

1 Operadores en espacios de Hilbert.

- Algunas topologías en $B(\mathcal{H})$

2 Representaciones.

- Sumas directas y subrepresentaciones
- Operadores de intercambio y conmutantes.
- Representaciones de C^* -álgebras conmutativas (I).
- C^* -álgebras de grupos discretos.

Operadores en espacios de Hilbert

Si $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ son espacios de Hilbert, entonces

$$B(\mathcal{H}, \mathcal{K}) := \{ T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K} : \|T\| := \sup_{\|h\| \leq 1} \|Th\| < \infty \}.$$

Del Teorema de Representación de Riesz se deduce:

- Para cada $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ existe un único $T^* \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ tal que $\langle Th, k \rangle = \langle h, T^*k \rangle, \forall h \in \mathcal{H}, k \in \mathcal{K}$.
- $T \mapsto S_T$ tal que $S_T(h, k) := \langle Th, k \rangle$ es un isomorfismo isométrico entre $B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ y el espacio de las formas sesquilineales acotadas en $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ (la norma de una forma sesquilineal $S : \mathcal{H} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C}$ es $\|S\| := \sup_{\|h\|, \|k\| \leq 1} |S(h, k)|$).

Definición

Una C^ -álgebra concreta es una $*$ -subálgebra de $B(\mathcal{H})$ que es cerrada en la topología de la norma.*

Algunas topologías en $B(\mathcal{H})$

Topología SOT. La topología fuerte de operadores en $B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ es la topología localmente convexa definida por la familia de seminormas $\{q_h : h \in \mathcal{H}\}$, donde $q_h(T) = \|Th\|$. Por lo tanto una red (T_i) SOT converge a T en $B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ sii $T_i h \rightarrow Th, \forall h \in \mathcal{H}$.

Topología WOT. La topología débil de operadores en $B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ es la topología localmente convexa definida por la familia de seminormas $\{q_{h,k} : h \in \mathcal{H}, k \in \mathcal{K}\}$, donde $q_{h,k}(T) = |\langle Th, k \rangle|$. Por lo tanto una red (T_i) WOT converge a T en $B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ sii $\langle T_i h, k \rangle \rightarrow \langle Th, k \rangle, \forall h \in \mathcal{H}, k \in \mathcal{K}$.

Es claro que $WOT \subseteq SOT \subseteq \tau_{\|\cdot\|}$.

Teorema

$(B(\mathcal{H}, \mathcal{K}), SOT)' = (B(\mathcal{H}, \mathcal{K}), WOT)' = \text{span}\{\varphi_{h,k} : h \in \mathcal{H}, k \in \mathcal{K}\},$
donde $\varphi_{h,k}(T) := \langle Th, k \rangle, \forall T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}).$

Demostración. Las inclusiones $\supseteq$ de izquierda a derecha son claras. Supongamos que $\varphi \in (B(\mathcal{H}, \mathcal{K}), SOT)'$. Entonces existen $h_1, \dots, h_n \in \mathcal{H}$ tales que $|\varphi(T)| \leq \sum_{j=1}^n \|Th_j\|$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene entonces

$$|\varphi(T)| \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{j=1}^n \|Th_j\|^2} = \sqrt{n} \|(Th_1, \dots, Th_n)\|_{\mathcal{K}^n}, \quad (1)$$

Sean $\mathcal{L}_0 := \{(Th_1, \dots, Th_n) : T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})\} \leq \mathcal{K}^n$ y $\psi : \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\psi(Th_1, \dots, Th_n) := \varphi(T)$. Por (1) ψ es una funcional lineal bien definida y acotada. Entonces (Riesz) existe $(k_1, \dots, k_n) \in \mathcal{L} := \overline{\mathcal{L}_0}$ tal que

$$\varphi(T) = \psi(Th_1, \dots, Th_n) = \langle (Th_1, \dots, Th_n), (k_1, \dots, k_n) \rangle = \sum_{j=1}^n \langle Th_j, k_j \rangle.$$

En consecuencia $\varphi = \sum_{j=1}^n \varphi_{h_j, k_j}$.

