcal{K})$ *de* π *obtenida por compresión de* π *al subespacio invariante* $\mathcal{K}$ *se define como:* $\pi^{(\mathcal{K})}(a) = Q\pi(a)Q^*$*. En otras palabras* $\pi^{(\mathcal{K})}(a)k = \pi(a)k \ \forall k \in \mathcal{K}$*.*

Por ejemplo cada sumando directo π_j de la suma directa $\pi = \oplus_{i \in I}\pi_i$ se puede ver como una subrepresentación de π.

Proposición

Sean $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ *una representación y* $\mathcal{K}$ *un subespacio* π*-invariante. Entonces* $\pi = \pi^{(\mathcal{K})} \oplus \pi^{(\mathcal{K}^\perp)}$*.*

Demostración.

Si $\xi = \xi_{\mathcal{K}} + \xi_{\mathcal{K}^\perp}$ en la descomposición $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp$ y $a \in A$, entonces $\pi(a)\xi = \pi(a)\xi_{\mathcal{K}} + \pi(a)\xi_{\mathcal{K}^\perp} = \pi^{(\mathcal{K})}(a)\xi_{\mathcal{K}} + \pi^{(\mathcal{K}^\perp)}(a)\xi_{\mathcal{K}^\perp}$. $\square$

Corolario

Si $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es de dimensión finita (o sea $\dim \mathcal{H} < \infty$), entonces π es suma directa de representaciones irreducibles.

Definición

Si $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es una representación, entonces $\pi^{(\mathcal{H}_{ess})}$ se llama **parte no degenerada** *de π.*

Notar que, por la Proposición anterior, $\pi = \pi^{(\mathcal{H}_{ess})} \oplus 0$, donde 0 es la representación nula en $N(\pi)$.

Operadores de intercambio y conmutantes.

Definición

Sean $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ *y* $\pi' : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}')$ *representaciones de* A*. Se dice que* $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ *es un* **operador de intercambio** *si*

$$T\pi(a) = \pi'(a)T, \quad \forall a \in A.$$

Pondremos $T : \pi \to \pi'$ *y* $\mathcal{I}(\pi, \pi') := \{T : \pi \to \pi'\}$*.*
Si T *es unitario diremos que* π *y* π' *son* **unitariamente equivalentes***.*
Si $\pi = \pi'$ *se escribe* $\pi(A)'$ *en lugar de* $\mathcal{I}(\pi, \pi')$*, y se dice que* $\pi(A)'$ *es el conmutante de* $\pi(A)$*.*

Proposición

Si $T \in \mathcal{I}(\pi, \pi')$*, entonces:*

1. $T(\mathrm{Lat}(\pi)) \subseteq \mathrm{Lat}(\pi')$.
2. *En particular si* π *y* π' *son unitariamente equivalentes, entonces:*
   (a) $\mathrm{Lat}(\pi)$ *y* $\mathrm{Lat}(\pi')$ *son reticulados isomorfos.*
   (b) π *es irreducible sii* π' *lo es.*

Proposición

$\mathcal{I}(\pi,\pi') := \{T : \pi \to \pi'\}$ es un subespacio WOT-cerrado de $\mathrm{B}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$, y el mapa $T \mapsto T^*$ es un isomorfismo antilineal entre $\mathrm{B}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$ y $\mathrm{B}(\mathcal{H}',\mathcal{H})$. En particular el conmutante $\pi(A)'$ es una C-álgebra WOT cerrada de $\mathrm{B}(\mathcal{H})$.*

Demostración.

Si $T_i \overset{WOT}{\to} T$, con $T_i \in \mathcal{I}(\pi,\pi')$, $\xi \in \mathcal{H}$, $\eta \in \mathcal{K}$, $a \in A$:

$$\begin{aligned}\langle T\pi(a)\xi,\eta\rangle &= \mathrm{lím}_i\langle T_i\pi(a)\xi,\eta\rangle = \mathrm{lím}_i\langle \pi'(a)T_i\xi,\eta\rangle \\ &= \langle T\xi,\pi'(a^*)\eta\rangle = \langle \pi'(a)T\xi,\eta\rangle.\end{aligned}$$

