

## 1 Repaso

- Unidades aproximadas

## 1 Repaso

- Unidades aproximadas

## 2 Ideales y cocientes

- Ideales en  $C^*$ -álgebras conmutativas.

## 1 Repaso

- Unidades aproximadas

## 2 Ideales y cocientes

- Ideales en  $C^*$ -álgebras conmutativas.

## 3 Subálgebras hereditarias

## Definición

*Si  $A$  es una  $C^*$ -álgebra, se dice que una red  $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  es una unidad aproximada para  $A$  si:*

## Definición

*Si  $A$  es una  $C^*$ -álgebra, se dice que una red  $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  es una unidad aproximada para  $A$  si:*

**(a)**  $u_\lambda \in A_+$  y  $\|u_\lambda\| \leq 1$ , para todo  $\lambda \in \Lambda$ .

## Definición

*Si  $A$  es una  $C^*$ -álgebra, se dice que una red  $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  es una unidad aproximada para  $A$  si:*

- (a)  $u_\lambda \in A_+$  y  $\|u_\lambda\| \leq 1$ , para todo  $\lambda \in \Lambda$ .
- (b) Si  $\lambda \leq \lambda'$ , entonces  $u_\lambda \leq u_{\lambda'}$ .

## Definición

*Si  $A$  es una  $C^*$ -álgebra, se dice que una red  $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  es una unidad aproximada para  $A$  si:*

- (a)  $u_\lambda \in A_+$  y  $\|u_\lambda\| \leq 1$ , para todo  $\lambda \in \Lambda$ .*
- (b) Si  $\lambda \leq \lambda'$ , entonces  $u_\lambda \leq u_{\lambda'}$ .*
- (c)  $\lim_\lambda u_\lambda a = a = \lim_\lambda a u_\lambda$ ,  $\forall a \in A$ .*

## Definición

*Si  $A$  es una  $C^*$ -álgebra, se dice que una red  $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  es una unidad aproximada para  $A$  si:*

- (a)  $u_\lambda \in A_+$  y  $\|u_\lambda\| \leq 1$ , para todo  $\lambda \in \Lambda$ .
- (b) Si  $\lambda \leq \lambda'$ , entonces  $u_\lambda \leq u_{\lambda'}$ .
- (c)  $\lim_\lambda u_\lambda a = a = \lim_\lambda a u_\lambda$ ,  $\forall a \in A$ .

## Ejemplos



## Definición

Si  $A$  es una  $C^*$ -álgebra, se dice que una red  $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  es una unidad aproximada para  $A$  si:

- (a)  $u_\lambda \in A_+$  y  $\|u_\lambda\| \leq 1$ , para todo  $\lambda \in \Lambda$ .
- (b) Si  $\lambda \leq \lambda'$ , entonces  $u_\lambda \leq u_{\lambda'}$ .
- (c)  $\lim_\lambda u_\lambda a = a = \lim_\lambda a u_\lambda$ ,  $\forall a \in A$ .

## Ejemplos

- (1) En  $C_0(\mathbb{R})$ , consideremos  $(u_n)$  dada por:

## Definición

Si  $A$  es una  $C^*$ -álgebra, se dice que una red  $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  es una unidad aproximada para  $A$  si:

- (a)  $u_\lambda \in A_+$  y  $\|u_\lambda\| \leq 1$ , para todo  $\lambda \in \Lambda$ .
- (b) Si  $\lambda \leq \lambda'$ , entonces  $u_\lambda \leq u_{\lambda'}$ .
- (c)  $\lim_\lambda u_\lambda a = a = \lim_\lambda a u_\lambda$ ,  $\forall a \in A$ .

## Ejemplos

- (1) En  $C_0(\mathbb{R})$ , consideremos  $(u_n)$  dada por:

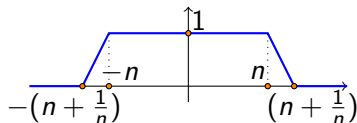
## Definición

Si  $A$  es una  $C^*$ -álgebra, se dice que una red  $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  es una unidad aproximada para  $A$  si:

- (a)  $u_\lambda \in A_+$  y  $\|u_\lambda\| \leq 1$ , para todo  $\lambda \in \Lambda$ .
- (b) Si  $\lambda \leq \lambda'$ , entonces  $u_\lambda \leq u_{\lambda'}$ .
- (c)  $\lim_\lambda u_\lambda a = a = \lim_\lambda a u_\lambda$ ,  $\forall a \in A$ .

## Ejemplos

- (1) En  $C_0(\mathbb{R})$ , consideremos  $(u_n)$  dada por:



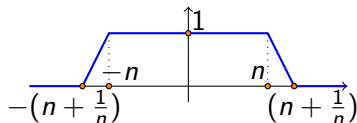
## Definición

Si  $A$  es una  $C^*$ -álgebra, se dice que una red  $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  es una unidad aproximada para  $A$  si:

- (a)  $u_\lambda \in A_+$  y  $\|u_\lambda\| \leq 1$ , para todo  $\lambda \in \Lambda$ .
- (b) Si  $\lambda \leq \lambda'$ , entonces  $u_\lambda \leq u_{\lambda'}$ .
- (c)  $\lim_\lambda u_\lambda a = a = \lim_\lambda a u_\lambda$ ,  $\forall a \in A$ .

## Ejemplos

- (1) En  $C_0(\mathbb{R})$ , consideremos  $(u_n)$  dada por:



Entonces  $\|u_n\| = 1$ ,  $u_n \geq 0$ , y  $(u_n)$  es una unidad aproximada para la  $C^*$ -álgebra  $C_0(\mathbb{R})$ .

(2) Si  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert y  $u_F$  es la proyección ortogonal de  $\mathcal{H}$  sobre  $F$ ,

(2) Si  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert y  $u_F$  es la proyección ortogonal de  $\mathcal{H}$  sobre  $F$ ,

- (2) Si  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert y  $u_F$  es la proyección ortogonal de  $\mathcal{H}$  sobre  $F$ , donde  $F \in \mathcal{F} := \{F \leq \mathcal{H} : \dim F < \infty\}$  ( $\mathcal{F}$  ordenado con el orden natural),

- (2) Si  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert y  $u_F$  es la proyección ortogonal de  $\mathcal{H}$  sobre  $F$ , donde  $F \in \mathcal{F} := \{F \leq \mathcal{H} : \dim F < \infty\}$  ( $\mathcal{F}$  ordenado con el orden natural), entonces  $(u_F)_{F \in \mathcal{F}}$  es una unidad aproximada para  $K$ .



- (2) Si  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert y  $u_F$  es la proyección ortogonal de  $\mathcal{H}$  sobre  $F$ , donde  $F \in \mathcal{F} := \{F \leq \mathcal{H} : \dim F < \infty\}$  ( $\mathcal{F}$  ordenado con el orden natural), entonces  $(u_F)_{F \in \mathcal{F}}$  es una unidad aproximada para  $K$ .
- (3) Sea  $b \in A_+$ ,  $b \neq 0$ ,

- (2) Si  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert y  $u_F$  es la proyección ortogonal de  $\mathcal{H}$  sobre  $F$ , donde  $F \in \mathcal{F} := \{F \leq \mathcal{H} : \dim F < \infty\}$  ( $\mathcal{F}$  ordenado con el orden natural), entonces  $(u_F)_{F \in \mathcal{F}}$  es una unidad aproximada para  $K$ .
- (3) Sea  $b \in A_+$ ,  $b \neq 0$ ,

- (2) Si  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert y  $u_F$  es la proyección ortogonal de  $\mathcal{H}$  sobre  $F$ , donde  $F \in \mathcal{F} := \{F \leq \mathcal{H} : \dim F < \infty\}$  ( $\mathcal{F}$  ordenado con el orden natural), entonces  $(u_F)_{F \in \mathcal{F}}$  es una unidad aproximada para  $K$ .
- (3) Sea  $b \in A_+$ ,  $b \neq 0$ , y sea  $C^*(b)$  la  $C^*$ -álgebra generada por  $b$  en  $A$ .

- (2) Si  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert y  $u_F$  es la proyección ortogonal de  $\mathcal{H}$  sobre  $F$ , donde  $F \in \mathcal{F} := \{F \leq \mathcal{H} : \dim F < \infty\}$  ( $\mathcal{F}$  ordenado con el orden natural), entonces  $(u_F)_{F \in \mathcal{F}}$  es una unidad aproximada para  $K$ .
- (3) Sea  $b \in A_+$ ,  $b \neq 0$ , y sea  $C^*(b)$  la  $C^*$ -álgebra generada por  $b$  en  $A$ . Si  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$  está dada por  $f(t) = \frac{t}{1+t}$ , definamos  $b_n := f(nb)$ .

- (2) Si  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert y  $u_F$  es la proyección ortogonal de  $\mathcal{H}$  sobre  $F$ , donde  $F \in \mathcal{F} := \{F \leq \mathcal{H} : \dim F < \infty\}$  ( $\mathcal{F}$  ordenado con el orden natural), entonces  $(u_F)_{F \in \mathcal{F}}$  es una unidad aproximada para  $K$ .
- (3) Sea  $b \in A_+$ ,  $b \neq 0$ , y sea  $C^*(b)$  la  $C^*$ -álgebra generada por  $b$  en  $A$ . Si  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$  está dada por  $f(t) = \frac{t}{1+t}$ , definamos  $b_n := f(nb)$ . Entonces  $(b_n)$  es una unidad aproximada para  $C^*(b)$ .

- (2) Si  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert y  $u_F$  es la proyección ortogonal de  $\mathcal{H}$  sobre  $F$ , donde  $F \in \mathcal{F} := \{F \leq \mathcal{H} : \dim F < \infty\}$  ( $\mathcal{F}$  ordenado con el orden natural), entonces  $(u_F)_{F \in \mathcal{F}}$  es una unidad aproximada para  $K$ .
- (3) Sea  $b \in A_+$ ,  $b \neq 0$ , y sea  $C^*(b)$  la  $C^*$ -álgebra generada por  $b$  en  $A$ . Si  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$  está dada por  $f(t) = \frac{t}{1+t}$ , definamos  $b_n := f(nb)$ . Entonces  $(b_n)$  es una unidad aproximada para  $C^*(b)$ .

## Teorema

*Toda  $C^*$ -álgebra  $A$  posee una unidad aproximada.*

- (2) Si  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert y  $u_F$  es la proyección ortogonal de  $\mathcal{H}$  sobre  $F$ , donde  $F \in \mathcal{F} := \{F \leq \mathcal{H} : \dim F < \infty\}$  ( $\mathcal{F}$  ordenado con el orden natural), entonces  $(u_F)_{F \in \mathcal{F}}$  es una unidad aproximada para  $K$ .
- (3) Sea  $b \in A_+$ ,  $b \neq 0$ , y sea  $C^*(b)$  la  $C^*$ -álgebra generada por  $b$  en  $A$ . Si  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$  está dada por  $f(t) = \frac{t}{1+t}$ , definamos  $b_n := f(nb)$ . Entonces  $(b_n)$  es una unidad aproximada para  $C^*(b)$ .

## Teorema

*Toda  $C^*$ -álgebra  $A$  posee una unidad aproximada.*

- (2) Si  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert y  $u_F$  es la proyección ortogonal de  $\mathcal{H}$  sobre  $F$ , donde  $F \in \mathcal{F} := \{F \leq \mathcal{H} : \dim F < \infty\}$  ( $\mathcal{F}$  ordenado con el orden natural), entonces  $(u_F)_{F \in \mathcal{F}}$  es una unidad aproximada para  $K$ .
- (3) Sea  $b \in A_+$ ,  $b \neq 0$ , y sea  $C^*(b)$  la  $C^*$ -álgebra generada por  $b$  en  $A$ . Si  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$  está dada por  $f(t) = \frac{t}{1+t}$ , definamos  $b_n := f(nb)$ . Entonces  $(b_n)$  es una unidad aproximada para  $C^*(b)$ .

## Teorema

*Toda  $C^*$ -álgebra  $A$  posee una unidad aproximada. Más precisamente,*



- (2) Si  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert y  $u_F$  es la proyección ortogonal de  $\mathcal{H}$  sobre  $F$ , donde  $F \in \mathcal{F} := \{F \leq \mathcal{H} : \dim F < \infty\}$  ( $\mathcal{F}$  ordenado con el orden natural), entonces  $(u_F)_{F \in \mathcal{F}}$  es una unidad aproximada para  $K$ .
- (3) Sea  $b \in A_+$ ,  $b \neq 0$ , y sea  $C^*(b)$  la  $C^*$ -álgebra generada por  $b$  en  $A$ . Si  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$  está dada por  $f(t) = \frac{t}{1+t}$ , definamos  $b_n := f(nb)$ . Entonces  $(b_n)$  es una unidad aproximada para  $C^*(b)$ .

## Teorema

*Toda  $C^*$ -álgebra  $A$  posee una unidad aproximada. Más precisamente, si  $\Lambda = B(0, 1) \cap A_+$ ,*

- (2) Si  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert y  $u_F$  es la proyección ortogonal de  $\mathcal{H}$  sobre  $F$ , donde  $F \in \mathcal{F} := \{F \leq \mathcal{H} : \dim F < \infty\}$  ( $\mathcal{F}$  ordenado con el orden natural), entonces  $(u_F)_{F \in \mathcal{F}}$  es una unidad aproximada para  $K$ .
- (3) Sea  $b \in A_+$ ,  $b \neq 0$ , y sea  $C^*(b)$  la  $C^*$ -álgebra generada por  $b$  en  $A$ . Si  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$  está dada por  $f(t) = \frac{t}{1+t}$ , definamos  $b_n := f(nb)$ . Entonces  $(b_n)$  es una unidad aproximada para  $C^*(b)$ .

## Teorema

*Toda  $C^*$ -álgebra  $A$  posee una unidad aproximada. Más precisamente, si  $\Lambda = B(0, 1) \cap A_+$ , y  $B$  una  $*$ -subálgebra densa en  $A$  tal que*

- (2) Si  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert y  $u_F$  es la proyección ortogonal de  $\mathcal{H}$  sobre  $F$ , donde  $F \in \mathcal{F} := \{F \leq \mathcal{H} : \dim F < \infty\}$  ( $\mathcal{F}$  ordenado con el orden natural), entonces  $(u_F)_{F \in \mathcal{F}}$  es una unidad aproximada para  $K$ .
- (3) Sea  $b \in A_+$ ,  $b \neq 0$ , y sea  $C^*(b)$  la  $C^*$ -álgebra generada por  $b$  en  $A$ . Si  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$  está dada por  $f(t) = \frac{t}{1+t}$ , definamos  $b_n := f(nb)$ . Entonces  $(b_n)$  es una unidad aproximada para  $C^*(b)$ .

## Teorema

*Toda  $C^*$ -álgebra  $A$  posee una unidad aproximada. Más precisamente, si  $\Lambda = B(0, 1) \cap A_+$ , y  $B$  una  $*$ -subálgebra densa en  $A$  tal que*

(1)  $b(1+b)^{-1} \in B \ \forall b \in B \cap A_+$ .

- (2) Si  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert y  $u_F$  es la proyección ortogonal de  $\mathcal{H}$  sobre  $F$ , donde  $F \in \mathcal{F} := \{F \leq \mathcal{H} : \dim F < \infty\}$  ( $\mathcal{F}$  ordenado con el orden natural), entonces  $(u_F)_{F \in \mathcal{F}}$  es una unidad aproximada para  $K$ .
- (3) Sea  $b \in A_+$ ,  $b \neq 0$ , y sea  $C^*(b)$  la  $C^*$ -álgebra generada por  $b$  en  $A$ . Si  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$  está dada por  $f(t) = \frac{t}{1+t}$ , definamos  $b_n := f(nb)$ . Entonces  $(b_n)$  es una unidad aproximada para  $C^*(b)$ .

## Teorema

*Toda  $C^*$ -álgebra  $A$  posee una unidad aproximada. Más precisamente, si  $\Lambda = B(0, 1) \cap A_+$ , y  $B$  una  $*$ -subálgebra densa en  $A$  tal que*

- (1)  $b(1+b)^{-1} \in B \ \forall b \in B \cap A_+$ .
- (2)  $b(1-b)^{-1} \in B \ \forall b \in B \cap \Lambda$ .

- (2) Si  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert y  $u_F$  es la proyección ortogonal de  $\mathcal{H}$  sobre  $F$ , donde  $F \in \mathcal{F} := \{F \leq \mathcal{H} : \dim F < \infty\}$  ( $\mathcal{F}$  ordenado con el orden natural), entonces  $(u_F)_{F \in \mathcal{F}}$  es una unidad aproximada para  $K$ .
- (3) Sea  $b \in A_+$ ,  $b \neq 0$ , y sea  $C^*(b)$  la  $C^*$ -álgebra generada por  $b$  en  $A$ . Si  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$  está dada por  $f(t) = \frac{t}{1+t}$ , definamos  $b_n := f(nb)$ . Entonces  $(b_n)$  es una unidad aproximada para  $C^*(b)$ .

## Teorema

*Toda  $C^*$ -álgebra  $A$  posee una unidad aproximada. Más precisamente, si  $\Lambda = B(0, 1) \cap A_+$ , y  $B$  una  $*$ -subálgebra densa en  $A$  tal que*

- (1)  $b(1+b)^{-1} \in B \ \forall b \in B \cap A_+$ .
- (2)  $b(1-b)^{-1} \in B \ \forall b \in B \cap \Lambda$ .

- (2) Si  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert y  $u_F$  es la proyección ortogonal de  $\mathcal{H}$  sobre  $F$ , donde  $F \in \mathcal{F} := \{F \leq \mathcal{H} : \dim F < \infty\}$  ( $\mathcal{F}$  ordenado con el orden natural), entonces  $(u_F)_{F \in \mathcal{F}}$  es una unidad aproximada para  $K$ .
- (3) Sea  $b \in A_+$ ,  $b \neq 0$ , y sea  $C^*(b)$  la  $C^*$ -álgebra generada por  $b$  en  $A$ . Si  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$  está dada por  $f(t) = \frac{t}{1+t}$ , definamos  $b_n := f(nb)$ . Entonces  $(b_n)$  es una unidad aproximada para  $C^*(b)$ .

## Teorema

*Toda  $C^*$ -álgebra  $A$  posee una unidad aproximada. Más precisamente, si  $\Lambda = B(0, 1) \cap A_+$ , y  $B$  una  $*$ -subálgebra densa en  $A$  tal que*

(1)  $b(1+b)^{-1} \in B \ \forall b \in B \cap A_+.$

(2)  $b(1-b)^{-1} \in B \ \forall b \in B \cap \Lambda.$

*Sea  $(u_\lambda)_{\lambda \in B \cap \Lambda}$  tal que  $u_\lambda = \lambda$  para todo  $\lambda \in B \cap \Lambda$ .*

- (2) Si  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert y  $u_F$  es la proyección ortogonal de  $\mathcal{H}$  sobre  $F$ , donde  $F \in \mathcal{F} := \{F \leq \mathcal{H} : \dim F < \infty\}$  ( $\mathcal{F}$  ordenado con el orden natural), entonces  $(u_F)_{F \in \mathcal{F}}$  es una unidad aproximada para  $K$ .
- (3) Sea  $b \in A_+$ ,  $b \neq 0$ , y sea  $C^*(b)$  la  $C^*$ -álgebra generada por  $b$  en  $A$ . Si  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$  está dada por  $f(t) = \frac{t}{1+t}$ , definamos  $b_n := f(nb)$ . Entonces  $(b_n)$  es una unidad aproximada para  $C^*(b)$ .