Corolario

Si $X \subseteq B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ es convexo, entonces

$$\overline{X}^{SOT} = \overline{X}^{WOT}.$$

Luego un subconjunto convexo C de $B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ es SOT cerrado sii es WOT cerrado. En particular $(B(\mathcal{H}, \mathcal{K}), SOT)$ y $(B(\mathcal{H}, \mathcal{K}), WOT)$ tienen los mismos subespacios cerrados.

Demostración.

Teniendo en cuenta la Proposición previa, el resultado es apenas una consecuencia conocida del teorema de Hahn-Banach, según la cual la clausura de un conjunto convexo de un espacio de Banach E es la intersección de los semiespacios cerrados que lo contienen, y como tales semiespacios sólo dependen de las funcionales lineales continuas en E , entonces dichas clausuras quedan determinadas por E' . □

Representaciones

Definición

Una representación de una $*$ -álgebra A en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un homomorfismo de $*$ -álgebras $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$.

- El espacio esencial de π es $\mathcal{H}_{\text{ess}} := \overline{\text{span}}\{\pi(a)\xi : a \in A, \xi \in \mathcal{H}\}$.
- El espacio nulo de π es $N(\pi) := \bigcap_{a \in A} \ker \pi(a)$.
- Se dice que π es no degenerada si $\mathcal{H}_{\text{ess}} = \mathcal{H}$.

Proposición

Se tiene $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{ess}} \oplus N(\pi)$, o sea que $N(\pi) = \mathcal{H}_{\text{ess}}^\perp$. Luego π es no degenerada sii $N(\pi) = 0$.

Demostración. $h \in N(\pi) \iff \pi(a)h = 0 \forall a \in A \iff \langle \pi(a)h, k \rangle = 0 \forall a \in A, k \in \mathcal{H} \iff \langle h, \pi(a^*)k \rangle = 0 \forall a \in A, k \in \mathcal{H} \iff h \in \mathcal{H}_{\text{ess}}^\perp$.

Definición

Se dice que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ es π -invariante si $\pi(a)\xi \in \mathcal{K} \forall a \in A, \xi \in \mathcal{K}$. El reticulado de subespacios invariantes cerrados de π será denotado $\text{Lat}(\pi)$.

Proposición

Si $\mathcal{K} \in \text{Lat}(\pi)$, entonces $\mathcal{K}^\perp \in \text{Lat}(\pi)$.

Demostración.

Sean $a \in A$, $\xi \in \mathcal{K}$ y $\eta \in \mathcal{K}^\perp$. Como $\mathcal{K}$ es π -invariante se tiene:

$$0 = \langle \pi(a^*)\xi, \eta \rangle = \langle \pi(a)^*\xi, \eta \rangle = \langle \xi, \pi(a)\eta \rangle,$$

de donde $\pi(a)\eta \perp \xi$, de modo que $\pi(a)\eta \in \mathcal{K}^\perp$. □

Proposición

Sean $\mathcal{K} \leq \mathcal{H}$ y $P = P_{\mathcal{K}}^{\mathcal{H}} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre $\mathcal{K}$. Entonces $\mathcal{K}$ es π -invariante sii $P\pi(a) = \pi(a)P$, $\forall a \in A$.

Demostración.

Si $\mathcal{K}$, y por lo tanto $\mathcal{K}^\perp$, son π -invariantes, dado $\xi \in \mathcal{H}$ se tiene $\pi(a)P\xi = P\pi(a)P\xi + (Id - P)\pi(a)P\xi = P\pi(a)P\xi$, de modo que $\pi(a)P = P\pi(a)P \forall a \in A$. Tomando adjuntos se concluye que $P\pi(a) = P\pi(a)P = \pi(a)P \forall a \in A$. Luego $P\pi(a) = \pi(a)P$, $\forall a \in A$. El recíproco es evidente. □

Proposición

Si (u_λ) es una unidad aproximada de A , entonces $\pi(u_\lambda) \rightarrow P_{ess}$ en la topología SOT , donde P_{ess} es la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}_{ess}$. En consecuencia π es no degenerada sii $SOT - \lim_\lambda \pi(u_\lambda) = Id_{\mathcal{H}}$.

Demostración.