Entonces $T\pi(a) = \pi'(a)T$, de modo que $T \in \mathcal{I}(\pi,\pi')$. Para la segunda afirmación, tomando adjuntos:

$$T\pi(a) = \pi'(a)T\ \forall a \in A \iff \pi(b)T^* = T^*\pi'(b)\ \forall b \in A.$$

En particular $T \in \pi(A)' \iff T^* \in \pi(A)'$. Por otro lado, es inmediato verificar que si $\pi \overset{T}{\to} \pi'$ y $\pi' \overset{S}{\to} \pi''$, entonces $\pi \overset{ST}{\to} \pi''$. Por lo tanto $\pi(A)'$ es $\mathcal{I}(\pi,\pi')$ es una C*-álgebra (y $\mathcal{I}(\pi,\pi')$ es cerrado bajo la operación ternaria $(R,S,T) \mapsto RS^*T$). □

Si $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ y $P \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es una proyección ortogonal, entonces $P \in \pi(A)' \iff P(\mathcal{H}) \in \mathrm{Lat}(\pi)$. Por un lado, si $P \in \pi(A)'$, $\xi \in P(\mathcal{H})$:

$$\pi(a)\xi = \pi(a)P\xi = P\pi(a)\xi \in P(\mathcal{H}).$$

Entonces $P(\mathcal{H})$ es π-invariante. Supongamos ahora que $P(\mathcal{H}) \in \mathrm{Lat}(\pi)$, y sea $\eta \in \mathcal{H}$. Entonces $\pi(a)P\eta \in P(\mathcal{H})$ y por lo tanto $\pi(a)P\eta = P\pi(a)P\eta$, $\forall \eta \in \mathcal{H}$. Luego $\pi(a)P = P\pi(a)P \; \forall a \in A$, de donde (tomando adjuntos) $P\pi(a) = P\pi(a)P \; \forall a \in A$. Luego $P\pi(a) = \pi(a)P \; \forall a \in A$, o sea $P \in \pi(A)'$.

En particular se tiene:

Corolario

Una representación $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es irreducible si y sólo si $\pi(A)'$ no tiene proyecciones no triviales.

Finalmente, notar que, por definición, las subrepresentaciones de π están en biyección con las proyecciones pertenecientes a $\pi(A)'$.

Teorema (Lema de Schur)

Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ una representación no degenerada de la C-álgebra A. Entonces π es irreducible si y sólo si $\pi(A)' = \mathbb{C}Id_{\mathcal{H}_\pi}$.*

Demostración.

Supongamos π es irreducible, y sea $T \in \pi(A)'_{sa}$. Si existen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ en $\sigma(T)$, sean V_1 y V_2 entornos compactos disjuntos de estos puntos, y sean $f_1, f_2 \in C(\sigma(T))$ tales que $V_1 \prec f_1 \prec \mathbb{C} \setminus V_2$ y $V_1 \prec f_1 \prec \mathbb{C} \setminus V_1$. Entonces $T_j := f_j(T) \in \pi(A)'_+$ son no nulos, y $T_1 T_2 = 0$. Sea $\mathcal{K}_j := \overline{T_j(\mathcal{H}_\pi)}$. Entonces $\mathcal{K}_j$ es no nulo, y $\mathcal{K}_1 \perp \mathcal{K}_2$: si $\xi, \eta \in \mathcal{H}_\pi$, entonces

$$\langle T_1\xi, T_2\eta\rangle = \langle \xi, T_1^* T_2(\eta)\rangle = \langle \xi, \bar{f}_1 f_2(T)\eta\rangle = \langle \xi, 0(\eta)\rangle = 0.$$

Luego $0 \neq K_j \neq \mathcal{H}_\pi$. Además $\mathcal{K}_j$ es π-invariante: como $T_j \in \pi(A)'$, si $a \in A$, para cada $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ se tiene $\pi(a)T_j(\xi) = T_j\pi(a)(\xi) \in \mathcal{K}_j$. Por lo tanto π es reducible, lo que contradice la hipótesis. Luego $\sigma(T) = \{\lambda\}$, y entonces $T = \lambda Id_{\mathcal{H}_\pi}$ (pues $\|T - \lambda\| = r(T - \lambda) = 0$). Como $\pi(A)'_{sa}$ genera linealmente $\pi(A)'$, se concluye que $\pi(A)' = \mathbb{C}Id_{\mathcal{H}_\pi}$.
Recíprocamente, como $\mathbb{C}Id_{\mathcal{H}_\pi}$ no tiene proyecciones no triviales, entonces π es irreducible. $\square$

Proposición

Toda representación no degenerada es (unitariamente equivalente a una) suma directa de representaciones cíclicas.