## Teorema

*Toda  $C^*$ -álgebra  $A$  posee una unidad aproximada. Más precisamente, si  $\Lambda = B(0, 1) \cap A_+$ , y  $B$  una  $*$ -subálgebra densa en  $A$  tal que*

$$(1) \quad b(1+b)^{-1} \in B \quad \forall b \in B \cap A_+.$$

$$(2) \quad b(1-b)^{-1} \in B \quad \forall b \in B \cap \Lambda.$$

*Sea  $(u_\lambda)_{\lambda \in B \cap \Lambda}$  tal que  $u_\lambda = \lambda$  para todo  $\lambda \in B \cap \Lambda$ .*

*Entonces  $(u_\lambda)_{\lambda \in B \cap \Lambda}$  es una unidad aproximada para  $A$ .*

- (2) Si  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert y  $u_F$  es la proyección ortogonal de  $\mathcal{H}$  sobre  $F$ , donde  $F \in \mathcal{F} := \{F \leq \mathcal{H} : \dim F < \infty\}$  ( $\mathcal{F}$  ordenado con el orden natural), entonces  $(u_F)_{F \in \mathcal{F}}$  es una unidad aproximada para  $K$ .
- (3) Sea  $b \in A_+$ ,  $b \neq 0$ , y sea  $C^*(b)$  la  $C^*$ -álgebra generada por  $b$  en  $A$ . Si  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$  está dada por  $f(t) = \frac{t}{1+t}$ , definamos  $b_n := f(nb)$ . Entonces  $(b_n)$  es una unidad aproximada para  $C^*(b)$ .

## Teorema

*Toda  $C^*$ -álgebra  $A$  posee una unidad aproximada. Más precisamente, si  $\Lambda = B(0, 1) \cap A_+$ , y  $B$  una  $*$ -subálgebra densa en  $A$  tal que*

$$(1) \quad b(1+b)^{-1} \in B \quad \forall b \in B \cap A_+.$$

$$(2) \quad b(1-b)^{-1} \in B \quad \forall b \in B \cap \Lambda.$$

*Sea  $(u_\lambda)_{\lambda \in B \cap \Lambda}$  tal que  $u_\lambda = \lambda$  para todo  $\lambda \in B \cap \Lambda$ .*

*Entonces  $(u_\lambda)_{\lambda \in B \cap \Lambda}$  es una unidad aproximada para  $A$ .*

## Proposición

*Si  $A$  es una  $C^*$ -álgebra separable, existe  $(u_n)_{n \geq 1}$  tal que  $(u_n)$  es una unidad aproximada para  $A$ .*



## Proposición

*Si  $I$  es un  $*$ -ideal denso en  $A$ , entonces  $A$  tiene una unidad aproximada contenida en  $I$ .*

## Proposición

*Si  $I$  es un  $*$ -ideal denso en  $A$ , entonces  $A$  tiene una unidad aproximada contenida en  $I$ .*

## Proposición

*Si  $L$  es un ideal izquierdo en una  $C^*$ -álgebra  $A$*

## Proposición

*Si  $I$  es un  $*$ -ideal denso en  $A$ , entonces  $A$  tiene una unidad aproximada contenida en  $I$ .*

## Proposición

*Si  $L$  es un ideal izquierdo en una  $C^*$ -álgebra  $A$*

## Proposición

*Si  $I$  es un  $*$ -ideal denso en  $A$ , entonces  $A$  tiene una unidad aproximada contenida en  $I$ .*

## Proposición

*Si  $L$  es un ideal izquierdo en una  $C^*$ -álgebra  $A$  (no necesariamente cerrado),*

## Proposición

*Si  $I$  es un  $*$ -ideal denso en  $A$ , entonces  $A$  tiene una unidad aproximada contenida en  $I$ .*

## Proposición

*Si  $L$  es un ideal izquierdo en una  $C^*$ -álgebra  $A$  (no necesariamente cerrado), entonces  $L$  contiene una red  $(u_\lambda) \subseteq L$ , creciente y contenida en  $\Lambda = A_+ \cap B(0, 1)$ ,*

## Proposición

*Si  $I$  es un  $*$ -ideal denso en  $A$ , entonces  $A$  tiene una unidad aproximada contenida en  $I$ .*

## Proposición

*Si  $L$  es un ideal izquierdo en una  $C^*$ -álgebra  $A$  (no necesariamente cerrado), entonces  $L$  contiene una red  $(u_\lambda) \subseteq L$ , creciente y contenida en  $\Lambda = A_+ \cap B(0,1)$ , tal que  $\lim_\lambda au_\lambda = a$  para todo  $a \in L$ .*

## Teorema (Segal, 1949)

*Sea  $J$  un ideal bilateral cerrado en la  $C^*$ -álgebra  $A$ . Entonces  $J = J^*$ .*

## Proposición

*Si  $I$  es un  $*$ -ideal denso en  $A$ , entonces  $A$  tiene una unidad aproximada contenida en  $I$ .*

## Proposición

*Si  $L$  es un ideal izquierdo en una  $C^*$ -álgebra  $A$  (no necesariamente cerrado), entonces  $L$  contiene una red  $(u_\lambda) \subseteq L$ , creciente y contenida en  $\Lambda = A_+ \cap B(0,1)$ , tal que  $\lim_\lambda au_\lambda = a$  para todo  $a \in L$ .*

## Teorema (Segal, 1949)

*Sea  $J$  un ideal bilateral cerrado en la  $C^*$ -álgebra  $A$ . Entonces  $J = J^*$ .*

## Proposición

*Si  $I$  es un  $*$ -ideal denso en  $A$ , entonces  $A$  tiene una unidad aproximada contenida en  $I$ .*

## Proposición

*Si  $L$  es un ideal izquierdo en una  $C^*$ -álgebra  $A$  (no necesariamente cerrado), entonces  $L$  contiene una red  $(u_\lambda) \subseteq L$ , creciente y contenida en  $\Lambda = A_+ \cap B(0,1)$ , tal que  $\lim_\lambda au_\lambda = a$  para todo  $a \in L$ .*

## Teorema (Segal, 1949)

*Sea  $J$  un ideal bilateral cerrado en la  $C^*$ -álgebra  $A$ . Entonces  $J = J^*$ .*



## Lema

*Sean  $L$  un ideal izquierdo cerrado en  $A$ , y  $(u_\lambda)$  una red como en la Proposición anterior.*

## Lema

*Sean  $L$  un ideal izquierdo cerrado en  $A$ , y  $(u_\lambda)$  una red como en la Proposición anterior.*

## Lema

*Sean  $L$  un ideal izquierdo cerrado en  $A$ , y  $(u_\lambda)$  una red como en la Proposición anterior. Entonces para todo  $a \in A$  se tiene*

## Lema

Sean  $L$  un ideal izquierdo cerrado en  $A$ , y  $(u_\lambda)$  una red como en la Proposición anterior. Entonces para todo  $a \in A$  se tiene

$$d(a, L) = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} = \lim_{\lambda} \|a - au_\lambda\|.$$

## Lema

Sean  $L$  un ideal izquierdo cerrado en  $A$ , y  $(u_\lambda)$  una red como en la Proposición anterior. Entonces para todo  $a \in A$  se tiene

$$d(a, L) = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} = \lim_{\lambda} \|a - au_\lambda\|.$$

## Demostración.

Es claro que  $\alpha = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} \leq \underline{\lim} \|a - au_\lambda\|$ , pues  $au_\lambda \in L$ ,  $\forall \lambda$ .

## Lema

Sean  $L$  un ideal izquierdo cerrado en  $A$ , y  $(u_\lambda)$  una red como en la Proposición anterior. Entonces para todo  $a \in A$  se tiene

$$d(a, L) = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} = \lim_{\lambda} \|a - au_\lambda\|.$$

## Demostración.

Es claro que  $\alpha = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} \leq \underline{\lim} \|a - au_\lambda\|$ , pues  $au_\lambda \in L$ ,  $\forall \lambda$ .

## Lema

Sean  $L$  un ideal izquierdo cerrado en  $A$ , y  $(u_\lambda)$  una red como en la Proposición anterior. Entonces para todo  $a \in A$  se tiene

$$d(a, L) = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} = \lim_{\lambda} \|a - au_\lambda\|.$$

## Demostración.

Es claro que  $\alpha = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} \leq \lim_{\lambda} \|a - au_\lambda\|$ , pues  $au_\lambda \in L$ ,  $\forall \lambda$ .  
Dado  $\varepsilon > 0$  sea  $x \in L$  tal que  $\|a - x\| < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$ ,

## Lema

Sean  $L$  un ideal izquierdo cerrado en  $A$ , y  $(u_\lambda)$  una red como en la Proposición anterior. Entonces para todo  $a \in A$  se tiene

$$d(a, L) = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} = \lim_{\lambda} \|a - au_\lambda\|.$$

## Demostración.

Es claro que  $\alpha = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} \leq \lim_{\lambda} \|a - au_\lambda\|$ , pues  $au_\lambda \in L$ ,  $\forall \lambda$ . Dado  $\varepsilon > 0$  sea  $x \in L$  tal que  $\|a - x\| < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$ , y sea  $\lambda_0$  tal que  $\|x - xu_\lambda\| < \frac{\varepsilon}{2}$  para todo  $\lambda \geq \lambda_0$ .



## Lema

Sean  $L$  un ideal izquierdo cerrado en  $A$ , y  $(u_\lambda)$  una red como en la Proposición anterior. Entonces para todo  $a \in A$  se tiene

$$d(a, L) = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} = \lim_{\lambda} \|a - au_\lambda\|.$$

## Demostración.

Es claro que  $\alpha = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} \leq \lim_{\lambda} \|a - au_\lambda\|$ , pues  $au_\lambda \in L$ ,  $\forall \lambda$ . Dado  $\varepsilon > 0$  sea  $x \in L$  tal que  $\|a - x\| < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$ , y sea  $\lambda_0$  tal que  $\|x - xu_\lambda\| < \frac{\varepsilon}{2}$  para todo  $\lambda \geq \lambda_0$ . Como  $\|u_\lambda\| < 1$  y  $u_\lambda \geq 0$ ,

## Lema

Sean  $L$  un ideal izquierdo cerrado en  $A$ , y  $(u_\lambda)$  una red como en la Proposición anterior. Entonces para todo  $a \in A$  se tiene

$$d(a, L) = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} = \lim_{\lambda} \|a - au_\lambda\|.$$

## Demostración.

Es claro que  $\alpha = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} \leq \lim_{\lambda} \|a - au_\lambda\|$ , pues  $au_\lambda \in L$ ,  $\forall \lambda$ . Dado  $\varepsilon > 0$  sea  $x \in L$  tal que  $\|a - x\| < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$ , y sea  $\lambda_0$  tal que  $\|x - xu_\lambda\| < \frac{\varepsilon}{2}$  para todo  $\lambda \geq \lambda_0$ . Como  $\|u_\lambda\| < 1$  y  $u_\lambda \geq 0$ , se tiene  $\sigma(u_\lambda) \subseteq [0, 1]$  y  $\sigma(1 - u_\lambda) \subseteq [0, 1]$ .

## Lema

Sean  $L$  un ideal izquierdo cerrado en  $A$ , y  $(u_\lambda)$  una red como en la Proposición anterior. Entonces para todo  $a \in A$  se tiene

$$d(a, L) = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} = \lim_{\lambda} \|a - au_\lambda\|.$$

## Demostración.

Es claro que  $\alpha = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} \leq \lim_{\lambda} \|a - au_\lambda\|$ , pues  $au_\lambda \in L$ ,  $\forall \lambda$ . Dado  $\varepsilon > 0$  sea  $x \in L$  tal que  $\|a - x\| < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$ , y sea  $\lambda_0$  tal que  $\|x - xu_\lambda\| < \frac{\varepsilon}{2}$  para todo  $\lambda \geq \lambda_0$ . Como  $\|u_\lambda\| < 1$  y  $u_\lambda \geq 0$ , se tiene  $\sigma(u_\lambda) \subseteq [0, 1]$  y  $\sigma(1 - u_\lambda) \subseteq [0, 1]$ . Luego  $\|1 - u_\lambda\| \leq 1$ .

## Lema

Sean  $L$  un ideal izquierdo cerrado en  $A$ , y  $(u_\lambda)$  una red como en la Proposición anterior. Entonces para todo  $a \in A$  se tiene

$$d(a, L) = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} = \lim_{\lambda} \|a - au_\lambda\|.$$

## Demostración.

Es claro que  $\alpha = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} \leq \liminf \|a - au_\lambda\|$ , pues  $au_\lambda \in L$ ,  $\forall \lambda$ . Dado  $\varepsilon > 0$  sea  $x \in L$  tal que  $\|a - x\| < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$ , y sea  $\lambda_0$  tal que  $\|x - xu_\lambda\| < \frac{\varepsilon}{2}$  para todo  $\lambda \geq \lambda_0$ . Como  $\|u_\lambda\| < 1$  y  $u_\lambda \geq 0$ , se tiene  $\sigma(u_\lambda) \subseteq [0, 1]$  y  $\sigma(1 - u_\lambda) \subseteq [0, 1]$ . Luego  $\|1 - u_\lambda\| \leq 1$ . Entonces

$$\|a - au_\lambda\| = \|a - x + x - xu_\lambda + xu_\lambda - au_\lambda\|$$

## Lema

Sean  $L$  un ideal izquierdo cerrado en  $A$ , y  $(u_\lambda)$  una red como en la Proposición anterior. Entonces para todo  $a \in A$  se tiene

$$d(a, L) = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} = \lim_{\lambda} \|a - au_\lambda\|.$$

## Demostración.

Es claro que  $\alpha = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} \leq \lim \|a - au_\lambda\|$ , pues  $au_\lambda \in L$ ,  $\forall \lambda$ . Dado  $\varepsilon > 0$  sea  $x \in L$  tal que  $\|a - x\| < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$ , y sea  $\lambda_0$  tal que  $\|x - xu_\lambda\| < \frac{\varepsilon}{2}$  para todo  $\lambda \geq \lambda_0$ . Como  $\|u_\lambda\| < 1$  y  $u_\lambda \geq 0$ , se tiene  $\sigma(u_\lambda) \subseteq [0, 1]$  y  $\sigma(1 - u_\lambda) \subseteq [0, 1]$ . Luego  $\|1 - u_\lambda\| \leq 1$ . Entonces

$$\begin{aligned} \|a - au_\lambda\| &= \|a - x + x - xu_\lambda + xu_\lambda - au_\lambda\| \\ &\leq \|(a - x) - (a - x)u_\lambda\| + \|x - xu_\lambda\| \end{aligned}$$

## Lema

Sean  $L$  un ideal izquierdo cerrado en  $A$ , y  $(u_\lambda)$  una red como en la Proposición anterior. Entonces para todo  $a \in A$  se tiene

$$d(a, L) = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} = \lim_{\lambda} \|a - au_\lambda\|.$$

## Demostración.

Es claro que  $\alpha = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} \leq \liminf \|a - au_\lambda\|$ , pues  $au_\lambda \in L$ ,  $\forall \lambda$ . Dado  $\varepsilon > 0$  sea  $x \in L$  tal que  $\|a - x\| < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$ , y sea  $\lambda_0$  tal que  $\|x - xu_\lambda\| < \frac{\varepsilon}{2}$  para todo  $\lambda \geq \lambda_0$ . Como  $\|u_\lambda\| < 1$  y  $u_\lambda \geq 0$ , se tiene  $\sigma(u_\lambda) \subseteq [0, 1]$  y  $\sigma(1 - u_\lambda) \subseteq [0, 1]$ . Luego  $\|1 - u_\lambda\| \leq 1$ . Entonces

$$\begin{aligned} \|a - au_\lambda\| &= \|a - x + x - xu_\lambda + xu_\lambda - au_\lambda\| \\ &\leq \|(a - x) - (a - x)u_\lambda\| + \|x - xu_\lambda\| \leq \|a - x\|\|1 - u_\lambda\| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

## Lema

Sean  $L$  un ideal izquierdo cerrado en  $A$ , y  $(u_\lambda)$  una red como en la Proposición anterior. Entonces para todo  $a \in A$  se tiene

$$d(a, L) = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} = \lim_{\lambda} \|a - au_\lambda\|.$$

## Demostración.

Es claro que  $\alpha = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} \leq \liminf \|a - au_\lambda\|$ , pues  $au_\lambda \in L$ ,  $\forall \lambda$ . Dado  $\varepsilon > 0$  sea  $x \in L$  tal que  $\|a - x\| < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$ , y sea  $\lambda_0$  tal que  $\|x - xu_\lambda\| < \frac{\varepsilon}{2}$  para todo  $\lambda \geq \lambda_0$ . Como  $\|u_\lambda\| < 1$  y  $u_\lambda \geq 0$ , se tiene  $\sigma(u_\lambda) \subseteq [0, 1]$  y  $\sigma(1 - u_\lambda) \subseteq [0, 1]$ . Luego  $\|1 - u_\lambda\| \leq 1$ . Entonces

$$\begin{aligned} \|a - au_\lambda\| &= \|a - x + x - xu_\lambda + xu_\lambda - au_\lambda\| \\ &\leq \|(a - x) - (a - x)u_\lambda\| + \|x - xu_\lambda\| \leq \|a - x\|\|1 - u_\lambda\| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\|a - au_\lambda\| < \alpha + \varepsilon$  para todo  $\lambda \geq \lambda_0$ ,

## Lema

Sean  $L$  un ideal izquierdo cerrado en  $A$ , y  $(u_\lambda)$  una red como en la Proposición anterior. Entonces para todo  $a \in A$  se tiene

$$d(a, L) = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} = \lim_{\lambda} \|a - au_\lambda\|.$$

## Demostración.

Es claro que  $\alpha = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} \leq \liminf \|a - au_\lambda\|$ , pues  $au_\lambda \in L$ ,  $\forall \lambda$ . Dado  $\varepsilon > 0$  sea  $x \in L$  tal que  $\|a - x\| < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$ , y sea  $\lambda_0$  tal que  $\|x - xu_\lambda\| < \frac{\varepsilon}{2}$  para todo  $\lambda \geq \lambda_0$ . Como  $\|u_\lambda\| < 1$  y  $u_\lambda \geq 0$ , se tiene  $\sigma(u_\lambda) \subseteq [0, 1]$  y  $\sigma(1 - u_\lambda) \subseteq [0, 1]$ . Luego  $\|1 - u_\lambda\| \leq 1$ . Entonces

$$\begin{aligned} \|a - au_\lambda\| &= \|a - x + x - xu_\lambda + xu_\lambda - au_\lambda\| \\ &\leq \|(a - x) - (a - x)u_\lambda\| + \|x - xu_\lambda\| \leq \|a - x\|\|1 - u_\lambda\| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\|a - au_\lambda\| < \alpha + \varepsilon$  para todo  $\lambda \geq \lambda_0$ , y entonces



## Lema

Sean  $L$  un ideal izquierdo cerrado en  $A$ , y  $(u_\lambda)$  una red como en la Proposición anterior. Entonces para todo  $a \in A$  se tiene

$$d(a, L) = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} = \lim_{\lambda} \|a - au_\lambda\|.$$