Como $\mathcal{H}_{ess}$ es π -invariante, se tiene $P_{ess}\pi(a) = \pi(a)P_{ess} \forall a \in A$. Luego si $a \in A$ y $\xi \in \mathcal{H}$, entonces

$$\pi(a)\xi = \lim_\lambda \pi(u_\lambda a)\xi = \lim_\lambda \pi(u_\lambda)\pi(a)\xi,$$

de donde $\eta = \lim_\lambda \pi(u_\lambda)\eta, \forall \eta \in \mathcal{H}_{ess}$. Y como $P_{ess}\pi(a) = \pi(a)P_{ess} \forall a$:
 $P_{ess}\xi = \lim_\lambda \pi(u_\lambda)P_{ess}\xi = \lim_\lambda P_{ess}\pi(u_\lambda)\xi = P_{ess} \lim_\lambda \pi(u_\lambda)\xi = \lim_\lambda \pi(u_\lambda)\xi$.

Esto muestra que $SOT - \lim_\lambda \pi(u_\lambda) = P_{ess}$. Ahora la última afirmación sigue inmediatamente. □

Observación

En particular, si A tiene unidad, entonces $\pi(1)$ es la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre $\mathcal{H}_{ess}$. Luego π es no degenerada si y sólo si $\pi(1) = Id_{\mathcal{H}}$.

Sumas directas

Definición (Suma directa de representaciones)

Sea $\pi_i : A \rightarrow B(\mathcal{H}_i)$ una representación de A , $\forall i \in I$, y sea $\mathcal{H} := \oplus_{i \in I} \mathcal{H}_i$ la suma directa de los espacios de Hilbert $\mathcal{H}_i$. Entonces $\pi := \oplus_{i \in I} \pi_i : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ se define como:

$$(\pi(a)h)(i) = \pi_i(a)(h(i)), \quad \forall a \in A, h \in \mathcal{H}, i \in I.$$

Definición

Se dice que la representación $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ es *cíclica* si existe $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\overline{\pi(A)\xi} = \mathcal{H}$. En ese caso se dice que ξ es un vector *cíclico* para π .

Definición

Se dice que π es *reducible* si existe un subespacio cerrado $\mathcal{K}$ π -invariante, con $0 \neq \mathcal{K} \neq \mathcal{H}$. En caso contrario se dice que π es *irreducible*.

Notar que π es irreducible sii todo vector no nulo $\xi \in \mathcal{H}$ es cíclico para π .

Subrepresentaciones

Supongamos que $\mathcal{K} \in \text{Lat}(\pi)$, y sea $Q : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre $\mathcal{K}$. Definamos $\pi^{(\mathcal{K})} : A \rightarrow B(\mathcal{K})$ como $\pi^{(\mathcal{K})}(a) = Q\pi(a)\iota$, donde $\iota : \mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{H}$ es la inclusión canónica. Es decir $\pi^{(\mathcal{K})}(a)(k) = \pi(a)k$, $\forall k \in \mathcal{K}$. Como $\iota = Q^*$, $Q^*Q = P_{\mathcal{K}}^{\mathcal{H}}$, y $QQ^* = Id_{\mathcal{K}}$, se tiene

$$\begin{aligned}\pi^{(\mathcal{K})}(a)\pi^{(\mathcal{K})}(b) &= Q\pi(a)Q^*Q\pi(b)Q^* = Q\pi(a)P_{\mathcal{K}}^{\mathcal{H}}\pi(b)Q^* = Q\pi(a)\pi(b)Q^* \\ &= Q\pi(ab)Q^* = \pi^{(\mathcal{K})}(ab), \quad y\end{aligned}$$

$$\pi^{(\mathcal{K})}(a^*) = Q\pi(a^*)Q^* = Q\pi(a)^*Q^* = \left(Q\pi(a)Q^*\right)^* = \pi^{(\mathcal{K})}(a)^*.$$

En otras palabras $\pi^{(\mathcal{K})} : A \rightarrow B(\mathcal{K})$ es una representación de A .

Definición

La representación $\pi^{(\mathcal{K})} : A \rightarrow B(\mathcal{K})$ es la subrepresentación de π obtenida por compresión de π al subespacio invariante $\mathcal{K}$.

Por ejemplo cada sumando directo π_j de la suma directa $\pi = \bigoplus_{i \in I} \pi_i$ se puede ver como una subrepresentación de π .

Proposición

Sean $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ una representación y $\mathcal{K}$ un subespacio π -invariante. Entonces $\pi = \pi^{(\mathcal{K})} \oplus \pi^{(\mathcal{K}^\perp)}$.