Demostración.

Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ una representación. Sea $\mathcal{C}$ la colección de familias $\{\mathcal{H}_i\}_{i\in I}$ de subespacios dos a dos ortogonales de $\mathcal{H}$ y tales que $\mathcal{H}_i$ es π-invariante y $\pi^{(\mathcal{H}_i)}$ es cíclica. Ordenamos $\mathcal{C}$ por inclusión. Una aplicación estándar del Lema de Zorn muestra que $\mathcal{C}$ tiene un elemento maximal $\{\mathcal{H}_j\}_{j\in J}$. Si $\sum_{j\in J}\mathcal{H}_j$ no fuera denso en $\mathcal{H}$, entonces existiría $0 \neq \xi \perp \mathcal{H}_j$ $\forall j$, y entonces $\{\overline{\pi(A)\xi}\} \cup \{\mathcal{H}_j\}_{j\in J} \in \mathcal{C}$ sería mayor estrictamente que un elemento maximal de $\mathcal{C}$, lo cual es absurdo. Luego es $\pi = \oplus_{j\in J}\pi^{(\mathcal{H}_j)}$. $\square$

Representaciones de C*-álgebras conmutativas (I).

Sea $A = C_0(X)$ una C*-álgebra conmutativa, y supongamos que μ es una medida positiva de Borel regular en X. Para cada $a \in A$, sea $M_a : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ tal que

$$M_a(f)(x) = a(x)f(x),\ \forall f \in L^2(\mu).$$

Entonces

$$\begin{aligned}\|M_a(f)\|_2 &= \textstyle\int_X |M_a(f)|^2 d\mu = \int_X |a(x)^2|\,|f(x)|^2 d\mu \\ &\leq \|a\|_\infty^2 \textstyle\int_X |f(x)|^2 d\mu = \|a\|_\infty^2 \|f\|_2^2,\end{aligned}$$

y por lo tanto $\|M_a\| \leq \|a\|_\infty$. Luego $M_a \in \mathrm{B}(L^2(\mu))$. Es claro que $M_{\alpha a + \beta b} = \alpha M_a + \beta M_b$, que $M_{ab} = M_a M_b$ (y que $M_1 = Id$ si X es compacto). Por último, si $f, g \in L^2(\mu)$:

$$\langle M_a(f), g\rangle = \int_X (af)\bar{g}\,d\mu = \int_X f\,\overline{(\bar{a}\,g)}\,d\mu = \langle f, M_{\bar{a}}(g)\rangle.$$

Entonces $M_{\bar{a}} = M_a^*$, y por lo tanto $M : A \to \mathrm{B}(L^2(\mu))$ tal que $a \mapsto M_a$ es una representación de A. Es no degenerada:

$f \in N(\pi) \iff af = 0\ ctp[\mu]\, \forall a \in C_0(X) \iff f = 0\ ctp[\mu]$.

Definición

Una representación unitaria de un grupo discreto G en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un homomorfismo de grupos $\rho : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ es el grupo de operadores unitarios de $\mathcal{H}$.

Sea G un grupo discreto, y sea $\ell^2(G) = L^2(G, \kappa)$, donde κ es la medida de conteo. Es decir $\ell^2(G) = \{x : G \to \mathbb{C} : \sum_{t \in G} |x(t)|^2 < \infty\}$. El espacio $\ell^2(G)$ es un espacio de Hilbert, con el producto interno dado por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{t \in G} x(t)\overline{y(t)}.$$

El siguiente mapa: $\begin{array}{rcl} \lambda : G & \longrightarrow & \mathrm{B}(\ell^2(G)), \\ t & \longmapsto & \lambda_t \end{array}$ donde $\lambda_t x(s) = x(t^{-1}s)$, es una representación unitaria de G en $\ell^2(G)$:

(1) $\lambda_e = \mathrm{Id}$ (e es la unidad de G).