## Demostración.

Es claro que  $\alpha = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} \leq \underline{\lim} \|a - au_\lambda\|$ , pues  $au_\lambda \in L$ ,  $\forall \lambda$ . Dado  $\varepsilon > 0$  sea  $x \in L$  tal que  $\|a - x\| < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$ , y sea  $\lambda_0$  tal que  $\|x - xu_\lambda\| < \frac{\varepsilon}{2}$  para todo  $\lambda \geq \lambda_0$ . Como  $\|u_\lambda\| < 1$  y  $u_\lambda \geq 0$ , se tiene  $\sigma(u_\lambda) \subseteq [0, 1]$  y  $\sigma(1 - u_\lambda) \subseteq [0, 1]$ . Luego  $\|1 - u_\lambda\| \leq 1$ . Entonces

$$\begin{aligned} \|a - au_\lambda\| &= \|a - x + x - xu_\lambda + xu_\lambda - au_\lambda\| \\ &\leq \|(a - x) - (a - x)u_\lambda\| + \|x - xu_\lambda\| \leq \|a - x\|\|1 - u_\lambda\| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\|a - au_\lambda\| < \alpha + \varepsilon$  para todo  $\lambda \geq \lambda_0$ , y entonces

$$\alpha \leq \underline{\lim} \|a - au_\lambda\|$$

## Lema

Sean  $L$  un ideal izquierdo cerrado en  $A$ , y  $(u_\lambda)$  una red como en la Proposición anterior. Entonces para todo  $a \in A$  se tiene

$$d(a, L) = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} = \lim_{\lambda} \|a - au_\lambda\|.$$

## Demostración.

Es claro que  $\alpha = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} \leq \underline{\lim} \|a - au_\lambda\|$ , pues  $au_\lambda \in L$ ,  $\forall \lambda$ . Dado  $\varepsilon > 0$  sea  $x \in L$  tal que  $\|a - x\| < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$ , y sea  $\lambda_0$  tal que  $\|x - xu_\lambda\| < \frac{\varepsilon}{2}$  para todo  $\lambda \geq \lambda_0$ . Como  $\|u_\lambda\| < 1$  y  $u_\lambda \geq 0$ , se tiene  $\sigma(u_\lambda) \subseteq [0, 1]$  y  $\sigma(1 - u_\lambda) \subseteq [0, 1]$ . Luego  $\|1 - u_\lambda\| \leq 1$ . Entonces

$$\begin{aligned} \|a - au_\lambda\| &= \|a - x + x - xu_\lambda + xu_\lambda - au_\lambda\| \\ &\leq \|(a - x) - (a - x)u_\lambda\| + \|x - xu_\lambda\| \leq \|a - x\| \|1 - u_\lambda\| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\|a - au_\lambda\| < \alpha + \varepsilon$  para todo  $\lambda \geq \lambda_0$ , y entonces

$$\alpha \leq \underline{\lim} \|a - au_\lambda\| \leq \overline{\lim} \|a - au_\lambda\|$$

## Lema

Sean  $L$  un ideal izquierdo cerrado en  $A$ , y  $(u_\lambda)$  una red como en la Proposición anterior. Entonces para todo  $a \in A$  se tiene

$$d(a, L) = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} = \lim_{\lambda} \|a - au_\lambda\|.$$

## Demostración.

Es claro que  $\alpha = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} \leq \underline{\lim} \|a - au_\lambda\|$ , pues  $au_\lambda \in L$ ,  $\forall \lambda$ . Dado  $\varepsilon > 0$  sea  $x \in L$  tal que  $\|a - x\| < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$ , y sea  $\lambda_0$  tal que  $\|x - xu_\lambda\| < \frac{\varepsilon}{2}$  para todo  $\lambda \geq \lambda_0$ . Como  $\|u_\lambda\| < 1$  y  $u_\lambda \geq 0$ , se tiene  $\sigma(u_\lambda) \subseteq [0, 1]$  y  $\sigma(1 - u_\lambda) \subseteq [0, 1]$ . Luego  $\|1 - u_\lambda\| \leq 1$ . Entonces

$$\begin{aligned} \|a - au_\lambda\| &= \|a - x + x - xu_\lambda + xu_\lambda - au_\lambda\| \\ &\leq \|(a - x) - (a - x)u_\lambda\| + \|x - xu_\lambda\| \leq \|a - x\|\|1 - u_\lambda\| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\|a - au_\lambda\| < \alpha + \varepsilon$  para todo  $\lambda \geq \lambda_0$ , y entonces

$$\alpha \leq \underline{\lim} \|a - au_\lambda\| \leq \overline{\lim} \|a - au_\lambda\| \leq \alpha + \varepsilon,$$

## Lema

Sean  $L$  un ideal izquierdo cerrado en  $A$ , y  $(u_\lambda)$  una red como en la Proposición anterior. Entonces para todo  $a \in A$  se tiene

$$d(a, L) = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} = \lim_{\lambda} \|a - au_\lambda\|.$$

## Demostración.

Es claro que  $\alpha = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} \leq \underline{\lim} \|a - au_\lambda\|$ , pues  $au_\lambda \in L$ ,  $\forall \lambda$ . Dado  $\varepsilon > 0$  sea  $x \in L$  tal que  $\|a - x\| < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$ , y sea  $\lambda_0$  tal que  $\|x - xu_\lambda\| < \frac{\varepsilon}{2}$  para todo  $\lambda \geq \lambda_0$ . Como  $\|u_\lambda\| < 1$  y  $u_\lambda \geq 0$ , se tiene  $\sigma(u_\lambda) \subseteq [0, 1]$  y  $\sigma(1 - u_\lambda) \subseteq [0, 1]$ . Luego  $\|1 - u_\lambda\| \leq 1$ . Entonces

$$\begin{aligned} \|a - au_\lambda\| &= \|a - x + x - xu_\lambda + xu_\lambda - au_\lambda\| \\ &\leq \|(a - x) - (a - x)u_\lambda\| + \|x - xu_\lambda\| \leq \|a - x\|\|1 - u_\lambda\| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\|a - au_\lambda\| < \alpha + \varepsilon$  para todo  $\lambda \geq \lambda_0$ , y entonces

$$\alpha \leq \underline{\lim} \|a - au_\lambda\| \leq \overline{\lim} \|a - au_\lambda\| \leq \alpha + \varepsilon,$$

para todo  $\varepsilon > 0$ .

## Lema

Sean  $L$  un ideal izquierdo cerrado en  $A$ , y  $(u_\lambda)$  una red como en la Proposición anterior. Entonces para todo  $a \in A$  se tiene

$$d(a, L) = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} = \lim_{\lambda} \|a - au_\lambda\|.$$

## Demostración.

Es claro que  $\alpha = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} \leq \underline{\lim} \|a - au_\lambda\|$ , pues  $au_\lambda \in L$ ,  $\forall \lambda$ . Dado  $\varepsilon > 0$  sea  $x \in L$  tal que  $\|a - x\| < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$ , y sea  $\lambda_0$  tal que  $\|x - xu_\lambda\| < \frac{\varepsilon}{2}$  para todo  $\lambda \geq \lambda_0$ . Como  $\|u_\lambda\| < 1$  y  $u_\lambda \geq 0$ , se tiene  $\sigma(u_\lambda) \subseteq [0, 1]$  y  $\sigma(1 - u_\lambda) \subseteq [0, 1]$ . Luego  $\|1 - u_\lambda\| \leq 1$ . Entonces

$$\begin{aligned} \|a - au_\lambda\| &= \|a - x + x - xu_\lambda + xu_\lambda - au_\lambda\| \\ &\leq \|(a - x) - (a - x)u_\lambda\| + \|x - xu_\lambda\| \leq \|a - x\|\|1 - u_\lambda\| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\|a - au_\lambda\| < \alpha + \varepsilon$  para todo  $\lambda \geq \lambda_0$ , y entonces

$$\alpha \leq \underline{\lim} \|a - au_\lambda\| \leq \overline{\lim} \|a - au_\lambda\| \leq \alpha + \varepsilon,$$

para todo  $\varepsilon > 0$ . En consecuencia  $\alpha = \lim \|a - au_\lambda\|$ . □

## Ejemplo

Sean  $A = C[0, 1]$  y  $L = C_0(0, 1)$ .

## Ejemplo

Sean  $A = C[0, 1]$  y  $L = C_0(0, 1)$ .

## Ejemplo

Sean  $A = C[0, 1]$  y  $L = C_0(0, 1)$ . Entonces  $L \triangleleft A$ .

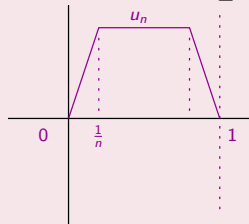


## Ejemplo

Sean  $A = C[0, 1]$  y  $L = C_0(0, 1)$ . Entonces  $L \triangleleft A$ . Consideremos la unidad aproximada  $(u_n)_{n \geq 1}$  del ideal  $L$  dada por:

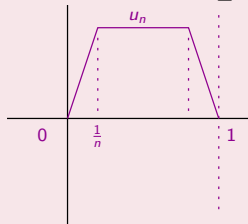
## Ejemplo

Sean  $A = C[0, 1]$  y  $L = C_0(0, 1)$ . Entonces  $L \triangleleft A$ . Consideremos la unidad aproximada  $(u_n)_{n \geq 1}$  del ideal  $L$  dada por:



## Ejemplo

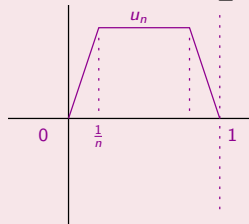
Sean  $A = C[0, 1]$  y  $L = C_0(0, 1)$ . Entonces  $L \triangleleft A$ . Consideremos la unidad aproximada  $(u_n)_{n \geq 1}$  del ideal  $L$  dada por:



Si  $a \in A$ , se tiene

## Ejemplo

Sean  $A = C[0, 1]$  y  $L = C_0(0, 1)$ . Entonces  $L \triangleleft A$ . Consideremos la unidad aproximada  $(u_n)_{n \geq 1}$  del ideal  $L$  dada por:

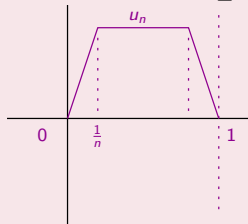


Si  $a \in A$ , se tiene

$$\lim_n au_n(t) =$$

## Ejemplo

Sean  $A = C[0, 1]$  y  $L = C_0(0, 1)$ . Entonces  $L \triangleleft A$ . Consideremos la unidad aproximada  $(u_n)_{n \geq 1}$  del ideal  $L$  dada por:

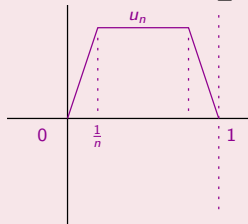


Si  $a \in A$ , se tiene

$$\lim_n au_n(t) = \left\{ \begin{array}{l} a(t) \text{ si } t \in (0, 1) \\ 0 \text{ si } t = 0 \text{ o } t = 1 \end{array} \right.$$

## Ejemplo

Sean  $A = C[0, 1]$  y  $L = C_0(0, 1)$ . Entonces  $L \triangleleft A$ . Consideremos la unidad aproximada  $(u_n)_{n \geq 1}$  del ideal  $L$  dada por:

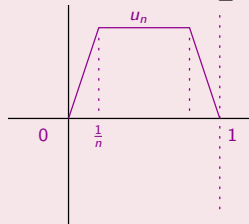


Si  $a \in A$ , se tiene

$$\lim_n au_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0, 1 \end{cases}$$

## Ejemplo

Sean  $A = C[0, 1]$  y  $L = C_0(0, 1)$ . Entonces  $L \triangleleft A$ . Consideremos la unidad aproximada  $(u_n)_{n \geq 1}$  del ideal  $L$  dada por:

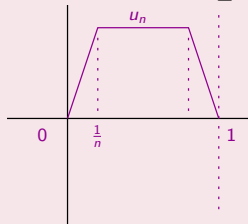


Si  $a \in A$ , se tiene

$$\lim_n au_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0, 1 \\ a(t) & \text{si } t \in (0, 1). \end{cases}$$

## Ejemplo

Sean  $A = C[0, 1]$  y  $L = C_0(0, 1)$ . Entonces  $L \triangleleft A$ . Consideremos la unidad aproximada  $(u_n)_{n \geq 1}$  del ideal  $L$  dada por:



Si  $a \in A$ , se tiene

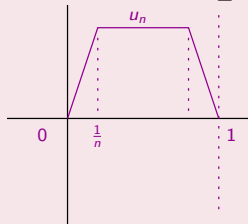
$$\lim_n au_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0, 1 \\ a(t) & \text{si } t \in (0, 1). \end{cases}$$

Entonces  $\|a - au_\lambda\|$  converge pero  $au_\lambda$  no.



## Ejemplo

Sean  $A = C[0, 1]$  y  $L = C_0(0, 1)$ . Entonces  $L \triangleleft A$ . Consideremos la unidad aproximada  $(u_n)_{n \geq 1}$  del ideal  $L$  dada por:



Si  $a \in A$ , se tiene

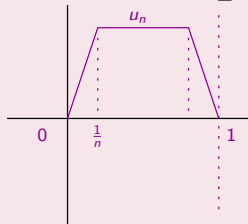
$$\lim_n au_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0, 1 \\ a(t) & \text{si } t \in (0, 1). \end{cases}$$

Entonces  $\|a - au_\lambda\|$  converge pero  $au_\lambda$  no.

## Corolario

## Ejemplo

Sean  $A = C[0, 1]$  y  $L = C_0(0, 1)$ . Entonces  $L \triangleleft A$ . Consideremos la unidad aproximada  $(u_n)_{n \geq 1}$  del ideal  $L$  dada por:



Si  $a \in A$ , se tiene

$$\lim_n au_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0, 1 \\ a(t) & \text{si } t \in (0, 1). \end{cases}$$

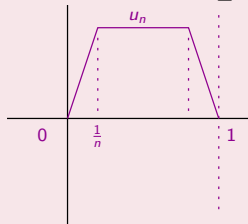
Entonces  $\|a - au_\lambda\|$  converge pero  $au_\lambda$  no.

## Corolario

(a) Si  $I \triangleleft J \triangleleft A$ , con  $I, J$  cerrados, entonces  $I \triangleleft A$ .

## Ejemplo

Sean  $A = C[0, 1]$  y  $L = C_0(0, 1)$ . Entonces  $L \triangleleft A$ . Consideremos la unidad aproximada  $(u_n)_{n \geq 1}$  del ideal  $L$  dada por:



Si  $a \in A$ , se tiene

$$\lim_n au_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0, 1 \\ a(t) & \text{si } t \in (0, 1). \end{cases}$$

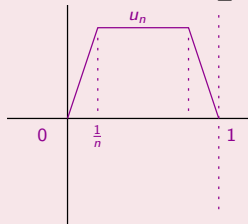
Entonces  $\|a - au_\lambda\|$  converge pero  $au_\lambda$  no.

## Corolario

- (a) Si  $I \triangleleft J \triangleleft A$ , con  $I, J$  cerrados, entonces  $I \triangleleft A$ .
- (b) Si  $I, J \triangleleft A$  cerrados, entonces  $I \cap J = \overline{IJ} := \overline{\{xy : x \in I, y \in J\}}$

## Ejemplo

Sean  $A = C[0, 1]$  y  $L = C_0(0, 1)$ . Entonces  $L \triangleleft A$ . Consideremos la unidad aproximada  $(u_n)_{n \geq 1}$  del ideal  $L$  dada por:



Si  $a \in A$ , se tiene

$$\lim_n au_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0, 1 \\ a(t) & \text{si } t \in (0, 1). \end{cases}$$

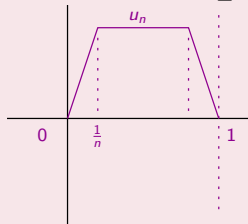
Entonces  $\|a - au_\lambda\|$  converge pero  $au_\lambda$  no.

## Corolario

- (a) Si  $I \triangleleft J \triangleleft A$ , con  $I, J$  cerrados, entonces  $I \triangleleft A$ .
- (b) Si  $I, J \triangleleft A$  cerrados, entonces  $I \cap J = \overline{IJ} := \overline{\{xy : x \in I, y \in J\}}$

## Ejemplo

Sean  $A = C[0, 1]$  y  $L = C_0(0, 1)$ . Entonces  $L \triangleleft A$ . Consideremos la unidad aproximada  $(u_n)_{n \geq 1}$  del ideal  $L$  dada por:



Si  $a \in A$ , se tiene

$$\lim_n au_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0, 1 \\ a(t) & \text{si } t \in (0, 1). \end{cases}$$

Entonces  $\|a - au_\lambda\|$  converge pero  $au_\lambda$  no.

## Corolario

- (a) Si  $I \triangleleft J \triangleleft A$ , con  $I, J$  cerrados, entonces  $I \triangleleft A$ .
- (b) Si  $I, J \triangleleft A$  cerrados, entonces  $I \cap J = \overline{IJ} := \overline{\{xy : x \in I, y \in J\}}$  (es posible probar que, de hecho, es  $IJ = \overline{IJ}$ ).

## Demostración.

## Demostración.

(a) Sean  $a \in A$ ,  $x \in I$ , y sea  $(u_\lambda)$  una unidad aproximada de  $J$ .

## Demostración.

(a) Sean  $a \in A$ ,  $x \in I$ , y sea  $(u_\lambda)$  una unidad aproximada de  $J$ .



## Demostración.

(a) Sean  $a \in A$ ,  $x \in I$ , y sea  $(u_\lambda)$  una unidad aproximada de  $J$ . Entonces

$$ax = \lim_{\lambda} u_{\lambda}(ax)$$

## Demostración.

(a) Sean  $a \in A$ ,  $x \in I$ , y sea  $(u_\lambda)$  una unidad aproximada de  $J$ . Entonces

$$ax = \lim_{\lambda} u_{\lambda}(ax) = \lim_{\lambda} (u_{\lambda}a)x$$

## Demostración.

(a) Sean  $a \in A$ ,  $x \in I$ , y sea  $(u_\lambda)$  una unidad aproximada de  $J$ . Entonces

$$ax = \lim_{\lambda} u_{\lambda}(ax) = \lim_{\lambda} (u_{\lambda}a)x \in I,$$

## Demostración.

(a) Sean  $a \in A$ ,  $x \in I$ , y sea  $(u_\lambda)$  una unidad aproximada de  $J$ . Entonces

$$ax = \lim_{\lambda} u_{\lambda}(ax) = \lim_{\lambda} (u_{\lambda}a)x \in I,$$

porque  $u_{\lambda}a \in J$  y  $x \in I$ .

## Demostración.

(a) Sean  $a \in A$ ,  $x \in I$ , y sea  $(u_\lambda)$  una unidad aproximada de  $J$ . Entonces

$$ax = \lim_{\lambda} u_{\lambda}(ax) = \lim_{\lambda} (u_{\lambda}a)x \in I,$$

porque  $u_{\lambda}a \in J$  y  $x \in I$ . Como  $I$  es cerrado, se tiene que  $ax \in I$ .

## Demostración.

(a) Sean  $a \in A$ ,  $x \in I$ , y sea  $(u_\lambda)$  una unidad aproximada de  $J$ . Entonces

$$ax = \lim_{\lambda} u_{\lambda}(ax) = \lim_{\lambda} (u_{\lambda}a)x \in I,$$

porque  $u_{\lambda}a \in J$  y  $x \in I$ . Como  $I$  es cerrado, se tiene que  $ax \in I$ .

(b) Claramente  $IJ \subset I \cap J$ .

## Demostración.

(a) Sean  $a \in A$ ,  $x \in I$ , y sea  $(u_\lambda)$  una unidad aproximada de  $J$ . Entonces

$$ax = \lim_{\lambda} u_{\lambda}(ax) = \lim_{\lambda} (u_{\lambda}a)x \in I,$$

porque  $u_{\lambda}a \in J$  y  $x \in I$ . Como  $I$  es cerrado, se tiene que  $ax \in I$ .