Demostración.

Si $\xi = \xi_{\mathcal{K}} + \xi_{\mathcal{K}^\perp}$ en la descomposición $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp$ y $a \in A$, entonces $\pi(a)\xi = \pi(a)\xi_{\mathcal{K}} + \pi(a)\xi_{\mathcal{K}^\perp} = \pi^{(\mathcal{K})}(a)\xi_{\mathcal{K}} + \pi^{(\mathcal{K}^\perp)}(a)\xi_{\mathcal{K}^\perp}$.



Corolario

Si $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ es de dimensión finita (o sea $\dim \mathcal{H} < \infty$), entonces π es suma directa de representaciones irreducibles.

Definición

Si $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ es una representación, entonces $\pi^{(\mathcal{H}_{ess})}$ se llama *parte no degenerada* de π .

Notar que, por la Proposición anterior, $\pi = \pi^{(\mathcal{H}_{ess})} \oplus 0$, donde 0 es la representación nula en $N(\pi)$.

Operadores de intercambio y conmutantes.

Definición

Sean $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ y $\pi' : A \rightarrow B(\mathcal{H}')$ representaciones de A . Se dice que $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ es un operador de intercambio si

$$T\pi(a) = \pi'(a)T, \quad \forall a \in A.$$

Pondremos $T : \pi \rightarrow \pi'$ y $\mathcal{I}(\pi, \pi') := \{T : \pi \rightarrow \pi'\}$.

Si T es unitario diremos que π y π' son unitariamente equivalentes. Si $\pi = \pi'$ se escribe $\pi(A)'$ en lugar de $\mathcal{I}(\pi, \pi')$, y se dice que $\pi(A)'$ es el conmutante de $\pi(A)$.

Proposición

Si $T \in \mathcal{I}(\pi, \pi')$, entonces $T(\text{Lat}(\pi)) \subseteq \text{Lat}(\pi')$. En particular si π y π' son unitariamente equivalentes, entonces sus reticulados de subespacios invariantes son isomorfos.

Demostración. Sean $\mathcal{K} \in \text{Lat}(\pi)$, y $\eta \in T(\mathcal{K})$, digamos $\eta = T\xi$, con $\xi \in \mathcal{K}$. Entonces $\pi'(a)\eta = \pi'(a)T\xi = T\pi(a)\xi \in T(\mathcal{K})$. Luego $T(\mathcal{K}) \in \text{Lat}(\pi')$. La última afirmación sigue directamente de la primera.

Corolario

Sean π y π' representaciones unitariamente equivalentes. Entonces π es irreducible sii π' lo es.

Proposición

$\mathcal{I}(\pi, \pi') := \{T : \pi \rightarrow \pi'\}$ es un subespacio WOT-cerrado de $B(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$, y el mapa $T \mapsto T^*$ es un isomorfismo antilineal entre $B(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ y $B(\mathcal{H}', \mathcal{H})$. En particular el conmutante $\pi(A)'$ es una C^* -álgebra WOT cerrada de $B(\mathcal{H})$.

Demostración. Si $T_i \xrightarrow{WOT} T$, con $T_i \in \mathcal{I}(\pi, \pi')$, $\xi \in \mathcal{H}$, $\eta \in \mathcal{K}$, $a \in A$:

$$\begin{aligned}\langle T\pi(a)\xi, \eta \rangle &= \lim_i \langle T_i\pi(a)\xi, \eta \rangle = \lim_i \langle \pi'(a)T_i\xi, \eta \rangle \\ &= \langle T\xi, \pi'(a^*)\eta \rangle = \langle \pi'(a)T\xi, \eta \rangle.\end{aligned}$$

Entonces $T\pi(a) = \pi'(a)T$. Para la segunda afirmación, tomando adjuntos:

$$T\pi(a) = \pi'(a)T \quad \forall a \in A \iff \pi(b)T^* = T^*\pi(b) \quad \forall b \in A.$$

Es inmediato verificar que si $\pi \xrightarrow{T} \pi'$ y $\pi' \xrightarrow{S} \pi''$, entonces $\pi \xrightarrow{ST} \pi''$ (de hecho las representaciones forman una categoría con los operadores de intercambio como morfismos). En particular $\mathcal{I}(\pi, \pi')$ es cerrado bajo la operación ternaria $(R, S, T) \mapsto RS^*T$.