(2) $\lambda_{t_1}\lambda_{t_2} = \lambda_{t_1 t_2}$, para todos $t_1, t_2 \in G$, pues si $x \in \ell^2(G)$ y $s \in G$:

$$\lambda_{t_1}(\lambda_{t_2}x)(s) = \lambda_{t_2}x(t_1^{-1}s) = x(t_2^{-1}t_1^{-1}s) = x((t_1 t_2)^{-1}s) = (\lambda_{t_1 t_2}x)(s).$$

(3) λ_t es una isometría:

$$\|\lambda_t x\|_2^2 = \sum_{s\in G} |\lambda_t x(s)|^2 = \sum_{s\in G} |x(t^{-1}s)|^2 = \sum_{r\in G} |x(r)|^2 = \|x\|_2^2.$$

(4) λ_t es unitario:
$\lambda_t\lambda_{t^{-1}} = \lambda_{tt^{-1}} = \lambda_e = \mathrm{Id} = \lambda_e = \lambda_{t^{-1}t} = \lambda_{t^{-1}}\lambda_t$. Entonces $\lambda_t^* = \lambda_t^{-1}$ y es unitario.

Por lo tanto $\lambda : G \to \mathcal{U}(\ell^2(G))$ es una representación unitaria de G. Se llama *representación regular izquierda* de G.
Sea $\mathbb{C}G := \{a : G \to \mathbb{C} \text{ tal que } a \text{ tiene soporte finito}\}$. El conjunto $\{\delta_t\}_{t\in G}$, donde $\delta_t(s) = \delta_{t,s}$, es una base para $\mathbb{C}G$. Entonces $a = \sum_{t\in G} a(t)\delta_t$, $\forall a \in \mathbb{C}G$.

En $\mathbb{C}G$ se define un producto extendiendo por bilinealidad el producto de G: si $a, b \in \mathbb{C}G$, entonces

$$ab = (\sum_{r \in G} a(r)\delta_r)(\sum_{s \in G} b(s)\delta_s) = \sum_{r,s \in G} a(t)b(s)\delta_{rs}.$$

Luego

$$ab(t) = \sum_{r,s \in G} a(r)b(s)\delta_{rs}(t) = \sum_{\{r,s \in G : rs = t\}} a(r)b(s) = \sum_{r \in G} a(r)b(r^{-1}t),$$

de manera que $ab = \sum_{t \in G} \left(\sum_{r \in G} a(r)b(r^{-1}t)\right) \delta_t$.
Clásicamente se escribe $a * b$ en lugar de ab, y a este producto se lo llama *convolución de* a y b.
También se define en $\mathbb{C}G$ una involución, que extiende a la inversión del grupo por antilinealidad: si $a = \sum_{t \in G} a(t)\delta_t \in \mathbb{C}G$, entonces

$$a^* = \sum_{t \in G} \overline{a(t)}\delta_{t^{-1}} = \sum_{t \in G} \overline{a(t^{-1})}\delta_t.$$

Es decir $a^*(t) = \overline{a(t^{-1})}$.

Con estas operaciones $\mathbb{C}G$ se torna una $*$-álgebra compleja, que además tiene unidad: δ_e.
Extendiendo por linealidad la representación unitaria λ se obtiene un mapa -también llamado λ- sobre la $*$-álgebra $\mathbb{C}G$ dado por:

$$\begin{array}{rcl} \lambda : \mathbb{C}G & \longrightarrow & \mathrm{B}(\ell^2(G)) \\ \sum_{t\in G} a_t\delta_t & \longmapsto & \sum_{t\in G} a_t\lambda_t. \end{array}$$

Como $\lambda : G \to \mathcal{U}(\ell^2(G))$ es un homomorfismo de grupos, entonces $\lambda : \mathbb{C}G \to \mathrm{B}(\ell^2(G))$ es un homomorfismo de $*$-álgebras. Sean $a \in \mathbb{C}G$, $x \in \ell^2(G)$ y $s \in G$; entonces:

$$\lambda(a)x(s) = \left(\sum_{t\in G} a(t)\lambda_t\right)x(s) = \sum_{t\in G} a(t)(\lambda_t x)(s) = \sum_{t\in G} a(t)x(t^{-1}s).$$

Es decir que $\lambda(a)x = a * x$ para todo $x \in \ell^2(G)$. Si $\lambda(a) = 0$, entonces $\lambda(a)x = 0$ para todo $x \in \ell^2(G)$. En particular $0 = \lambda(a)\delta_e = a * \delta_e = a$, de donde sigue que λ es inyectivo. Conclusión: $\lambda : \mathbb{C}G \to \mathcal{U}(\ell^2(G))$ es un $*$-homomorfismo inyectivo de $*$-álgebras.