(b) Claramente  $IJ \subset I \cap J$ .

## Demostración.

(a) Sean  $a \in A$ ,  $x \in I$ , y sea  $(u_\lambda)$  una unidad aproximada de  $J$ . Entonces

$$ax = \lim_{\lambda} u_\lambda(ax) = \lim_{\lambda} (u_\lambda a)x \in I,$$

porque  $u_\lambda a \in J$  y  $x \in I$ . Como  $I$  es cerrado, se tiene que  $ax \in I$ .

(b) Claramente  $IJ \subset I \cap J$ . Como  $I \cap J$  es cerrado se tiene  $\overline{IJ} \subset I \cap J$ .



## Demostración.

- (a) Sean  $a \in A$ ,  $x \in I$ , y sea  $(u_\lambda)$  una unidad aproximada de  $J$ . Entonces

$$ax = \lim_{\lambda} u_\lambda(ax) = \lim_{\lambda} (u_\lambda a)x \in I,$$

porque  $u_\lambda a \in J$  y  $x \in I$ . Como  $I$  es cerrado, se tiene que  $ax \in I$ .

- (b) Claramente  $IJ \subset I \cap J$ . Como  $I \cap J$  es cerrado se tiene  $\overline{IJ} \subset I \cap J$ . Sean ahora  $x \in I \cap J$ , y  $(u_\lambda)$  una unidad aproximada de  $I \cap J$ .

## Demostración.

(a) Sean  $a \in A$ ,  $x \in I$ , y sea  $(u_\lambda)$  una unidad aproximada de  $J$ . Entonces

$$ax = \lim_{\lambda} u_\lambda(ax) = \lim_{\lambda} (u_\lambda a)x \in I,$$

porque  $u_\lambda a \in J$  y  $x \in I$ . Como  $I$  es cerrado, se tiene que  $ax \in I$ .

(b) Claramente  $IJ \subset I \cap J$ . Como  $I \cap J$  es cerrado se tiene  $\overline{IJ} \subset I \cap J$ . Sean ahora  $x \in I \cap J$ , y  $(u_\lambda)$  una unidad aproximada de  $I \cap J$ . Entonces

$$x = \lim_{\lambda} xu_\lambda$$

## Demostración.

(a) Sean  $a \in A$ ,  $x \in I$ , y sea  $(u_\lambda)$  una unidad aproximada de  $J$ . Entonces

$$ax = \lim_{\lambda} u_\lambda(ax) = \lim_{\lambda} (u_\lambda a)x \in I,$$

porque  $u_\lambda a \in J$  y  $x \in I$ . Como  $I$  es cerrado, se tiene que  $ax \in I$ .

(b) Claramente  $IJ \subset I \cap J$ . Como  $I \cap J$  es cerrado se tiene  $\overline{IJ} \subset I \cap J$ . Sean ahora  $x \in I \cap J$ , y  $(u_\lambda)$  una unidad aproximada de  $I \cap J$ . Entonces

$$x = \lim_{\lambda} xu_\lambda \in \overline{IJ},$$

## Demostración.

(a) Sean  $a \in A$ ,  $x \in I$ , y sea  $(u_\lambda)$  una unidad aproximada de  $J$ . Entonces

$$ax = \lim_{\lambda} u_\lambda(ax) = \lim_{\lambda} (u_\lambda a)x \in I,$$

porque  $u_\lambda a \in J$  y  $x \in I$ . Como  $I$  es cerrado, se tiene que  $ax \in I$ .

(b) Claramente  $IJ \subset I \cap J$ . Como  $I \cap J$  es cerrado se tiene  $\overline{IJ} \subset I \cap J$ . Sean ahora  $x \in I \cap J$ , y  $(u_\lambda)$  una unidad aproximada de  $I \cap J$ . Entonces

$$x = \lim_{\lambda} xu_\lambda \in \overline{IJ},$$

porque  $x \in I$  y  $u_\lambda \in J$ . Entonces  $I \cap J \subseteq \overline{IJ}$ .



## Teorema (Segal, 1949)

*Si  $I \triangleleft A$ , cerrado. Entonces  $\frac{A}{I}$  es una  $C^*$ -álgebra (con la norma cociente).*

## Teorema (Segal, 1949)

*Si  $I \triangleleft A$ , cerrado. Entonces  $\frac{A}{I}$  es una  $C^*$ -álgebra (con la norma cociente).*

### Demostración.

Ya sabemos que  $\frac{A}{I}$  es una  $*$ -álgebra de Banach.

## Teorema (Segal, 1949)

*Si  $I \triangleleft A$ , cerrado. Entonces  $\frac{A}{I}$  es una  $C^*$ -álgebra (con la norma cociente).*

### Demostración.

Ya sabemos que  $\frac{A}{I}$  es una  $*$ -álgebra de Banach.

## Teorema (Segal, 1949)

*Si  $I \triangleleft A$ , cerrado. Entonces  $\frac{A}{I}$  es una  $C^*$ -álgebra (con la norma cociente).*

### Demostración.

Ya sabemos que  $\frac{A}{I}$  es una  $*$ -álgebra de Banach. Sólo falta mostrar que  $\|a + I\|^2 = \|(a + I)^*(a + I)\|$  para todo  $a \in A$ .



## Teorema (Segal, 1949)

*Si  $I \triangleleft A$ , cerrado. Entonces  $\frac{A}{I}$  es una  $C^*$ -álgebra (con la norma cociente).*

### Demostración.

Ya sabemos que  $\frac{A}{I}$  es una  $*$ -álgebra de Banach. Sólo falta mostrar que  $\|a + I\|^2 = \|(a + I)^*(a + I)\|$  para todo  $a \in A$ . De hecho es suficiente probar que  $\|a + I\|^2 \leq \|(a + I)^*(a + I)\|$ , porque la otra desigualdad es inmediata ( $\|(a + I)^*(a + I)\| \leq \|(a + I)^*\| \|a + I\| = \|a + I\|^2$ ).

## Teorema (Segal, 1949)

*Si  $I \triangleleft A$ , cerrado. Entonces  $\frac{A}{I}$  es una  $C^*$ -álgebra (con la norma cociente).*

### Demostración.

Ya sabemos que  $\frac{A}{I}$  es una  $*$ -álgebra de Banach. Sólo falta mostrar que  $\|a + I\|^2 = \|(a + I)^*(a + I)\|$  para todo  $a \in A$ . De hecho es suficiente probar que  $\|a + I\|^2 \leq \|(a + I)^*(a + I)\|$ , porque la otra desigualdad es inmediata ( $\|(a + I)^*(a + I)\| \leq \|(a + I)^*\| \|a + I\| = \|a + I\|^2$ ). Sea  $(u_\lambda)$  una unidad aproximada para  $I$ .

## Teorema (Segal, 1949)

Si  $I \triangleleft A$ , cerrado. Entonces  $\frac{A}{I}$  es una  $C^*$ -álgebra (con la norma cociente).

### Demostración.

Ya sabemos que  $\frac{A}{I}$  es una  $*$ -álgebra de Banach. Sólo falta mostrar que  $\|a + I\|^2 = \|(a + I)^*(a + I)\|$  para todo  $a \in A$ . De hecho es suficiente probar que  $\|a + I\|^2 \leq \|(a + I)^*(a + I)\|$ , porque la otra desigualdad es inmediata ( $\|(a + I)^*(a + I)\| \leq \|(a + I)^*\| \|a + I\| = \|a + I\|^2$ ). Sea  $(u_\lambda)$  una unidad aproximada para  $I$ . Vimos que  $\|a + I\|^2 = \lim_\lambda \|a - au_\lambda\|^2$ .

## Teorema (Segal, 1949)

*Si  $I \triangleleft A$ , cerrado. Entonces  $\frac{A}{I}$  es una  $C^*$ -álgebra (con la norma cociente).*

### Demostración.

Ya sabemos que  $\frac{A}{I}$  es una  $*$ -álgebra de Banach. Sólo falta mostrar que  $\|a + I\|^2 = \|(a + I)^*(a + I)\|$  para todo  $a \in A$ . De hecho es suficiente probar que  $\|a + I\|^2 \leq \|(a + I)^*(a + I)\|$ , porque la otra desigualdad es inmediata ( $\|(a + I)^*(a + I)\| \leq \|(a + I)^*\| \|a + I\| = \|a + I\|^2$ ). Sea  $(u_\lambda)$  una unidad aproximada para  $I$ . Vimos que  $\|a + I\|^2 = \lim_\lambda \|a - au_\lambda\|^2$ . Ahora:

## Teorema (Segal, 1949)

Si  $I \triangleleft A$ , cerrado. Entonces  $\frac{A}{I}$  es una  $C^*$ -álgebra (con la norma cociente).

### Demostración.

Ya sabemos que  $\frac{A}{I}$  es una  $*$ -álgebra de Banach. Sólo falta mostrar que  $\|a + I\|^2 = \|(a + I)^*(a + I)\|$  para todo  $a \in A$ . De hecho es suficiente probar que  $\|a + I\|^2 \leq \|(a + I)^*(a + I)\|$ , porque la otra desigualdad es inmediata ( $\|(a + I)^*(a + I)\| \leq \|(a + I)^*\| \|a + I\| = \|a + I\|^2$ ). Sea  $(u_\lambda)$  una unidad aproximada para  $I$ . Vimos que  $\|a + I\|^2 = \lim_\lambda \|a - au_\lambda\|^2$ . Ahora:

$$\|a - au_\lambda\|^2 = \|(a - au_\lambda)^*(a - au_\lambda)\|$$

## Teorema (Segal, 1949)

Si  $I \triangleleft A$ , cerrado. Entonces  $\frac{A}{I}$  es una  $C^*$ -álgebra (con la norma cociente).

### Demostración.

Ya sabemos que  $\frac{A}{I}$  es una  $*$ -álgebra de Banach. Sólo falta mostrar que  $\|a + I\|^2 = \|(a + I)^*(a + I)\|$  para todo  $a \in A$ . De hecho es suficiente probar que  $\|a + I\|^2 \leq \|(a + I)^*(a + I)\|$ , porque la otra desigualdad es inmediata ( $\|(a + I)^*(a + I)\| \leq \|(a + I)^*\| \|a + I\| = \|a + I\|^2$ ). Sea  $(u_\lambda)$  una unidad aproximada para  $I$ . Vimos que  $\|a + I\|^2 = \lim_\lambda \|a - au_\lambda\|^2$ . Ahora:

$$\|a - au_\lambda\|^2 = \|(a - au_\lambda)^*(a - au_\lambda)\| = \|(1 - u_\lambda)a^*a(1 - u_\lambda)\|$$

## Teorema (Segal, 1949)

Si  $I \triangleleft A$ , cerrado. Entonces  $\frac{A}{I}$  es una  $C^*$ -álgebra (con la norma cociente).

### Demostración.

Ya sabemos que  $\frac{A}{I}$  es una  $*$ -álgebra de Banach. Sólo falta mostrar que  $\|a + I\|^2 = \|(a + I)^*(a + I)\|$  para todo  $a \in A$ . De hecho es suficiente probar que  $\|a + I\|^2 \leq \|(a + I)^*(a + I)\|$ , porque la otra desigualdad es inmediata ( $\|(a + I)^*(a + I)\| \leq \|(a + I)^*\| \|a + I\| = \|a + I\|^2$ ). Sea  $(u_\lambda)$  una unidad aproximada para  $I$ . Vimos que  $\|a + I\|^2 = \lim_\lambda \|a - au_\lambda\|^2$ . Ahora:

$$\begin{aligned}\|a - au_\lambda\|^2 &= \|(a - au_\lambda)^*(a - au_\lambda)\| = \|(1 - u_\lambda)a^*a(1 - u_\lambda)\| \\ &\leq \|1 - u_\lambda\| \|a^*a - a^*au_\lambda\|\end{aligned}$$

## Teorema (Segal, 1949)

Si  $I \triangleleft A$ , cerrado. Entonces  $\frac{A}{I}$  es una  $C^*$ -álgebra (con la norma cociente).

### Demostración.

Ya sabemos que  $\frac{A}{I}$  es una  $*$ -álgebra de Banach. Sólo falta mostrar que  $\|a + I\|^2 = \|(a + I)^*(a + I)\|$  para todo  $a \in A$ . De hecho es suficiente probar que  $\|a + I\|^2 \leq \|(a + I)^*(a + I)\|$ , porque la otra desigualdad es inmediata ( $\|(a + I)^*(a + I)\| \leq \|(a + I)^*\| \|a + I\| = \|a + I\|^2$ ). Sea  $(u_\lambda)$  una unidad aproximada para  $I$ . Vimos que  $\|a + I\|^2 = \lim_\lambda \|a - au_\lambda\|^2$ . Ahora:

$$\begin{aligned}\|a - au_\lambda\|^2 &= \|(a - au_\lambda)^*(a - au_\lambda)\| = \|(1 - u_\lambda)a^*a(1 - u_\lambda)\| \\ &\leq \|1 - u_\lambda\| \|a^*a - a^*au_\lambda\| \leq \|a^*a - a^*au_\lambda\|.\end{aligned}$$



## Teorema (Segal, 1949)

Si  $I \triangleleft A$ , cerrado. Entonces  $\frac{A}{I}$  es una  $C^*$ -álgebra (con la norma cociente).

### Demostración.

Ya sabemos que  $\frac{A}{I}$  es una  $*$ -álgebra de Banach. Sólo falta mostrar que  $\|a + I\|^2 = \|(a + I)^*(a + I)\|$  para todo  $a \in A$ . De hecho es suficiente probar que  $\|a + I\|^2 \leq \|(a + I)^*(a + I)\|$ , porque la otra desigualdad es inmediata ( $\|(a + I)^*(a + I)\| \leq \|(a + I)^*\| \|a + I\| = \|a + I\|^2$ ). Sea  $(u_\lambda)$  una unidad aproximada para  $I$ . Vimos que  $\|a + I\|^2 = \lim_\lambda \|a - au_\lambda\|^2$ . Ahora:

$$\begin{aligned}\|a - au_\lambda\|^2 &= \|(a - au_\lambda)^*(a - au_\lambda)\| = \|(1 - u_\lambda)a^*a(1 - u_\lambda)\| \\ &\leq \|1 - u_\lambda\| \|a^*a - a^*au_\lambda\| \leq \|a^*a - a^*au_\lambda\|.\end{aligned}$$

Entonces:

## Teorema (Segal, 1949)

Si  $I \triangleleft A$ , cerrado. Entonces  $\frac{A}{I}$  es una  $C^*$ -álgebra (con la norma cociente).

### Demostración.

Ya sabemos que  $\frac{A}{I}$  es una  $*$ -álgebra de Banach. Sólo falta mostrar que  $\|a + I\|^2 = \|(a + I)^*(a + I)\|$  para todo  $a \in A$ . De hecho es suficiente probar que  $\|a + I\|^2 \leq \|(a + I)^*(a + I)\|$ , porque la otra desigualdad es inmediata ( $\|(a + I)^*(a + I)\| \leq \|(a + I)^*\| \|a + I\| = \|a + I\|^2$ ). Sea  $(u_\lambda)$  una unidad aproximada para  $I$ . Vimos que  $\|a + I\|^2 = \lim_\lambda \|a - au_\lambda\|^2$ . Ahora:

$$\begin{aligned}\|a - au_\lambda\|^2 &= \|(a - au_\lambda)^*(a - au_\lambda)\| = \|(1 - u_\lambda)a^*a(1 - u_\lambda)\| \\ &\leq \|1 - u_\lambda\| \|a^*a - a^*au_\lambda\| \leq \|a^*a - a^*au_\lambda\|.\end{aligned}$$

Entonces:

$$\|a + I\|^2 = \lim_\lambda \|a - au_\lambda\|^2$$

## Teorema (Segal, 1949)

Si  $I \triangleleft A$ , cerrado. Entonces  $\frac{A}{I}$  es una  $C^*$ -álgebra (con la norma cociente).

### Demostración.

Ya sabemos que  $\frac{A}{I}$  es una  $*$ -álgebra de Banach. Sólo falta mostrar que  $\|a + I\|^2 = \|(a + I)^*(a + I)\|$  para todo  $a \in A$ . De hecho es suficiente probar que  $\|a + I\|^2 \leq \|(a + I)^*(a + I)\|$ , porque la otra desigualdad es inmediata ( $\|(a + I)^*(a + I)\| \leq \|(a + I)^*\| \|a + I\| = \|a + I\|^2$ ). Sea  $(u_\lambda)$  una unidad aproximada para  $I$ . Vimos que  $\|a + I\|^2 = \lim_\lambda \|a - au_\lambda\|^2$ . Ahora:

$$\begin{aligned}\|a - au_\lambda\|^2 &= \|(a - au_\lambda)^*(a - au_\lambda)\| = \|(1 - u_\lambda)a^*a(1 - u_\lambda)\| \\ &\leq \|1 - u_\lambda\| \|a^*a - a^*au_\lambda\| \leq \|a^*a - a^*au_\lambda\|.\end{aligned}$$

Entonces:

$$\|a + I\|^2 = \lim_\lambda \|a - au_\lambda\|^2 \leq \lim_\lambda \|a^*a - a^*au_\lambda\|$$

## Teorema (Segal, 1949)

Si  $I \triangleleft A$ , cerrado. Entonces  $\frac{A}{I}$  es una  $C^*$ -álgebra (con la norma cociente).

### Demostración.

Ya sabemos que  $\frac{A}{I}$  es una  $*$ -álgebra de Banach. Sólo falta mostrar que  $\|a + I\|^2 = \|(a + I)^*(a + I)\|$  para todo  $a \in A$ . De hecho es suficiente probar que  $\|a + I\|^2 \leq \|(a + I)^*(a + I)\|$ , porque la otra desigualdad es inmediata ( $\|(a + I)^*(a + I)\| \leq \|(a + I)^*\| \|a + I\| = \|a + I\|^2$ ). Sea  $(u_\lambda)$  una unidad aproximada para  $I$ . Vimos que  $\|a + I\|^2 = \lim_\lambda \|a - au_\lambda\|^2$ . Ahora:

$$\begin{aligned}\|a - au_\lambda\|^2 &= \|(a - au_\lambda)^*(a - au_\lambda)\| = \|(1 - u_\lambda)a^*a(1 - u_\lambda)\| \\ &\leq \|1 - u_\lambda\| \|a^*a - a^*au_\lambda\| \leq \|a^*a - a^*au_\lambda\|.\end{aligned}$$

Entonces:

$$\|a + I\|^2 = \lim_\lambda \|a - au_\lambda\|^2 \leq \lim_\lambda \|a^*a - a^*au_\lambda\| = \|a^*a + I\|$$

## Teorema (Segal, 1949)

Si  $I \triangleleft A$ , cerrado. Entonces  $\frac{A}{I}$  es una  $C^*$ -álgebra (con la norma cociente).