Notar que si $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ y $P \in B(\mathcal{H})$ es una proyección ortogonal, entonces $P \in \pi(A)' \iff P(\mathcal{H}) \in \text{Lat}(\pi)$. Por lo tanto las subrepresentaciones de π están en biyección con las proyecciones pertenecientes a $\pi(A)'$. En particular π es irreducible si y sólo si $\pi(A)'$ no tiene proyecciones no triviales.

Proposición

Toda representación no degenerada es (unitariamente equivalente a una) suma directa de representaciones cíclicas.

Demostración.

Sea $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ una representación. Sea $\mathcal{C}$ la colección de familias $\{\mathcal{H}_i\}_{i \in I}$ de subespacios dos a dos ortogonales de $\mathcal{H}$ y tales que $\mathcal{H}_i$ es π -invariante y $\pi|_{\mathcal{H}_i}$ es cíclica. Ordenamos $\mathcal{C}$ por inclusión. Una aplicación estándar del Lema de Zorn muestra que $\mathcal{C}$ tiene un elemento maximal $\{\mathcal{H}_j\}_{j \in J}$. Si $\sum_{j \in J} \mathcal{H}_j$ no fuera denso en $\mathcal{H}$, entonces existiría $0 \neq \xi \perp \mathcal{H}_j \forall j$, y entonces $\{\overline{\pi(A)\xi}\} \cup \{\mathcal{H}_j\}_{j \in J} \in \mathcal{C}$ sería mayor estrictamente que un elemento maximal de $\mathcal{C}$, lo cual es absurdo. Luego es $\pi = \oplus_{j \in J} \pi|_{\mathcal{H}_j}$. $\square$

Representaciones de C^* -álgebras conmutativas (I).

Sea $A = C_0(X)$ una C^* -álgebra conmutativa, y supongamos que μ es una medida positiva de Borel regular en X . Para cada $a \in A$, sea $M_a : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu)$ tal que

$$M_a(f)(x) = a(x)f(x), \quad \forall f \in L^2(\mu).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|M_a(f)\|_2 &= \int_X |M_a(f)|^2 d\mu = \int_X |a(x)|^2 |f(x)|^2 d\mu \\ &\leq \|a\|_\infty^2 \int_X |f(x)|^2 d\mu = \|a\|_\infty^2 \|f\|_2^2, \end{aligned}$$

y por lo tanto $\|M_a\| \leq \|a\|_\infty$. Luego $M_a \in B(L^2(\mu))$. Es claro que $M_{\alpha a + \beta b} = \alpha M_a + \beta M_b$, que $M_{ab} = M_a M_b$ (y que $M_1 = Id$ si X es compacto). Por último, si $f, g \in L^2(\mu)$:

$$\langle M_a(f), g \rangle = \int_X (af) \bar{g} d\mu = \int_X f \overline{(\bar{a}g)} d\mu = \langle f, M_{\bar{a}}(g) \rangle.$$

Entonces $M_{\bar{a}} = M_a^*$, y por lo tanto $M : A \rightarrow B(L^2(\mu))$ tal que $a \mapsto M_a$ es una representación de A . Es no degenerada:

$$f \in N(\pi) \iff af = 0 \text{ ctp}[\mu] \forall a \in C_0(X) \iff f = 0 \text{ ctp}[\mu].$$

Definición

Una representación unitaria de un grupo discreto G en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un homomorfismo de grupos $\rho : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ es el grupo de operadores unitarios de $\mathcal{H}$.

Sea G un grupo discreto, y sea $\ell^2(G) = L^2(G, \kappa)$, donde κ es la medida de conteo. Es decir $\ell^2(G) = \{x : G \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{t \in G} |x(t)|^2 < \infty\}$. El espacio $\ell^2(G)$ es un espacio de Hilbert, con el producto interno dado por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{t \in G} x(t) \overline{y(t)}.$$

El siguiente mapa: $\lambda : G \longrightarrow \mathcal{B}(\ell^2(G))$, donde $\lambda_t x(s) = x(t^{-1}s)$, es

$$t \longmapsto \lambda_t$$

una representación unitaria de G en $\ell^2(G)$:

(1) $\lambda_e = \text{Id}$ (e es la unidad de G).