Definición

Si G es un grupo discreto, la C^*-**álgebra reducida de** G *es*

$$C_r^*(G) := \overline{\lambda(\mathbb{C}G)} \subseteq \mathrm{B}(\ell^2(G)).$$

Si $u : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ es una representación unitaria de G en $\mathcal{H}$, el mismo tipo de cálculos que hicimos anteriormente para la representación regular izquierda λ lo podemos hacer también para u, y obtenemos una representación unital $\pi_u : \mathbb{C}G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$, tal que $\pi_u(a) = \sum_{t\in G} a(t)u_t$. Nótese que

$$\|\pi_u(a)\| = \|\sum_{t\in G} a(t)u_t\| \leq \sum_{t\in G} |a(t)|\,\|u_t\| = \sum_{t\in G} |a(t)| = \|a\|_1.$$

Por lo tanto

$$\|a\|_1 \geq \|a\|_\mu := \sup\{\|\pi_u(a)\| : u \text{ es una representación unitaria de } G\}.$$

Entonces $\| \ \|_\mu$ es una C^*-norma en $\mathbb{C}G$, mayor o igual a $\| \ \|_r$, la C*-norma proveniente de la C^*-álgebra reducida.

Definición

Si G es un grupo discreto, la C^*-`álgebra plena de` G es la completación de $\mathbb{C}G$ con repecto a $\| \ \|_\mu$.

Nótese que $u \mapsto \pi_u$ es una biyección entre las representaciones unitarias de G y las representaciones no degeneradas de $C^*(G)$; la inversa está dada por $\pi \mapsto u_\pi$, tal que $u_\pi(t) := \pi(\delta_t)$.

Como $\| \ \|_r \leq \| \ \|_\mu$, el mapa identidad $id : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}G$ se extiende por continuidad a un homomorfismo sobreyectivo $C^*(G) \to C^*_r(G)$ (también es denotado por λ), y por lo tanto $C^*_r(G)$ es un cociente de $C^*(G)$.

En general $C^*(G)$ y $C^*_r(G)$ pueden ser objetos muy diferentes. Por ejemplo, se puede probar que $C^*_r(\mathbb{F}_2)$ es simple (no tiene ideales no triviales). Mientras tanto $C^*(\mathbb{F}_2)$ está lleno de ideales no triviales. En efecto, como $\mathbb{F}_2$ es el grupo libre en dos generadores g_1 y g_2, dar una representación u de $\mathbb{F}_2$ en $\mathcal{H}$ equivale a dar un par de operadores unitarios $U_1, U_2 \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ y establecer $u(g_i) := U_i$.

Por ejemplo para cada n podemos tomar la matriz, digamos V_n, asociada a la permutación $e_i \mapsto e_{i+1}$ si $i < n$, $e_n \mapsto e_1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y definir: $u^{(n)}(g_1) = Id_n$, $u^{(n)}(g_2) = V_n$. Entonces $\pi_{u^{(n)}}(C^*(\mathbb{F}_2)) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{C} V_n^j$, que tiene dimensión n porque $\{V_n^1, \ldots, V_n^n\}$ es l.i. Luego $\ker \pi_{u^{(n)}} \neq \ker \pi_{u^{(m)}}$ si $n \neq m$.

El homomorfismo λ en general no es inyectivo. Cuando sí lo es, y por lo tanto $C^*(G) = C_r^*(G)$, se dice que el grupo G es *promediable (''amenable'')*. Los grupos compactos y los abelianos son ejemplos de grupos promediables. Y el ejemplo que acabamos de ver muestra que $\mathbb{F}_2$ no es promediable.