### Demostración.

Ya sabemos que  $\frac{A}{I}$  es una  $*$ -álgebra de Banach. Sólo falta mostrar que  $\|a + I\|^2 = \|(a + I)^*(a + I)\|$  para todo  $a \in A$ . De hecho es suficiente probar que  $\|a + I\|^2 \leq \|(a + I)^*(a + I)\|$ , porque la otra desigualdad es inmediata ( $\|(a + I)^*(a + I)\| \leq \|(a + I)^*\| \|a + I\| = \|a + I\|^2$ ). Sea  $(u_\lambda)$  una unidad aproximada para  $I$ . Vimos que  $\|a + I\|^2 = \lim_\lambda \|a - au_\lambda\|^2$ . Ahora:

$$\begin{aligned}\|a - au_\lambda\|^2 &= \|(a - au_\lambda)^*(a - au_\lambda)\| = \|(1 - u_\lambda)a^*a(1 - u_\lambda)\| \\ &\leq \|1 - u_\lambda\| \|a^*a - a^*au_\lambda\| \leq \|a^*a - a^*au_\lambda\|.\end{aligned}$$

Entonces:

$$\|a + I\|^2 = \lim_\lambda \|a - au_\lambda\|^2 \leq \lim_\lambda \|a^*a - a^*au_\lambda\| = \|a^*a + I\| = \|(a + I)^*(a + I)\|.$$



## Teorema

*Sea  $\phi : A \rightarrow B$  un homomorfismo entre las  $C^*$ -álgebras  $A$  y  $B$ .*

## Teorema

*Sea  $\phi : A \rightarrow B$  un homomorfismo entre las  $C^*$ -álgebras  $A$  y  $B$ .*

## Teorema

*Sea  $\phi : A \rightarrow B$  un homomorfismo entre las  $C^*$ -álgebras  $A$  y  $B$ . Entonces  $\phi(A)$  es cerrado en  $B$ , y por lo tanto es una  $C^*$ -álgebra.*



## Teorema

Sea  $\phi : A \rightarrow B$  un homomorfismo entre las  $C^*$ -álgebras  $A$  y  $B$ . Entonces  $\phi(A)$  es cerrado en  $B$ , y por lo tanto es una  $C^*$ -álgebra. Además existe un único homomorfismo  $\tilde{\phi} : \frac{A}{\ker \phi} \rightarrow B$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

## Teorema

Sea  $\phi : A \rightarrow B$  un homomorfismo entre las  $C^*$ -álgebras  $A$  y  $B$ . Entonces  $\phi(A)$  es cerrado en  $B$ , y por lo tanto es una  $C^*$ -álgebra. Además existe un único homomorfismo  $\tilde{\phi} : \frac{A}{\ker \phi} \rightarrow B$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{\phi} & \\ \frac{A}{\ker \phi} & & \end{array}$$

## Teorema

Sea  $\phi : A \rightarrow B$  un homomorfismo entre las  $C^*$ -álgebras  $A$  y  $B$ . Entonces  $\phi(A)$  es cerrado en  $B$ , y por lo tanto es una  $C^*$ -álgebra. Además existe un único homomorfismo  $\tilde{\phi} : \frac{A}{\ker \phi} \rightarrow B$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{\phi} & \\ \frac{A}{\ker \phi} & & \end{array}$$

El mapa  $\tilde{\phi}$  es un homomorfismo isométrico de  $C^*$ -álgebras.

## Teorema

Sea  $\phi : A \rightarrow B$  un homomorfismo entre las  $C^*$ -álgebras  $A$  y  $B$ . Entonces  $\phi(A)$  es cerrado en  $B$ , y por lo tanto es una  $C^*$ -álgebra. Además existe un único homomorfismo  $\tilde{\phi} : \frac{A}{\ker \phi} \rightarrow B$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{\phi} & \\ \frac{A}{\ker \phi} & & \end{array}$$

El mapa  $\tilde{\phi}$  es un homomorfismo isométrico de  $C^*$ -álgebras.

## Demostración.

La existencia, unicidad e inyectividad del mapa  $\tilde{\phi}$  sigue del resultado análogo para álgebras.

## Teorema

Sea  $\phi : A \rightarrow B$  un homomorfismo entre las  $C^*$ -álgebras  $A$  y  $B$ . Entonces  $\phi(A)$  es cerrado en  $B$ , y por lo tanto es una  $C^*$ -álgebra. Además existe un único homomorfismo  $\tilde{\phi} : \frac{A}{\ker \phi} \rightarrow B$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{\phi} & \\ \frac{A}{\ker \phi} & & \end{array}$$

El mapa  $\tilde{\phi}$  es un homomorfismo isométrico de  $C^*$ -álgebras.

## Demostración.

La existencia, unicidad e inyectividad del mapa  $\tilde{\phi}$  sigue del resultado análogo para álgebras.

## Teorema

Sea  $\phi : A \rightarrow B$  un homomorfismo entre las  $C^*$ -álgebras  $A$  y  $B$ . Entonces  $\phi(A)$  es cerrado en  $B$ , y por lo tanto es una  $C^*$ -álgebra. Además existe un único homomorfismo  $\tilde{\phi} : \frac{A}{\ker \phi} \rightarrow B$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{\phi} & \\ \frac{A}{\ker \phi} & & \end{array}$$

El mapa  $\tilde{\phi}$  es un homomorfismo isométrico de  $C^*$ -álgebras.

## Demostración.

La existencia, unicidad e inyectividad del mapa  $\tilde{\phi}$  sigue del resultado análogo para álgebras. Además, como  $\ker \phi$  es un ideal cerrado de  $A$ , se tiene que  $\frac{A}{\ker \phi}$  es una  $C^*$ -álgebra.

## Teorema

Sea  $\phi : A \rightarrow B$  un homomorfismo entre las  $C^*$ -álgebras  $A$  y  $B$ . Entonces  $\phi(A)$  es cerrado en  $B$ , y por lo tanto es una  $C^*$ -álgebra. Además existe un único homomorfismo  $\tilde{\phi} : \frac{A}{\ker \phi} \rightarrow B$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{\phi} & \\ \frac{A}{\ker \phi} & & \end{array}$$

El mapa  $\tilde{\phi}$  es un homomorfismo isométrico de  $C^*$ -álgebras.

## Demostración.

La existencia, unicidad e inyectividad del mapa  $\tilde{\phi}$  sigue del resultado análogo para álgebras. Además, como  $\ker \phi$  es un ideal cerrado de  $A$ , se tiene que  $\frac{A}{\ker \phi}$  es una  $C^*$ -álgebra. Entonces  $\tilde{\phi}$  es isométrico, pues es inyectivo.

## Teorema

Sea  $\phi : A \rightarrow B$  un homomorfismo entre las  $C^*$ -álgebras  $A$  y  $B$ . Entonces  $\phi(A)$  es cerrado en  $B$ , y por lo tanto es una  $C^*$ -álgebra. Además existe un único homomorfismo  $\tilde{\phi} : \frac{A}{\ker \phi} \rightarrow B$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{\phi} & \\ \frac{A}{\ker \phi} & & \end{array}$$

El mapa  $\tilde{\phi}$  es un homomorfismo isométrico de  $C^*$ -álgebras.

## Demostración.

La existencia, unicidad e inyectividad del mapa  $\tilde{\phi}$  sigue del resultado análogo para álgebras. Además, como  $\ker \phi$  es un ideal cerrado de  $A$ , se tiene que  $\frac{A}{\ker \phi}$  es una  $C^*$ -álgebra. Entonces  $\tilde{\phi}$  es isométrico, pues es inyectivo. Luego  $\tilde{\phi} \left( \frac{A}{\ker \phi} \right) = \tilde{\phi} \circ \pi(A) = \phi(A)$  es cerrado en  $B$ . □



## Proposición

*Sean  $A$  una  $C^*$ -álgebra,  $I \triangleleft A$  (cerrado) y  $B$  una  $C^*$ -subálgebra de  $A$ .*

## Proposición

*Sean  $A$  una  $C^*$ -álgebra,  $I \triangleleft A$  (cerrado) y  $B$  una  $C^*$ -subálgebra de  $A$ .*

## Proposición

*Sean  $A$  una  $C^*$ -álgebra,  $I \triangleleft A$  (cerrado) y  $B$  una  $C^*$ -subálgebra de  $A$ . Entonces  $B + I$  es cerrado en  $A$  (y por lo tanto  $C^*$ -álgebra).*

## Proposición

Sean  $A$  una  $C^*$ -álgebra,  $I \triangleleft A$  (cerrado) y  $B$  una  $C^*$ -subálgebra de  $A$ . Entonces  $B + I$  es cerrado en  $A$  (y por lo tanto  $C^*$ -álgebra). Además

$$\frac{B}{B \cap I} \cong \frac{B + I}{I}.$$

## Proposición

Sean  $A$  una  $C^*$ -álgebra,  $I \triangleleft A$  (cerrado) y  $B$  una  $C^*$ -subálgebra de  $A$ . Entonces  $B + I$  es cerrado en  $A$  (y por lo tanto  $C^*$ -álgebra). Además

$$\frac{B}{B \cap I} \cong \frac{B + I}{I}.$$

## Demostración.

Sea  $\phi : B \rightarrow A/I$  dado por la conmutatividad del diagrama que sigue:

## Proposición

Sean  $A$  una  $C^*$ -álgebra,  $I \triangleleft A$  (cerrado) y  $B$  una  $C^*$ -subálgebra de  $A$ . Entonces  $B + I$  es cerrado en  $A$  (y por lo tanto  $C^*$ -álgebra). Además

$$\frac{B}{B \cap I} \cong \frac{B + I}{I}.$$

## Demostración.

Sea  $\phi : B \rightarrow A/I$  dado por la conmutatividad del diagrama que sigue:

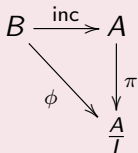
## Proposición

Sean  $A$  una  $C^*$ -álgebra,  $I \triangleleft A$  (cerrado) y  $B$  una  $C^*$ -subálgebra de  $A$ . Entonces  $B + I$  es cerrado en  $A$  (y por lo tanto  $C^*$ -álgebra). Además

$$\frac{B}{B \cap I} \cong \frac{B + I}{I}.$$

## Demostración.

Sea  $\phi : B \rightarrow A/I$  dado por la conmutatividad del diagrama que sigue:



## Proposición

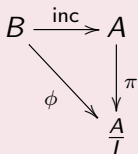
Sean  $A$  una  $C^*$ -álgebra,  $I \triangleleft A$  (cerrado) y  $B$  una  $C^*$ -subálgebra de  $A$ . Entonces  $B + I$  es cerrado en  $A$  (y por lo tanto  $C^*$ -álgebra). Además

$$\frac{B}{B \cap I} \cong \frac{B + I}{I}.$$

## Demostración.

Sea  $\phi : B \rightarrow A/I$  dado por la conmutatividad del diagrama que sigue:

Como  $\pi$  es un homomorfismo,  $\pi(B)$  debe ser cerrado,





## Proposición

Sean  $A$  una  $C^*$ -álgebra,  $I \triangleleft A$  (cerrado) y  $B$  una  $C^*$ -subálgebra de  $A$ . Entonces  $B + I$  es cerrado en  $A$  (y por lo tanto  $C^*$ -álgebra). Además

$$\frac{B}{B \cap I} \cong \frac{B + I}{I}.$$

## Demostración.

Sea  $\phi : B \rightarrow A/I$  dado por la conmutatividad del diagrama que sigue:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\text{inc}} & A \\ & \searrow \phi & \downarrow \pi \\ & & A/I \end{array}$$

Como  $\pi$  es un homomorfismo,  $\pi(B)$  debe ser cerrado, y por lo tanto  $B + I = \pi^{-1}(\pi(B))$  también es cerrado.

## Proposición

Sean  $A$  una  $C^*$ -álgebra,  $I \triangleleft A$  (cerrado) y  $B$  una  $C^*$ -subálgebra de  $A$ . Entonces  $B + I$  es cerrado en  $A$  (y por lo tanto  $C^*$ -álgebra). Además

$$\frac{B}{B \cap I} \cong \frac{B + I}{I}.$$

## Demostración.

Sea  $\phi : B \rightarrow A/I$  dado por la conmutatividad del diagrama que sigue:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\text{inc}} & A \\ & \searrow \phi & \downarrow \pi \\ & & \frac{A}{I} \end{array}$$

Como  $\pi$  es un homomorfismo,  $\pi(B)$  debe ser cerrado, y por lo tanto  $B + I = \pi^{-1}(\pi(B))$  también es cerrado. Por otro lado,  $\ker \phi = B \cap I$ , y por lo tanto

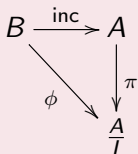
## Proposición

Sean  $A$  una  $C^*$ -álgebra,  $I \triangleleft A$  (cerrado) y  $B$  una  $C^*$ -subálgebra de  $A$ . Entonces  $B + I$  es cerrado en  $A$  (y por lo tanto  $C^*$ -álgebra). Además

$$\frac{B}{B \cap I} \cong \frac{B + I}{I}.$$

## Demostración.

Sea  $\phi : B \rightarrow A/I$  dado por la conmutatividad del diagrama que sigue:



Como  $\pi$  es un homomorfismo,  $\pi(B)$  debe ser cerrado, y por lo tanto  $B + I = \pi^{-1}(\pi(B))$  también es cerrado. Por otro lado,  $\ker \phi = B \cap I$ , y por lo tanto

$$\frac{B}{B \cap I} \cong \phi(B)$$

## Proposición

Sean  $A$  una  $C^*$ -álgebra,  $I \triangleleft A$  (cerrado) y  $B$  una  $C^*$ -subálgebra de  $A$ . Entonces  $B + I$  es cerrado en  $A$  (y por lo tanto  $C^*$ -álgebra). Además

$$\frac{B}{B \cap I} \cong \frac{B + I}{I}.$$

## Demostración.

Sea  $\phi : B \rightarrow A/I$  dado por la conmutatividad del diagrama que sigue:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\text{inc}} & A \\ & \searrow \phi & \downarrow \pi \\ & & A/I \end{array}$$

Como  $\pi$  es un homomorfismo,  $\pi(B)$  debe ser cerrado, y por lo tanto  $B + I = \pi^{-1}(\pi(B))$  también es cerrado. Por otro lado,  $\ker \phi = B \cap I$ , y por lo tanto

$$\frac{B}{B \cap I} \cong \phi(B) = \pi(B)$$

## Proposición

Sean  $A$  una  $C^*$ -álgebra,  $I \triangleleft A$  (cerrado) y  $B$  una  $C^*$ -subálgebra de  $A$ . Entonces  $B + I$  es cerrado en  $A$  (y por lo tanto  $C^*$ -álgebra). Además

$$\frac{B}{B \cap I} \cong \frac{B + I}{I}.$$

## Demostración.

Sea  $\phi : B \rightarrow A/I$  dado por la conmutatividad del diagrama que sigue:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\text{inc}} & A \\ & \searrow \phi & \downarrow \pi \\ & & A/I \end{array}$$

Como  $\pi$  es un homomorfismo,  $\pi(B)$  debe ser cerrado, y por lo tanto  $B + I = \pi^{-1}(\pi(B))$  también es cerrado. Por otro lado,  $\ker \phi = B \cap I$ , y por lo tanto

$$\frac{B}{B \cap I} \cong \phi(B) = \pi(B) = \frac{\pi^{-1}(\pi(B))}{I}$$

## Proposición

Sean  $A$  una  $C^*$ -álgebra,  $I \triangleleft A$  (cerrado) y  $B$  una  $C^*$ -subálgebra de  $A$ . Entonces  $B + I$  es cerrado en  $A$  (y por lo tanto  $C^*$ -álgebra). Además

$$\frac{B}{B \cap I} \cong \frac{B + I}{I}.$$

## Demostración.

Sea  $\phi : B \rightarrow A/I$  dado por la conmutatividad del diagrama que sigue:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\text{inc}} & A \\ & \searrow \phi & \downarrow \pi \\ & & A/I \end{array}$$

Como  $\pi$  es un homomorfismo,  $\pi(B)$  debe ser cerrado, y por lo tanto  $B + I = \pi^{-1}(\pi(B))$  también es cerrado. Por otro lado,  $\ker \phi = B \cap I$ , y por lo tanto

$$\frac{B}{B \cap I} \cong \phi(B) = \pi(B) = \frac{\pi^{-1}(\pi(B))}{I} = \frac{B + I}{I}.$$



Sea  $A = C_0(X)$ , donde  $X$  es un espacio de Hausdorff localmente compacto.

Sea  $A = C_0(X)$ , donde  $X$  es un espacio de Hausdorff localmente compacto. Sean  $\tau$  la topología de  $X$ ,



Sea  $A = C_0(X)$ , donde  $X$  es un espacio de Hausdorff localmente compacto. Sean  $\tau$  la topología de  $X$ , e indiquemos por  $\mathcal{I}(A) = \{I : I \triangleleft A\}$  el reticulado de ideales de  $A$ .

Sea  $A = C_0(X)$ , donde  $X$  es un espacio de Hausdorff localmente compacto. Sean  $\tau$  la topología de  $X$ , e indiquemos por  $\mathcal{I}(A) = \{I : I \triangleleft A\}$  el reticulado de ideales de  $A$ . Si  $V \in \tau$ , podemos identificar la  $C^*$ -álgebra  $C_0(V)$  con el ideal  $I_V := \{a \in A : a(x) = 0 \text{ si } x \notin V\}$ .

Sea  $A = C_0(X)$ , donde  $X$  es un espacio de Hausdorff localmente compacto. Sean  $\tau$  la topología de  $X$ , e indiquemos por  $\mathcal{I}(A) = \{I : I \triangleleft A\}$  el reticulado de ideales de  $A$ . Si  $V \in \tau$ , podemos identificar la  $C^*$ -álgebra  $C_0(V)$  con el ideal  $I_V := \{a \in A : a(x) = 0 \text{ si } x \notin V\}$ . Recíprocamente, si  $I \triangleleft A$ ,

Sea  $A = C_0(X)$ , donde  $X$  es un espacio de Hausdorff localmente compacto. Sean  $\tau$  la topología de  $X$ , e indiquemos por  $\mathcal{I}(A) = \{I : I \triangleleft A\}$  el reticulado de ideales de  $A$ . Si  $V \in \tau$ , podemos identificar la  $C^*$ -álgebra  $C_0(V)$  con el ideal  $I_V := \{a \in A : a(x) = 0 \text{ si } x \notin V\}$ . Recíprocamente, si  $I \triangleleft A$ , entonces el conjunto  $V^I := \{x \in X : \exists a \in I : a(x) \neq 0\}$  es obviamente abierto.

Sea  $A = C_0(X)$ , donde  $X$  es un espacio de Hausdorff localmente compacto. Sean  $\tau$  la topología de  $X$ , e indiquemos por  $\mathcal{I}(A) = \{I : I \triangleleft A\}$  el reticulado de ideales de  $A$ . Si  $V \in \tau$ , podemos identificar la  $C^*$ -álgebra  $C_0(V)$  con el ideal  $I_V := \{a \in A : a(x) = 0 \text{ si } x \notin V\}$ . Recíprocamente, si  $I \triangleleft A$ , entonces el conjunto  $V^I := \{x \in X : \exists a \in I : a(x) \neq 0\}$  es obviamente abierto.

## Teorema

Los mapas  $\mathcal{I}(A) \longrightarrow \tau$   
 $I \longmapsto V^I$

Sea  $A = C_0(X)$ , donde  $X$  es un espacio de Hausdorff localmente compacto. Sean  $\tau$  la topología de  $X$ , e indiquemos por  $\mathcal{I}(A) = \{I : I \triangleleft A\}$  el reticulado de ideales de  $A$ . Si  $V \in \tau$ , podemos identificar la  $C^*$ -álgebra  $C_0(V)$  con el ideal  $I_V := \{a \in A : a(x) = 0 \text{ si } x \notin V\}$ . Recíprocamente, si  $I \triangleleft A$ , entonces el conjunto  $V^I := \{x \in X : \exists a \in I : a(x) \neq 0\}$  es obviamente abierto.