(2) $\lambda_{t_1} \lambda_{t_2} = \lambda_{t_1 t_2}$, para todos $t_1, t_2 \in G$, pues si $x \in \ell^2(G)$ y $s \in G$:

$$\lambda_{t_1}(\lambda_{t_2} x)(s) = \lambda_{t_2} x(t_1^{-1} s) = x(t_2^{-1} t_1^{-1} s) = x((t_1 t_2)^{-1} s) = (\lambda_{t_1 t_2} x)(s).$$

(3) λ_t es una isometría:

$$\|\lambda_t x\|_2^2 = \sum_{s \in G} |\lambda_t x(s)|^2 = \sum_{s \in G} |x(t^{-1} s)|^2 = \sum_{r \in G} |x(r)|^2 = \|x\|_2^2.$$

(4) λ_t es unitario:

$\lambda_t \lambda_{t^{-1}} = \lambda_{tt^{-1}} = \lambda_e = \text{Id} = \lambda_e = \lambda_{t^{-1}t} = \lambda_{t^{-1}} \lambda_t$. Entonces $\lambda_t^* = \lambda_t^{-1}$ y es unitario.

Por lo tanto $\lambda : G \rightarrow \mathcal{U}(\ell^2(G))$ es una representación unitaria de G . Se llama *representación regular izquierda* de G .

Sea $\mathbb{C}G := \{a : G \rightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } a \text{ tiene soporte finito}\}$. El conjunto $\{\delta_t\}_{t \in G}$, donde $\delta_t(s) = \delta_{t,s}$, es una base para $\mathbb{C}G$. Entonces $a = \sum_{t \in G} a(t) \delta_t$, $\forall a \in \mathbb{C}G$.

En $\mathbb{C}G$ se define un producto extendiendo por bilinealidad el producto de G : si $a, b \in \mathbb{C}G$, entonces

$$ab = \left(\sum_{r \in G} a(r) \delta_r \right) \left(\sum_{s \in G} b(s) \delta_s \right) = \sum_{r, s \in G} a(r) b(s) \delta_{rs}.$$

Luego

$$ab(t) = \sum_{r, s \in G} a(r) b(s) \delta_{rs}(t) = \sum_{\{r, s \in G: rs=t\}} a(r) b(s) = \sum_{r \in G} a(r) b(r^{-1}t),$$

de manera que $ab = \sum_{t \in G} \left(\sum_{r \in G} a(r) b(r^{-1}t) \right) \delta_t$.

Clásicamente se escribe $a * b$ en lugar de ab , y a este producto se lo llama *convolución de a y b* .

También se define en $\mathbb{C}G$ una involución, que extiende a la inversión del grupo por antilinealidad: si $a = \sum_{t \in G} a(t) \delta_t \in \mathbb{C}G$, entonces

$$a^* = \sum_{t \in G} \overline{a(t)} \delta_{t^{-1}} = \sum_{t \in G} \overline{a(t^{-1})} \delta_t.$$

Es decir $a^*(t) = \overline{a(t^{-1})}$.

Con estas operaciones $\mathbb{C}G$ se torna una $*$ -álgebra compleja, que además tiene unidad: δ_e .

Extendiendo por linealidad la representación unitaria λ se obtiene un mapa -también llamado λ - sobre la $*$ -álgebra $\mathbb{C}G$ dado por:

$$\begin{aligned}\lambda : \mathbb{C}G &\longrightarrow B(\ell^2(G)) \\ \sum_{t \in G} a_t \delta_t &\longmapsto \sum_{t \in G} a_t \lambda_t.\end{aligned}$$

Como $\lambda : G \rightarrow \mathcal{U}(\ell^2(G))$ es un homomorfismo de grupos, entonces $\lambda : \mathbb{C}G \rightarrow B(\ell^2(G))$ es un homomorfismo de $*$ -álgebras. Sean $a \in \mathbb{C}G$, $x \in \ell^2(G)$ y $s \in G$; entonces:

$$\lambda(a)x(s) = \left(\sum_{t \in G} a(t) \lambda_t \right) x(s) = \sum_{t \in G} a(t) (\lambda_t x)(s) = \sum_{t \in G} a(t) x(t^{-1}s).$$

Es decir que $\lambda(a)x = a * x$ para todo $x \in \ell^2(G)$. Si $\lambda(a) = 0$, entonces $\lambda(a)x = 0$ para todo $x \in \ell^2(G)$. En particular $0 = \lambda(a)\delta_e = a * \delta_e = a$, de donde sigue que λ es inyectivo. Conclusión: $\lambda : \mathbb{C}G \rightarrow \mathcal{U}(\ell^2(G))$ es un $*$ -homomorfismo inyectivo de $*$ -álgebras.