## Teorema

Los mapas  $\mathcal{I}(A) \longrightarrow \tau$   
 $I \longmapsto V^I$

Sea  $A = C_0(X)$ , donde  $X$  es un espacio de Hausdorff localmente compacto. Sean  $\tau$  la topología de  $X$ , e indiquemos por  $\mathcal{I}(A) = \{I : I \triangleleft A\}$  el reticulado de ideales de  $A$ . Si  $V \in \tau$ , podemos identificar la  $C^*$ -álgebra  $C_0(V)$  con el ideal  $I_V := \{a \in A : a(x) = 0 \text{ si } x \notin V\}$ . Recíprocamente, si  $I \triangleleft A$ , entonces el conjunto  $V^I := \{x \in X : \exists a \in I : a(x) \neq 0\}$  es obviamente abierto.

## Teorema

Los mapas  $\mathcal{I}(A) \longrightarrow \tau$     y     $\tau \longrightarrow \mathcal{I}(A)$   
 $I \longmapsto V^I$                        $V \longmapsto I_V$

Sea  $A = C_0(X)$ , donde  $X$  es un espacio de Hausdorff localmente compacto. Sean  $\tau$  la topología de  $X$ , e indiquemos por  $\mathcal{I}(A) = \{I : I \triangleleft A\}$  el reticulado de ideales de  $A$ . Si  $V \in \tau$ , podemos identificar la  $C^*$ -álgebra  $C_0(V)$  con el ideal  $I_V := \{a \in A : a(x) = 0 \text{ si } x \notin V\}$ . Recíprocamente, si  $I \triangleleft A$ , entonces el conjunto  $V^I := \{x \in X : \exists a \in I : a(x) \neq 0\}$  es obviamente abierto.

## Teorema

Los mapas  $\mathcal{I}(A) \longrightarrow \tau$  y  $\tau \longrightarrow \mathcal{I}(A)$  son mutuamente inversos,  
 $I \longmapsto V^I$   $V \longmapsto I_V$



Sea  $A = C_0(X)$ , donde  $X$  es un espacio de Hausdorff localmente compacto. Sean  $\tau$  la topología de  $X$ , e indiquemos por  $\mathcal{I}(A) = \{I : I \triangleleft A\}$  el reticulado de ideales de  $A$ . Si  $V \in \tau$ , podemos identificar la  $C^*$ -álgebra  $C_0(V)$  con el ideal  $I_V := \{a \in A : a(x) = 0 \text{ si } x \notin V\}$ . Recíprocamente, si  $I \triangleleft A$ , entonces el conjunto  $V^I := \{x \in X : \exists a \in I : a(x) \neq 0\}$  es obviamente abierto.

## Teorema

Los mapas  $\mathcal{I}(A) \longrightarrow \tau$  y  $\tau \longrightarrow \mathcal{I}(A)$  son mutuamente inversos, y

$$I \longmapsto V^I \qquad V \longmapsto I_V$$

son isomorfismos de reticulados.

Sea  $A = C_0(X)$ , donde  $X$  es un espacio de Hausdorff localmente compacto. Sean  $\tau$  la topología de  $X$ , e indiquemos por  $\mathcal{I}(A) = \{I : I \triangleleft A\}$  el reticulado de ideales de  $A$ . Si  $V \in \tau$ , podemos identificar la  $C^*$ -álgebra  $C_0(V)$  con el ideal  $I_V := \{a \in A : a(x) = 0 \text{ si } x \notin V\}$ . Recíprocamente, si  $I \triangleleft A$ , entonces el conjunto  $V^I := \{x \in X : \exists a \in I : a(x) \neq 0\}$  es obviamente abierto.

## Teorema

Los mapas  $\mathcal{I}(A) \longrightarrow \tau$  y  $\tau \longrightarrow \mathcal{I}(A)$  son mutuamente inversos, y

$$I \longmapsto V^I \qquad V \longmapsto I_V$$

son isomorfismos de reticulados.

## Demostración.

Sea  $A = C_0(X)$ , donde  $X$  es un espacio de Hausdorff localmente compacto. Sean  $\tau$  la topología de  $X$ , e indiquemos por  $\mathcal{I}(A) = \{I : I \triangleleft A\}$  el reticulado de ideales de  $A$ . Si  $V \in \tau$ , podemos identificar la  $C^*$ -álgebra  $C_0(V)$  con el ideal  $I_V := \{a \in A : a(x) = 0 \text{ si } x \notin V\}$ . Recíprocamente, si  $I \triangleleft A$ , entonces el conjunto  $V^I := \{x \in X : \exists a \in I : a(x) \neq 0\}$  es obviamente abierto.

## Teorema

Los mapas  $\mathcal{I}(A) \longrightarrow \tau$  y  $\tau \longrightarrow \mathcal{I}(A)$  son mutuamente inversos, y

$$I \longmapsto V^I \qquad V \longmapsto I_V$$

son isomorfismos de reticulados.

## Demostración.

Sea  $A = C_0(X)$ , donde  $X$  es un espacio de Hausdorff localmente compacto. Sean  $\tau$  la topología de  $X$ , e indiquemos por  $\mathcal{I}(A) = \{I : I \triangleleft A\}$  el reticulado de ideales de  $A$ . Si  $V \in \tau$ , podemos identificar la  $C^*$ -álgebra  $C_0(V)$  con el ideal  $I_V := \{a \in A : a(x) = 0 \text{ si } x \notin V\}$ . Recíprocamente, si  $I \triangleleft A$ , entonces el conjunto  $V^I := \{x \in X : \exists a \in I : a(x) \neq 0\}$  es obviamente abierto.

## Teorema

Los mapas  $\mathcal{I}(A) \longrightarrow \tau$  y  $\tau \longrightarrow \mathcal{I}(A)$  son mutuamente inversos, y

$$I \longmapsto V^I \qquad V \longmapsto I_V$$

son isomorfismos de reticulados.

**Demostración.** Supongamos que  $U$  y  $V$  son elementos de  $\tau$ , con  $V \setminus U \neq \emptyset$ .

Sea  $A = C_0(X)$ , donde  $X$  es un espacio de Hausdorff localmente compacto. Sean  $\tau$  la topología de  $X$ , e indiquemos por  $\mathcal{I}(A) = \{I : I \triangleleft A\}$  el reticulado de ideales de  $A$ . Si  $V \in \tau$ , podemos identificar la  $C^*$ -álgebra  $C_0(V)$  con el ideal  $I_V := \{a \in A : a(x) = 0 \text{ si } x \notin V\}$ . Recíprocamente, si  $I \triangleleft A$ , entonces el conjunto  $V^I := \{x \in X : \exists a \in I : a(x) \neq 0\}$  es obviamente abierto.

## Teorema

Los mapas  $\mathcal{I}(A) \longrightarrow \tau$  y  $\tau \longrightarrow \mathcal{I}(A)$  son mutuamente inversos, y

$$I \longmapsto V^I \qquad V \longmapsto I_V$$

son isomorfismos de reticulados.

**Demostración.** Supongamos que  $U$  y  $V$  son elementos de  $\tau$ , con  $V \setminus U \neq \emptyset$ . Si  $x \in V \setminus U$ , entonces existe  $a \in A$  tal que  $a(x) = 1$ ,  $a(y) = 0$  si  $y \notin V$ .

Sea  $A = C_0(X)$ , donde  $X$  es un espacio de Hausdorff localmente compacto. Sean  $\tau$  la topología de  $X$ , e indiquemos por  $\mathcal{I}(A) = \{I : I \triangleleft A\}$  el reticulado de ideales de  $A$ . Si  $V \in \tau$ , podemos identificar la  $C^*$ -álgebra  $C_0(V)$  con el ideal  $I_V := \{a \in A : a(x) = 0 \text{ si } x \notin V\}$ . Recíprocamente, si  $I \triangleleft A$ , entonces el conjunto  $V^I := \{x \in X : \exists a \in I : a(x) \neq 0\}$  es obviamente abierto.

## Teorema

Los mapas  $\mathcal{I}(A) \longrightarrow \tau$  y  $\tau \longrightarrow \mathcal{I}(A)$  son mutuamente inversos, y

$$I \longmapsto V^I \qquad V \longmapsto I_V$$

son isomorfismos de reticulados.

**Demostración.** Supongamos que  $U$  y  $V$  son elementos de  $\tau$ , con  $V \setminus U \neq \emptyset$ . Si  $x \in V \setminus U$ , entonces existe  $a \in A$  tal que  $a(x) = 1$ ,  $a(y) = 0$  si  $y \notin V$ . Entonces  $a \in I_V \setminus I_U$ ,

Sea  $A = C_0(X)$ , donde  $X$  es un espacio de Hausdorff localmente compacto. Sean  $\tau$  la topología de  $X$ , e indiquemos por  $\mathcal{I}(A) = \{I : I \triangleleft A\}$  el reticulado de ideales de  $A$ . Si  $V \in \tau$ , podemos identificar la  $C^*$ -álgebra  $C_0(V)$  con el ideal  $I_V := \{a \in A : a(x) = 0 \text{ si } x \notin V\}$ . Recíprocamente, si  $I \triangleleft A$ , entonces el conjunto  $V^I := \{x \in X : \exists a \in I : a(x) \neq 0\}$  es obviamente abierto.

## Teorema

Los mapas  $\mathcal{I}(A) \longrightarrow \tau$  y  $\tau \longrightarrow \mathcal{I}(A)$  son mutuamente inversos, y

$$I \longmapsto V^I \qquad V \longmapsto I_V$$

son isomorfismos de reticulados.

**Demostración.** Supongamos que  $U$  y  $V$  son elementos de  $\tau$ , con  $V \setminus U \neq \emptyset$ . Si  $x \in V \setminus U$ , entonces existe  $a \in A$  tal que  $a(x) = 1$ ,  $a(y) = 0$  si  $y \notin V$ . Entonces  $a \in I_V \setminus I_U$ , lo que muestra que el mapa  $V \mapsto I_V$  es inyectivo.

Sea  $A = C_0(X)$ , donde  $X$  es un espacio de Hausdorff localmente compacto. Sean  $\tau$  la topología de  $X$ , e indiquemos por  $\mathcal{I}(A) = \{I : I \triangleleft A\}$  el reticulado de ideales de  $A$ . Si  $V \in \tau$ , podemos identificar la  $C^*$ -álgebra  $C_0(V)$  con el ideal  $I_V := \{a \in A : a(x) = 0 \text{ si } x \notin V\}$ . Recíprocamente, si  $I \triangleleft A$ , entonces el conjunto  $V^I := \{x \in X : \exists a \in I : a(x) \neq 0\}$  es obviamente abierto.

## Teorema

Los mapas  $\mathcal{I}(A) \longrightarrow \tau$  y  $\tau \longrightarrow \mathcal{I}(A)$  son mutuamente inversos, y

$$I \longmapsto V^I \qquad V \longmapsto I_V$$

son isomorfismos de reticulados.

**Demostración.** Supongamos que  $U$  y  $V$  son elementos de  $\tau$ , con  $V \setminus U \neq \emptyset$ . Si  $x \in V \setminus U$ , entonces existe  $a \in A$  tal que  $a(x) = 1$ ,  $a(y) = 0$  si  $y \notin V$ . Entonces  $a \in I_V \setminus I_U$ , lo que muestra que el mapa  $V \mapsto I_V$  es inyectivo. También preserva el orden, pues si  $U \subseteq V$ , entonces claramente  $I_U \subseteq I_V$ .



Supongamos que  $I \triangleleft A$ ,

Supongamos que  $I \triangleleft A$ , y sea  $J := I_{V'} \cong C_0(V')$ .

Supongamos que  $I \triangleleft A$ , y sea  $J := I_{V'} \cong C_0(V')$ . Si  $a \in I$  y  $x \notin V'$ ,

Supongamos que  $I \triangleleft A$ , y sea  $J := I_{V'} \cong C_0(V')$ . Si  $a \in I$  y  $x \notin V'$ , entonces  $a(x) = 0$ , y por lo tanto  $a \in I_{V'}$ .

Supongamos que  $I \triangleleft A$ , y sea  $J := I_{V'} \cong C_0(V')$ . Si  $a \in I$  y  $x \notin V'$ , entonces  $a(x) = 0$ , y por lo tanto  $a \in I_{V'}$ . Ahora,  $I$  visto dentro de  $C_0(V')$  es una subálgebra autoadjunta, cerrada y que no se anula en  $V'$ .

Supongamos que  $I \triangleleft A$ , y sea  $J := I_{V'} \cong C_0(V')$ . Si  $a \in I$  y  $x \notin V'$ , entonces  $a(x) = 0$ , y por lo tanto  $a \in I_{V'}$ . Ahora,  $I$  visto dentro de  $C_0(V')$  es una subálgebra autoadjunta, cerrada y que no se anula en  $V'$ . Sean  $x, y \in V'$ , y sea  $a \in I$  tal que  $a(x) \neq 0$ .

Supongamos que  $I \triangleleft A$ , y sea  $J := I_{V'} \cong C_0(V')$ . Si  $a \in I$  y  $x \notin V'$ , entonces  $a(x) = 0$ , y por lo tanto  $a \in I_{V'}$ . Ahora,  $I$  visto dentro de  $C_0(V')$  es una subálgebra autoadjunta, cerrada y que no se anula en  $V'$ . Sean  $x, y \in V'$ , y sea  $a \in I$  tal que  $a(x) \neq 0$ . Según el lema de Urysohn existe  $b \in A$  tal que  $b(x) = 1$ ,  $b(y) = 0$ .

Supongamos que  $I \triangleleft A$ , y sea  $J := I_{V'} \cong C_0(V')$ . Si  $a \in I$  y  $x \notin V'$ , entonces  $a(x) = 0$ , y por lo tanto  $a \in I_{V'}$ . Ahora,  $I$  visto dentro de  $C_0(V')$  es una subálgebra autoadjunta, cerrada y que no se anula en  $V'$ . Sean  $x, y \in V'$ , y sea  $a \in I$  tal que  $a(x) \neq 0$ . Según el lema de Urysohn existe  $b \in A$  tal que  $b(x) = 1$ ,  $b(y) = 0$ . Pero entonces  $c = ab \in I$ ,  $c(x) \neq 0 = c(y)$ , y por lo tanto  $I$  separa puntos de  $V'$ .



Supongamos que  $I \triangleleft A$ , y sea  $J := I_{V'} \cong C_0(V')$ . Si  $a \in I$  y  $x \notin V'$ , entonces  $a(x) = 0$ , y por lo tanto  $a \in I_{V'}$ . Ahora,  $I$  visto dentro de  $C_0(V')$  es una subálgebra autoadjunta, cerrada y que no se anula en  $V'$ . Sean  $x, y \in V'$ , y sea  $a \in I$  tal que  $a(x) \neq 0$ . Según el lema de Urysohn existe  $b \in A$  tal que  $b(x) = 1$ ,  $b(y) = 0$ . Pero entonces  $c = ab \in I$ ,  $c(x) \neq 0 = c(y)$ , y por lo tanto  $I$  separa puntos de  $V'$ . Entonces  $I = I_{V'}$  por el teorema de Stone-Weierstrass.

Supongamos que  $I \triangleleft A$ , y sea  $J := I_{V'} \cong C_0(V')$ . Si  $a \in I$  y  $x \notin V'$ , entonces  $a(x) = 0$ , y por lo tanto  $a \in I_{V'}$ . Ahora,  $I$  visto dentro de  $C_0(V')$  es una subálgebra autoadjunta, cerrada y que no se anula en  $V'$ . Sean  $x, y \in V'$ , y sea  $a \in I$  tal que  $a(x) \neq 0$ . Según el lema de Urysohn existe  $b \in A$  tal que  $b(x) = 1$ ,  $b(y) = 0$ . Pero entonces  $c = ab \in I$ ,  $c(x) \neq 0 = c(y)$ , y por lo tanto  $I$  separa puntos de  $V'$ . Entonces  $I = I_{V'}$  por el teorema de Stone-Weierstrass. Por lo tanto el mapa  $V \mapsto I_V$  es una biyección que preserva el orden,

Supongamos que  $I \triangleleft A$ , y sea  $J := I_{V'} \cong C_0(V')$ . Si  $a \in I$  y  $x \notin V'$ , entonces  $a(x) = 0$ , y por lo tanto  $a \in I_{V'}$ . Ahora,  $I$  visto dentro de  $C_0(V')$  es una subálgebra autoadjunta, cerrada y que no se anula en  $V'$ . Sean  $x, y \in V'$ , y sea  $a \in I$  tal que  $a(x) \neq 0$ . Según el lema de Urysohn existe  $b \in A$  tal que  $b(x) = 1$ ,  $b(y) = 0$ . Pero entonces  $c = ab \in I$ ,  $c(x) \neq 0 = c(y)$ , y por lo tanto  $I$  separa puntos de  $V'$ . Entonces  $I = I_{V'}$  por el teorema de Stone-Weierstrass. Por lo tanto el mapa  $V \mapsto I_V$  es una biyección que preserva el orden, y cuyo inverso es  $I \mapsto V'$ , que claramente preserva el orden también.

Supongamos que  $I \triangleleft A$ , y sea  $J := I_{V'} \cong C_0(V')$ . Si  $a \in I$  y  $x \notin V'$ , entonces  $a(x) = 0$ , y por lo tanto  $a \in I_{V'}$ . Ahora,  $I$  visto dentro de  $C_0(V')$  es una subálgebra autoadjunta, cerrada y que no se anula en  $V'$ . Sean  $x, y \in V'$ , y sea  $a \in I$  tal que  $a(x) \neq 0$ . Según el lema de Urysohn existe  $b \in A$  tal que  $b(x) = 1$ ,  $b(y) = 0$ . Pero entonces  $c = ab \in I$ ,  $c(x) \neq 0 = c(y)$ , y por lo tanto  $I$  separa puntos de  $V'$ . Entonces  $I = I_{V'}$  por el teorema de Stone-Weierstrass. Por lo tanto el mapa  $V \mapsto I_V$  es una biyección que preserva el orden, y cuyo inverso es  $I \mapsto V'$ , que claramente preserva el orden también. Finalmente, obsérvese que si  $V \in \tau$ , entonces

Supongamos que  $I \triangleleft A$ , y sea  $J := I_{V'} \cong C_0(V')$ . Si  $a \in I$  y  $x \notin V'$ , entonces  $a(x) = 0$ , y por lo tanto  $a \in I_{V'}$ . Ahora,  $I$  visto dentro de  $C_0(V')$  es una subálgebra autoadjunta, cerrada y que no se anula en  $V'$ . Sean  $x, y \in V'$ , y sea  $a \in I$  tal que  $a(x) \neq 0$ . Según el lema de Urysohn existe  $b \in A$  tal que  $b(x) = 1$ ,  $b(y) = 0$ . Pero entonces  $c = ab \in I$ ,  $c(x) \neq 0 = c(y)$ , y por lo tanto  $I$  separa puntos de  $V'$ . Entonces  $I = I_{V'}$  por el teorema de Stone-Weierstrass. Por lo tanto el mapa  $V \mapsto I_V$  es una biyección que preserva el orden, y cuyo inverso es  $I \mapsto V'$ , que claramente preserva el orden también. Finalmente, obsérvese que si  $V \in \tau$ , entonces

$$\frac{C_0(X)}{C_0(V)} \cong C_0(X \setminus V).$$

Supongamos que  $I \triangleleft A$ , y sea  $J := I_{V'} \cong C_0(V')$ . Si  $a \in I$  y  $x \notin V'$ , entonces  $a(x) = 0$ , y por lo tanto  $a \in I_{V'}$ . Ahora,  $I$  visto dentro de  $C_0(V')$  es una subálgebra autoadjunta, cerrada y que no se anula en  $V'$ . Sean  $x, y \in V'$ , y sea  $a \in I$  tal que  $a(x) \neq 0$ . Según el lema de Urysohn existe  $b \in A$  tal que  $b(x) = 1$ ,  $b(y) = 0$ . Pero entonces  $c = ab \in I$ ,  $c(x) \neq 0 = c(y)$ , y por lo tanto  $I$  separa puntos de  $V'$ . Entonces  $I = I_{V'}$  por el teorema de Stone-Weierstrass. Por lo tanto el mapa  $V \mapsto I_V$  es una biyección que preserva el orden, y cuyo inverso es  $I \mapsto V'$ , que claramente preserva el orden también. Finalmente, obsérvese que si  $V \in \tau$ , entonces

$$\frac{C_0(X)}{C_0(V)} \cong C_0(X \setminus V).$$

En efecto, basta notar que la restricción  $\phi : C_0(X) \rightarrow C_0(X \setminus V)$ ,

Supongamos que  $I \triangleleft A$ , y sea  $J := I_{V'} \cong C_0(V')$ . Si  $a \in I$  y  $x \notin V'$ , entonces  $a(x) = 0$ , y por lo tanto  $a \in I_{V'}$ . Ahora,  $I$  visto dentro de  $C_0(V')$  es una subálgebra autoadjunta, cerrada y que no se anula en  $V'$ . Sean  $x, y \in V'$ , y sea  $a \in I$  tal que  $a(x) \neq 0$ . Según el lema de Urysohn existe  $b \in A$  tal que  $b(x) = 1$ ,  $b(y) = 0$ . Pero entonces  $c = ab \in I$ ,  $c(x) \neq 0 = c(y)$ , y por lo tanto  $I$  separa puntos de  $V'$ . Entonces  $I = I_{V'}$  por el teorema de Stone-Weierstrass. Por lo tanto el mapa  $V \mapsto I_V$  es una biyección que preserva el orden, y cuyo inverso es  $I \mapsto V'$ , que claramente preserva el orden también. Finalmente, obsérvese que si  $V \in \tau$ , entonces

$$\frac{C_0(X)}{C_0(V)} \cong C_0(X \setminus V).$$

En efecto, basta notar que la restricción  $\phi : C_0(X) \rightarrow C_0(X \setminus V)$ , dada por  $a \mapsto a|_{X \setminus V}$ ,  $\phi$  es un homomorfismo sobreyectivo cuyo núcleo es  $C_0(V)$ .

Supongamos que  $I \triangleleft A$ , y sea  $J := I_{V'} \cong C_0(V')$ . Si  $a \in I$  y  $x \notin V'$ , entonces  $a(x) = 0$ , y por lo tanto  $a \in I_{V'}$ . Ahora,  $I$  visto dentro de  $C_0(V')$  es una subálgebra autoadjunta, cerrada y que no se anula en  $V'$ . Sean  $x, y \in V'$ , y sea  $a \in I$  tal que  $a(x) \neq 0$ . Según el lema de Urysohn existe  $b \in A$  tal que  $b(x) = 1$ ,  $b(y) = 0$ . Pero entonces  $c = ab \in I$ ,  $c(x) \neq 0 = c(y)$ , y por lo tanto  $I$  separa puntos de  $V'$ . Entonces  $I = I_{V'}$  por el teorema de Stone-Weierstrass. Por lo tanto el mapa  $V \mapsto I_V$  es una biyección que preserva el orden, y cuyo inverso es  $I \mapsto V'$ , que claramente preserva el orden también. Finalmente, obsérvese que si  $V \in \tau$ , entonces

$$\frac{C_0(X)}{C_0(V)} \cong C_0(X \setminus V).$$

En efecto, basta notar que la restricción  $\phi : C_0(X) \rightarrow C_0(X \setminus V)$ , dada por  $a \mapsto a|_{X \setminus V}$ ,  $\phi$  es un homomorfismo sobreyectivo cuyo núcleo es  $C_0(V)$ . Luego podemos pensar los cerrados de  $X$  como los cocientes de  $C_0(X)$ .



# Subálgebras hereditarias

Sean  $A = M_3(\mathbb{C})$ ,

# Subálgebras hereditarias

Sean  $A = M_3(\mathbb{C})$ , y considérense las siguientes  $C^*$ -subálgebras de  $A$ :

# Subálgebras hereditarias

Sean  $A = M_3(\mathbb{C})$ , y considérense las siguientes  $C^*$ -subálgebras de  $A$ :

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

# Subálgebras hereditarias

Sean  $A = M_3(\mathbb{C})$ , y considérense las siguientes  $C^*$ -subálgebras de  $A$ :

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{y} \quad C := \left\{ \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

# Subálgebras hereditarias

Sean  $A = M_3(\mathbb{C})$ , y considérense las siguientes  $C^*$ -subálgebras de  $A$ :

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{y} \quad C := \left\{ \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\text{Si } p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

# Subálgebras hereditarias

Sean  $A = M_3(\mathbb{C})$ , y considérense las siguientes  $C^*$ -subálgebras de  $A$ :

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{y} \quad C := \left\{ \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si  $p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , entonces  $0 < p < 1 \in B$ ,

# Subálgebras hereditarias

Sean  $A = M_3(\mathbb{C})$ , y considérense las siguientes  $C^*$ -subálgebras de  $A$ :

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{y} \quad C := \left\{ \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si  $p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , entonces  $0 < p < 1 \in B$ , y  $p \notin C$ .

# Subálgebras hereditarias

Sean  $A = M_3(\mathbb{C})$ , y considérense las siguientes  $C^*$ -subálgebras de  $A$ :

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{y} \quad C := \left\{ \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si  $p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , entonces  $0 < p < 1 \in B$ , y  $p \notin C$ . Mientras tanto, si  $c \in C_+$ , y  $0 \leq a \leq c$ ,



# Subálgebras hereditarias

Sean  $A = M_3(\mathbb{C})$ , y considérense las siguientes  $C^*$ -subálgebras de  $A$ :

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{y} \quad C := \left\{ \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si  $p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , entonces  $0 < p < 1 \in B$ , y  $p \notin C$ . Mientras tanto, si  $c \in C_+$ , y  $0 \leq a \leq c$ , entonces necesariamente  $a \in C$ :

# Subálgebras hereditarias

Sean  $A = M_3(\mathbb{C})$ , y considérense las siguientes  $C^*$ -subálgebras de  $A$ :

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{y} \quad C := \left\{ \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si  $p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , entonces  $0 < p < 1 \in B$ , y  $p \notin C$ . Mientras tanto, si  $c \in C_+$ , y  $0 \leq a \leq c$ , entonces necesariamente  $a \in C$ :

$$|\langle ax, y \rangle|^2 \leq \langle ax, x \rangle \langle ay, y \rangle$$

# Subálgebras hereditarias

Sean  $A = M_3(\mathbb{C})$ , y considérense las siguientes  $C^*$ -subálgebras de  $A$ :

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{y} \quad C := \left\{ \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si  $p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , entonces  $0 < p < 1 \in B$ , y  $p \notin C$ . Mientras tanto, si  $c \in C_+$ , y  $0 \leq a \leq c$ , entonces necesariamente  $a \in C$ :

$$|\langle ax, y \rangle|^2 \leq \langle ax, x \rangle \langle ay, y \rangle \leq \langle cx, x \rangle \langle cy, y \rangle,$$

# Subálgebras hereditarias

Sean  $A = M_3(\mathbb{C})$ , y considérense las siguientes  $C^*$ -subálgebras de  $A$ :

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{y} \quad C := \left\{ \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si  $p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , entonces  $0 < p < 1 \in B$ , y  $p \notin C$ . Mientras tanto, si  $c \in C_+$ , y  $0 \leq a \leq c$ , entonces necesariamente  $a \in C$ :

$$|\langle ax, y \rangle|^2 \leq \langle ax, x \rangle \langle ay, y \rangle \leq \langle cx, x \rangle \langle cy, y \rangle,$$

de donde  $\ker a \subseteq \ker c$ ,

# Subálgebras hereditarias

Sean  $A = M_3(\mathbb{C})$ , y considérense las siguientes  $C^*$ -subálgebras de  $A$ :

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{y} \quad C := \left\{ \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si  $p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , entonces  $0 < p < 1 \in B$ , y  $p \notin C$ . Mientras tanto, si  $c \in C_+$ , y  $0 \leq a \leq c$ , entonces necesariamente  $a \in C$ :

$$|\langle ax, y \rangle|^2 \leq \langle ax, x \rangle \langle ay, y \rangle \leq \langle cx, x \rangle \langle cy, y \rangle,$$

de donde  $\ker a \subseteq \ker c$ , y en particular  $a(e_3) = 0$ ,

# Subálgebras hereditarias

Sean  $A = M_3(\mathbb{C})$ , y considérense las siguientes  $C^*$ -subálgebras de  $A$ :

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{y} \quad C := \left\{ \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si  $p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , entonces  $0 < p < 1 \in B$ , y  $p \notin C$ . Mientras tanto, si  $c \in C_+$ , y  $0 \leq a \leq c$ , entonces necesariamente  $a \in C$ :

$$|\langle ax, y \rangle|^2 \leq \langle ax, x \rangle \langle ay, y \rangle \leq \langle cx, x \rangle \langle cy, y \rangle,$$

de donde  $\ker a \subseteq \ker c$ , y en particular  $a(e_3) = 0$ , lo que implica que  $a \in C$ .

# Subálgebras hereditarias

Sean  $A = M_3(\mathbb{C})$ , y considérense las siguientes  $C^*$ -subálgebras de  $A$ :

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{y} \quad C := \left\{ \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si  $p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , entonces  $0 < p < 1 \in B$ , y  $p \notin C$ . Mientras tanto, si  $c \in C_+$ , y  $0 \leq a \leq c$ , entonces necesariamente  $a \in C$ :

$$|\langle ax, y \rangle|^2 \leq \langle ax, x \rangle \langle ay, y \rangle \leq \langle cx, x \rangle \langle cy, y \rangle,$$

de donde  $\ker a \subseteq \ker c$ , y en particular  $a(e_3) = 0$ , lo que implica que  $a \in C$ .

## Definición

Sea  $B$  una  $C^*$ -subálgebra de la  $C^*$ -álgebra  $A$ .

# Subálgebras hereditarias

Sean  $A = M_3(\mathbb{C})$ , y considérense las siguientes  $C^*$ -subálgebras de  $A$ :

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{y} \quad C := \left\{ \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si  $p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , entonces  $0 < p < 1 \in B$ , y  $p \notin C$ . Mientras tanto, si  $c \in C_+$ , y  $0 \leq a \leq c$ , entonces necesariamente  $a \in C$ :

$$|\langle ax, y \rangle|^2 \leq \langle ax, x \rangle \langle ay, y \rangle \leq \langle cx, x \rangle \langle cy, y \rangle,$$

de donde  $\ker a \subseteq \ker c$ , y en particular  $a(e_3) = 0$ , lo que implica que  $a \in C$ .

## Definición

Sea  $B$  una  $C^*$ -subálgebra de la  $C^*$ -álgebra  $A$ .



# Subálgebras hereditarias

Sean  $A = M_3(\mathbb{C})$ , y considérense las siguientes  $C^*$ -subálgebras de  $A$ :

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{y} \quad C := \left\{ \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si  $p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , entonces  $0 < p < 1 \in B$ , y  $p \notin C$ . Mientras tanto, si  $c \in C_+$ , y  $0 \leq a \leq c$ , entonces necesariamente  $a \in C$ :

$$|\langle ax, y \rangle|^2 \leq \langle ax, x \rangle \langle ay, y \rangle \leq \langle cx, x \rangle \langle cy, y \rangle,$$

de donde  $\ker a \subseteq \ker c$ , y en particular  $a(e_3) = 0$ , lo que implica que  $a \in C$ .

## Definición

Sea  $B$  una  $C^*$ -subálgebra de la  $C^*$ -álgebra  $A$ . Se dice que  $B$  es hereditaria en  $A$  si  $0 \leq a \leq b \in B_+$  implica  $a \in B$ .

## Ejemplo

Sean  $p = p^*p \in A$ ,

## Ejemplo

Sean  $p = p^*p \in A$ ,

## Ejemplo

Sean  $p = p^*p \in A$ , y  $p^\perp := 1 - p$ .

## Ejemplo

Sean  $p = p^*p \in A$ , y  $p^\perp := 1 - p$ . Se tiene  $A \cong \begin{pmatrix} pAp & pAp^\perp \\ p^\perp Ap & p^\perp Ap^\perp \end{pmatrix}$ .

## Ejemplo

Sean  $p = p^*p \in A$ , y  $p^\perp := 1 - p$ . Se tiene  $A \cong \begin{pmatrix} pAp & pAp^\perp \\ p^\perp Ap & p^\perp Ap^\perp \end{pmatrix}$ . El conjunto  $pAp$  es una  $C^*$ -subálgebra de  $A$ .

## Ejemplo

Sean  $p = p^*p \in A$ , y  $p^\perp := 1 - p$ . Se tiene  $A \cong \begin{pmatrix} pAp & pAp^\perp \\ p^\perp Ap & p^\perp Ap^\perp \end{pmatrix}$ . El conjunto  $pAp$  es una  $C^*$ -subálgebra de  $A$ . Además es hereditaria en  $A$ : si  $0 \leq a \leq pbp$ , entonces

## Ejemplo

Sean  $p = p^*p \in A$ , y  $p^\perp := 1 - p$ . Se tiene  $A \cong \begin{pmatrix} pAp & pAp^\perp \\ p^\perp Ap & p^\perp Ap^\perp \end{pmatrix}$ . El conjunto  $pAp$  es una  $C^*$ -subálgebra de  $A$ . Además es hereditaria en  $A$ : si  $0 \leq a \leq pbp$ , entonces

$$0 \leq p^\perp ap^\perp \leq p^\perp pbpp^\perp = 0,$$



## Ejemplo

Sean  $p = p^*p \in A$ , y  $p^\perp := 1 - p$ . Se tiene  $A \cong \begin{pmatrix} pAp & pAp^\perp \\ p^\perp Ap & p^\perp Ap^\perp \end{pmatrix}$ . El conjunto  $pAp$  es una  $C^*$ -subálgebra de  $A$ . Además es hereditaria en  $A$ : si  $0 \leq a \leq pbp$ , entonces

$$0 \leq p^\perp ap^\perp \leq p^\perp pbpp^\perp = 0,$$

de donde  $p^\perp ap^\perp = 0$ ,

## Ejemplo

Sean  $p = p^*p \in A$ , y  $p^\perp := 1 - p$ . Se tiene  $A \cong \begin{pmatrix} pAp & pAp^\perp \\ p^\perp Ap & p^\perp Ap^\perp \end{pmatrix}$ . El conjunto  $pAp$  es una  $C^*$ -subálgebra de  $A$ . Además es hereditaria en  $A$ : si  $0 \leq a \leq pbp$ , entonces

$$0 \leq p^\perp ap^\perp \leq p^\perp pbpp^\perp = 0,$$

de donde  $p^\perp ap^\perp = 0$ , es decir  $(\sqrt{a}(1-p))^* \sqrt{a}(1-p) = 0$ .

## Ejemplo

Sean  $p = p^*p \in A$ , y  $p^\perp := 1 - p$ . Se tiene  $A \cong \begin{pmatrix} pAp & pAp^\perp \\ p^\perp Ap & p^\perp Ap^\perp \end{pmatrix}$ . El conjunto  $pAp$  es una  $C^*$ -subálgebra de  $A$ . Además es hereditaria en  $A$ : si  $0 \leq a \leq pbp$ , entonces

$$0 \leq p^\perp ap^\perp \leq p^\perp pbpp^\perp = 0,$$

de donde  $p^\perp ap^\perp = 0$ , es decir  $(\sqrt{a}(1-p))^* \sqrt{a}(1-p) = 0$ . Luego es  $\sqrt{a}(1-p) = 0$

## Ejemplo

Sean  $p = p^*p \in A$ , y  $p^\perp := 1 - p$ . Se tiene  $A \cong \begin{pmatrix} pAp & pAp^\perp \\ p^\perp Ap & p^\perp Ap^\perp \end{pmatrix}$ . El conjunto  $pAp$  es una  $C^*$ -subálgebra de  $A$ . Además es hereditaria en  $A$ : si  $0 \leq a \leq pbp$ , entonces

$$0 \leq p^\perp ap^\perp \leq p^\perp pbpp^\perp = 0,$$

de donde  $p^\perp ap^\perp = 0$ , es decir  $(\sqrt{a}(1-p))^* \sqrt{a}(1-p) = 0$ . Luego es  $\sqrt{a}(1-p) = 0$  y entonces  $a(1-p) = 0$ , es decir,  $a = ap$ .

## Ejemplo

Sean  $p = p^*p \in A$ , y  $p^\perp := 1 - p$ . Se tiene  $A \cong \begin{pmatrix} pAp & pAp^\perp \\ p^\perp Ap & p^\perp Ap^\perp \end{pmatrix}$ . El conjunto  $pAp$  es una  $C^*$ -subálgebra de  $A$ . Además es hereditaria en  $A$ : si  $0 \leq a \leq pbp$ , entonces

$$0 \leq p^\perp ap^\perp \leq p^\perp pbpp^\perp = 0,$$

de donde  $p^\perp ap^\perp = 0$ , es decir  $(\sqrt{a}(1-p))^* \sqrt{a}(1-p) = 0$ . Luego es  $\sqrt{a}(1-p) = 0$  y entonces  $a(1-p) = 0$ , es decir,  $a = ap$ . Como  $a = a^*$ , se deduce que  $pa = a = ap$ ,

## Ejemplo

Sean  $p = p^*p \in A$ , y  $p^\perp := 1 - p$ . Se tiene  $A \cong \begin{pmatrix} pAp & pAp^\perp \\ p^\perp Ap & p^\perp Ap^\perp \end{pmatrix}$ . El conjunto  $pAp$  es una  $C^*$ -subálgebra de  $A$ . Además es hereditaria en  $A$ : si  $0 \leq a \leq pbp$ , entonces

$$0 \leq p^\perp ap^\perp \leq p^\perp pbpp^\perp = 0,$$

de donde  $p^\perp ap^\perp = 0$ , es decir  $(\sqrt{a}(1-p))^* \sqrt{a}(1-p) = 0$ . Luego es  $\sqrt{a}(1-p) = 0$  y entonces  $a(1-p) = 0$ , es decir,  $a = ap$ . Como  $a = a^*$ , se deduce que  $pa = a = ap$ , de modo que  $a = pap \in pAp$ .

## Ejemplo

Sean  $p = p^*p \in A$ , y  $p^\perp := 1 - p$ . Se tiene  $A \cong \begin{pmatrix} pAp & pAp^\perp \\ p^\perp Ap & p^\perp Ap^\perp \end{pmatrix}$ . El conjunto  $pAp$  es una  $C^*$ -subálgebra de  $A$ . Además es hereditaria en  $A$ : si  $0 \leq a \leq pbp$ , entonces

$$0 \leq p^\perp ap^\perp \leq p^\perp pbpp^\perp = 0,$$

de donde  $p^\perp ap^\perp = 0$ , es decir  $(\sqrt{a}(1-p))^* \sqrt{a}(1-p) = 0$ . Luego es  $\sqrt{a}(1-p) = 0$  y entonces  $a(1-p) = 0$ , es decir,  $a = ap$ . Como  $a = a^*$ , se deduce que  $pa = a = ap$ , de modo que  $a = pap \in pAp$ .