Definición

Si G es un grupo discreto, la C^* -álgebra reducida de G es

$$C_r^*(G) := \overline{\lambda(\mathbb{C}G)} \subseteq B(\ell^2(G)).$$

Si $u : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ es una representación unitaria de G en $\mathcal{H}$, el mismo tipo de cálculos que hicimos anteriormente para la representación regular izquierda λ lo podemos hacer también para u , y obtenemos una representación unital $\pi_u : \mathbb{C}G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$, tal que $\pi_u(a) = \sum_{t \in G} a(t)u_t$. Nótese que

$$\|\pi_u(a)\| = \left\| \sum_{t \in G} a(t)u_t \right\| \leq \sum_{t \in G} |a(t)| \|u_t\| = \sum_{t \in G} |a(t)| = \|a\|_1.$$

Por lo tanto

$$\|a\|_1 \geq \|a\|_\mu := \sup\{\|\pi_u(a)\| : u \text{ es una representación unitaria de } G\}.$$

Entonces $\|\cdot\|_\mu$ es una C^* -norma en $\mathbb{C}G$, mayor o igual a $\|\cdot\|_r$, la C^* -norma proveniente de la C^* -álgebra reducida.

Definición

Si G es un grupo discreto, la C^ -álgebra plena de G es la completación de $\mathbb{C}G$ con respecto a $\|\cdot\|_\mu$.*

Nótese que $u \mapsto \pi_u$ es una biyección entre las representaciones unitarias de G y las representaciones no degeneradas de $C^*(G)$; la inversa está dada por $\pi \mapsto u_\pi$, tal que $u_\pi(t) := \pi(\delta_t)$.

Como $\|\cdot\|_r \leq \|\cdot\|_\mu$, el mapa identidad $id : \mathbb{C}G \rightarrow \mathbb{C}G$ se extiende por continuidad a un homomorfismo sobreyectivo $C^*(G) \rightarrow C_r^*(G)$ (también es denotado por λ), y por lo tanto $C_r^*(G)$ es un cociente de $C^*(G)$.

En general $C^*(G)$ y $C_r^*(G)$ pueden ser objetos muy diferentes. Por ejemplo, se puede probar que $C_r^*(\mathbb{F}_2)$ es simple (no tiene ideales no triviales). Mientras tanto $C^*(\mathbb{F}_2)$ está lleno de ideales no triviales. En efecto, como $\mathbb{F}_2$ es el grupo libre en dos generadores g_1 y g_2 , dar una representación u de $\mathbb{F}_2$ en $\mathcal{H}$ equivale a dar un par de operadores unitarios $U_1, U_2 \in B(\mathcal{H})$ y establecer $u(g_i) := U_i$.

Por ejemplo para cada n podemos tomar la matriz, digamos V_n , asociada a la permutación $e_i \mapsto e_{i+1}$ si $i < n$, $e_n \mapsto e_1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y definir: $u^{(n)}(g_1) = Id_n$, $u^{(n)}(g_2) = V_n$. Entonces

$\pi_{u^{(n)}}(C^*(\mathbb{F}_2)) = \sum_{j=1}^n \mathbb{C}V_n^j$, que tiene dimensión n porque $\{V_n^1, \dots, V_n^n\}$ es l.i. Luego $\ker \pi_{u^{(n)}} \neq \ker \pi_{u^{(m)}}$ si $n \neq m$.

El homomorfismo λ en general no es inyectivo. Cuando sí lo es, y por lo tanto $C^*(G) = C_r^*(G)$, se dice que el grupo G es *promediable* (‘‘*amenable*’’). Los grupos compactos y los abelianos son ejemplos de grupos promediables. Y el ejemplo que acabamos de ver muestra que $\mathbb{F}_2$ no es promediable.