Si en el ejemplo anterior definimos  $L := Ap$ ,

## Ejemplo

Sean  $p = p^*p \in A$ , y  $p^\perp := 1 - p$ . Se tiene  $A \cong \begin{pmatrix} pAp & pAp^\perp \\ p^\perp Ap & p^\perp Ap^\perp \end{pmatrix}$ . El conjunto  $pAp$  es una  $C^*$ -subálgebra de  $A$ . Además es hereditaria en  $A$ : si  $0 \leq a \leq pbp$ , entonces

$$0 \leq p^\perp ap^\perp \leq p^\perp pbpp^\perp = 0,$$

de donde  $p^\perp ap^\perp = 0$ , es decir  $(\sqrt{a}(1-p))^* \sqrt{a}(1-p) = 0$ . Luego es  $\sqrt{a}(1-p) = 0$  y entonces  $a(1-p) = 0$ , es decir,  $a = ap$ . Como  $a = a^*$ , se deduce que  $pa = a = ap$ , de modo que  $a = pap \in pAp$ .

Si en el ejemplo anterior definimos  $L := Ap$ , entonces  $L$  es un ideal izquierdo cerrado de  $A$ ,



## Ejemplo

Sean  $p = p^*p \in A$ , y  $p^\perp := 1 - p$ . Se tiene  $A \cong \begin{pmatrix} pAp & pAp^\perp \\ p^\perp Ap & p^\perp Ap^\perp \end{pmatrix}$ . El conjunto  $pAp$  es una  $C^*$ -subálgebra de  $A$ . Además es hereditaria en  $A$ : si  $0 \leq a \leq pbp$ , entonces

$$0 \leq p^\perp ap^\perp \leq p^\perp pbpp^\perp = 0,$$

de donde  $p^\perp ap^\perp = 0$ , es decir  $(\sqrt{a}(1-p))^* \sqrt{a}(1-p) = 0$ . Luego es  $\sqrt{a}(1-p) = 0$  y entonces  $a(1-p) = 0$ , es decir,  $a = ap$ . Como  $a = a^*$ , se deduce que  $pa = a = ap$ , de modo que  $a = pap \in pAp$ .

Si en el ejemplo anterior definimos  $L := Ap$ , entonces  $L$  es un ideal izquierdo cerrado de  $A$ , y  $pAp = L \cap L^*$ .

## Ejemplo

Sean  $p = p^*p \in A$ , y  $p^\perp := 1 - p$ . Se tiene  $A \cong \begin{pmatrix} pAp & pAp^\perp \\ p^\perp Ap & p^\perp Ap^\perp \end{pmatrix}$ . El conjunto  $pAp$  es una  $C^*$ -subálgebra de  $A$ . Además es hereditaria en  $A$ : si  $0 \leq a \leq pbp$ , entonces

$$0 \leq p^\perp ap^\perp \leq p^\perp pbpp^\perp = 0,$$

de donde  $p^\perp ap^\perp = 0$ , es decir  $(\sqrt{a}(1-p))^* \sqrt{a}(1-p) = 0$ . Luego es  $\sqrt{a}(1-p) = 0$  y entonces  $a(1-p) = 0$ , es decir,  $a = ap$ . Como  $a = a^*$ , se deduce que  $pa = a = ap$ , de modo que  $a = pap \in pAp$ .

Si en el ejemplo anterior definimos  $L := Ap$ , entonces  $L$  es un ideal izquierdo cerrado de  $A$ , y  $pAp = L \cap L^*$ . Más en general se tiene:

# Proposición

## Proposición

- ① Si  $L \subseteq A$  es un ideal izquierdo cerrado, entonces  $L \cap L^*$  es una subálgebra hereditaria de  $A$ .

## Proposición

- 1 Si  $L \subseteq A$  es un ideal izquierdo cerrado, entonces  $L \cap L^*$  es una subálgebra hereditaria de  $A$ .
- 2 Si  $B$  es una subálgebra hereditaria de  $A$ , entonces  $L(B) := \{a \in A : a^*a \in B\}$  es un ideal izquierdo cerrado de  $A$ .

## Proposición

- ① Si  $L \subseteq A$  es un ideal izquierdo cerrado, entonces  $L \cap L^*$  es una subálgebra hereditaria de  $A$ .
- ② Si  $B$  es una subálgebra hereditaria de  $A$ , entonces  $L(B) := \{a \in A : a^*a \in B\}$  es un ideal izquierdo cerrado de  $A$ .

## Proposición

- ① Si  $L \subseteq A$  es un ideal izquierdo cerrado, entonces  $L \cap L^*$  es una subálgebra hereditaria de  $A$ .
- ② Si  $B$  es una subálgebra hereditaria de  $A$ , entonces  $L(B) := \{a \in A : a^*a \in B\}$  es un ideal izquierdo cerrado de  $A$ .

Además las correspondencias anteriores son inversas entre sí, es decir:

## Proposición

- 1 Si  $L \subseteq A$  es un ideal izquierdo cerrado, entonces  $L \cap L^*$  es una subálgebra hereditaria de  $A$ .
- 2 Si  $B$  es una subálgebra hereditaria de  $A$ , entonces  $L(B) := \{a \in A : a^*a \in B\}$  es un ideal izquierdo cerrado de  $A$ .

Además las correspondencias anteriores son inversas entre sí, es decir:

$$L(B) \cap L(B)^* = B \quad \text{y} \quad L(L \cap L^*) = L.$$



## Proposición

- 1 Si  $L \subseteq A$  es un ideal izquierdo cerrado, entonces  $L \cap L^*$  es una subálgebra hereditaria de  $A$ .
- 2 Si  $B$  es una subálgebra hereditaria de  $A$ , entonces  $L(B) := \{a \in A : a^*a \in B\}$  es un ideal izquierdo cerrado de  $A$ .

Además las correspondencias anteriores son inversas entre sí, es decir:

$$L(B) \cap L(B)^* = B \quad \text{y} \quad L(L \cap L^*) = L.$$

### Demostración.

## Proposición

- ① Si  $L \subseteq A$  es un ideal izquierdo cerrado, entonces  $L \cap L^*$  es una subálgebra hereditaria de  $A$ .
- ② Si  $B$  es una subálgebra hereditaria de  $A$ , entonces  $L(B) := \{a \in A : a^*a \in B\}$  es un ideal izquierdo cerrado de  $A$ .

Además las correspondencias anteriores son inversas entre sí, es decir:

$$L(B) \cap L(B)^* = B \quad \text{y} \quad L(L \cap L^*) = L.$$

## Demostración.

## Proposición

- 1 Si  $L \subseteq A$  es un ideal izquierdo cerrado, entonces  $L \cap L^*$  es una subálgebra hereditaria de  $A$ .
- 2 Si  $B$  es una subálgebra hereditaria de  $A$ , entonces  $L(B) := \{a \in A : a^*a \in B\}$  es un ideal izquierdo cerrado de  $A$ .

Además las correspondencias anteriores son inversas entre sí, es decir:

$$L(B) \cap L(B)^* = B \quad \text{y} \quad L(L \cap L^*) = L.$$

### Demostración.

- 1 Supongamos que  $0 \leq a \leq b$ ,  $a \in A$ ,  $b \in L \cap L^*$ ,

## Proposición

- 1 Si  $L \subseteq A$  es un ideal izquierdo cerrado, entonces  $L \cap L^*$  es una subálgebra hereditaria de  $A$ .
- 2 Si  $B$  es una subálgebra hereditaria de  $A$ , entonces  $L(B) := \{a \in A : a^*a \in B\}$  es un ideal izquierdo cerrado de  $A$ .

Además las correspondencias anteriores son inversas entre sí, es decir:

$$L(B) \cap L(B)^* = B \quad \text{y} \quad L(L \cap L^*) = L.$$

### Demostración.

- 1 Supongamos que  $0 \leq a \leq b$ ,  $a \in A$ ,  $b \in L \cap L^*$ ,

## Proposición

- 1 Si  $L \subseteq A$  es un ideal izquierdo cerrado, entonces  $L \cap L^*$  es una subálgebra hereditaria de  $A$ .
- 2 Si  $B$  es una subálgebra hereditaria de  $A$ , entonces  $L(B) := \{a \in A : a^*a \in B\}$  es un ideal izquierdo cerrado de  $A$ .

Además las correspondencias anteriores son inversas entre sí, es decir:

$$L(B) \cap L(B)^* = B \quad \text{y} \quad L(L \cap L^*) = L.$$

### Demostración.

- 1 Supongamos que  $0 \leq a \leq b$ ,  $a \in A$ ,  $b \in L \cap L^*$ , y sea  $(u_\lambda) \subseteq L \cap \Lambda$  tal que  $xu_\lambda \rightarrow x \ \forall x \in L$ .

## Proposición

- 1 Si  $L \subseteq A$  es un ideal izquierdo cerrado, entonces  $L \cap L^*$  es una subálgebra hereditaria de  $A$ .
- 2 Si  $B$  es una subálgebra hereditaria de  $A$ , entonces  $L(B) := \{a \in A : a^*a \in B\}$  es un ideal izquierdo cerrado de  $A$ .

Además las correspondencias anteriores son inversas entre sí, es decir:

$$L(B) \cap L(B)^* = B \quad \text{y} \quad L(L \cap L^*) = L.$$

### Demostración.

- 1 Supongamos que  $0 \leq a \leq b$ ,  $a \in A$ ,  $b \in L \cap L^*$ , y sea  $(u_\lambda) \subseteq L \cap \Lambda$  tal que  $xu_\lambda \rightarrow x \ \forall x \in L$ . Entonces:

## Proposición

- 1 Si  $L \subseteq A$  es un ideal izquierdo cerrado, entonces  $L \cap L^*$  es una subálgebra hereditaria de  $A$ .
- 2 Si  $B$  es una subálgebra hereditaria de  $A$ , entonces  $L(B) := \{a \in A : a^*a \in B\}$  es un ideal izquierdo cerrado de  $A$ .

Además las correspondencias anteriores son inversas entre sí, es decir:

$$L(B) \cap L(B)^* = B \quad \text{y} \quad L(L \cap L^*) = L.$$

### Demostración.

- 1 Supongamos que  $0 \leq a \leq b$ ,  $a \in A$ ,  $b \in L \cap L^*$ , y sea  $(u_\lambda) \subseteq L \cap \Lambda$  tal que  $xu_\lambda \rightarrow x \ \forall x \in L$ . Entonces:

$$0 \leq (1 - u_\lambda)a(1 - u_\lambda) \leq (1 - u_\lambda)b(1 - u_\lambda),$$

## Proposición

- 1 Si  $L \subseteq A$  es un ideal izquierdo cerrado, entonces  $L \cap L^*$  es una subálgebra hereditaria de  $A$ .
- 2 Si  $B$  es una subálgebra hereditaria de  $A$ , entonces  $L(B) := \{a \in A : a^*a \in B\}$  es un ideal izquierdo cerrado de  $A$ .

Además las correspondencias anteriores son inversas entre sí, es decir:

$$L(B) \cap L(B)^* = B \quad \text{y} \quad L(L \cap L^*) = L.$$

### Demostración.

- 1 Supongamos que  $0 \leq a \leq b$ ,  $a \in A$ ,  $b \in L \cap L^*$ , y sea  $(u_\lambda) \subseteq L \cap \Lambda$  tal que  $xu_\lambda \rightarrow x \ \forall x \in L$ . Entonces:

$$0 \leq (1 - u_\lambda)a(1 - u_\lambda) \leq (1 - u_\lambda)b(1 - u_\lambda),$$

$$\|(1 - u_\lambda)a(1 - u_\lambda)\| \leq \|(1 - u_\lambda)b(1 - u_\lambda)\|,$$



## Proposición

- 1 Si  $L \subseteq A$  es un ideal izquierdo cerrado, entonces  $L \cap L^*$  es una subálgebra hereditaria de  $A$ .
- 2 Si  $B$  es una subálgebra hereditaria de  $A$ , entonces  $L(B) := \{a \in A : a^*a \in B\}$  es un ideal izquierdo cerrado de  $A$ .

Además las correspondencias anteriores son inversas entre sí, es decir:

$$L(B) \cap L(B)^* = B \quad \text{y} \quad L(L \cap L^*) = L.$$

### Demostración.

- 1 Supongamos que  $0 \leq a \leq b$ ,  $a \in A$ ,  $b \in L \cap L^*$ , y sea  $(u_\lambda) \subseteq L \cap \Lambda$  tal que  $xu_\lambda \rightarrow x \ \forall x \in L$ . Entonces:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (1 - u_\lambda)a(1 - u_\lambda) \leq (1 - u_\lambda)b(1 - u_\lambda), \\ \|(1 - u_\lambda)a(1 - u_\lambda)\| &\leq \|(1 - u_\lambda)b(1 - u_\lambda)\|, \\ \|\sqrt{a}(1 - u_\lambda)\|^2 &\leq \|\sqrt{b}(1 - u_\lambda)\|^2 \xrightarrow{\lambda} 0, \end{aligned}$$

## Proposición

- 1 Si  $L \subseteq A$  es un ideal izquierdo cerrado, entonces  $L \cap L^*$  es una subálgebra hereditaria de  $A$ .
- 2 Si  $B$  es una subálgebra hereditaria de  $A$ , entonces  $L(B) := \{a \in A : a^*a \in B\}$  es un ideal izquierdo cerrado de  $A$ .

Además las correspondencias anteriores son inversas entre sí, es decir:

$$L(B) \cap L(B)^* = B \quad \text{y} \quad L(L \cap L^*) = L.$$

### Demostración.

- 1 Supongamos que  $0 \leq a \leq b$ ,  $a \in A$ ,  $b \in L \cap L^*$ , y sea  $(u_\lambda) \subseteq L \cap L^*$  tal que  $xu_\lambda \rightarrow x \ \forall x \in L$ . Entonces:

$$0 \leq (1 - u_\lambda)a(1 - u_\lambda) \leq (1 - u_\lambda)b(1 - u_\lambda),$$

$$\|(1 - u_\lambda)a(1 - u_\lambda)\| \leq \|(1 - u_\lambda)b(1 - u_\lambda)\|,$$

$$\|\sqrt{a}(1 - u_\lambda)\|^2 \leq \|\sqrt{b}(1 - u_\lambda)\|^2 \xrightarrow{\lambda} 0,$$

de donde  $\sqrt{a} = \lim_\lambda \sqrt{a}u_\lambda$ ,

## Proposición

- 1 Si  $L \subseteq A$  es un ideal izquierdo cerrado, entonces  $L \cap L^*$  es una subálgebra hereditaria de  $A$ .
- 2 Si  $B$  es una subálgebra hereditaria de  $A$ , entonces  $L(B) := \{a \in A : a^*a \in B\}$  es un ideal izquierdo cerrado de  $A$ .

Además las correspondencias anteriores son inversas entre sí, es decir:

$$L(B) \cap L(B)^* = B \quad \text{y} \quad L(L \cap L^*) = L.$$

### Demostración.

- 1 Supongamos que  $0 \leq a \leq b$ ,  $a \in A$ ,  $b \in L \cap L^*$ , y sea  $(u_\lambda) \subseteq L \cap L^*$  tal que  $xu_\lambda \rightarrow x \ \forall x \in L$ . Entonces:

$$0 \leq (1 - u_\lambda)a(1 - u_\lambda) \leq (1 - u_\lambda)b(1 - u_\lambda),$$

$$\|(1 - u_\lambda)a(1 - u_\lambda)\| \leq \|(1 - u_\lambda)b(1 - u_\lambda)\|,$$

$$\|\sqrt{a}(1 - u_\lambda)\|^2 \leq \|\sqrt{b}(1 - u_\lambda)\|^2 \xrightarrow{\lambda} 0,$$

de donde  $\sqrt{a} = \lim_\lambda \sqrt{a}u_\lambda$ , y por lo tanto  $\sqrt{a} = \lim_\lambda u_\lambda$   $a \in L$ .

## Proposición

- 1 Si  $L \subseteq A$  es un ideal izquierdo cerrado, entonces  $L \cap L^*$  es una subálgebra hereditaria de  $A$ .
- 2 Si  $B$  es una subálgebra hereditaria de  $A$ , entonces  $L(B) := \{a \in A : a^*a \in B\}$  es un ideal izquierdo cerrado de  $A$ .

Además las correspondencias anteriores son inversas entre sí, es decir:

$$L(B) \cap L(B)^* = B \quad \text{y} \quad L(L \cap L^*) = L.$$

## Demostración.

- 1 Supongamos que  $0 \leq a \leq b$ ,  $a \in A$ ,  $b \in L \cap L^*$ , y sea  $(u_\lambda) \subseteq L \cap L^*$  tal que  $xu_\lambda \rightarrow x \ \forall x \in L$ . Entonces:

$$0 \leq (1 - u_\lambda)a(1 - u_\lambda) \leq (1 - u_\lambda)b(1 - u_\lambda),$$

$$\|(1 - u_\lambda)a(1 - u_\lambda)\| \leq \|(1 - u_\lambda)b(1 - u_\lambda)\|,$$

$$\|\sqrt{a}(1 - u_\lambda)\|^2 \leq \|\sqrt{b}(1 - u_\lambda)\|^2 \xrightarrow{\lambda} 0,$$

de donde  $\sqrt{a} = \lim_\lambda \sqrt{a}u_\lambda$ , y por lo tanto  $\sqrt{a} = \lim_\lambda u_\lambda$   $a \in L$ . Como  $a = a^*$ , entonces  $a \in L \cap L^*$ .

- 2  $L(B)$  es cerrado: es preimagen de un cerrado por una función continua.

- 2  $L(B)$  es cerrado: es preimagen de un cerrado por una función continua.

- 2  $L(B)$  es cerrado: es preimagen de un cerrado por una función continua. Es un ideal a izquierda: si  $a \in A$ ,  $b, c \in L(B)$ :

$$(b+c)^*(b+c) \leq (b+c)^*(b+c) + (b-c)^*(b-c)$$

- 2  $L(B)$  es cerrado: es preimagen de un cerrado por una función continua. Es un ideal a izquierda: si  $a \in A$ ,  $b, c \in L(B)$ :

$$(b+c)^*(b+c) \leq (b+c)^*(b+c) + (b-c)^*(b-c) = 2(b^*b + c^*c) \in B,$$



- 2  $L(B)$  es cerrado: es preimagen de un cerrado por una función continua. Es un ideal a izquierda: si  $a \in A$ ,  $b, c \in L(B)$ :

$$(b+c)^*(b+c) \leq (b+c)^*(b+c) + (b-c)^*(b-c) = 2(b^*b + c^*c) \in B,$$

$$(ab)^*(ab) = b^*a^*ab$$

- 2  $L(B)$  es cerrado: es preimagen de un cerrado por una función continua. Es un ideal a izquierda: si  $a \in A$ ,  $b, c \in L(B)$ :

$$(b+c)^*(b+c) \leq (b+c)^*(b+c) + (b-c)^*(b-c) = 2(b^*b + c^*c) \in B,$$

$$(ab)^*(ab) = b^*a^*ab \leq b^*\|a^*a\|b$$

- 2  $L(B)$  es cerrado: es preimagen de un cerrado por una función continua. Es un ideal a izquierda: si  $a \in A$ ,  $b, c \in L(B)$ :

$$(b+c)^*(b+c) \leq (b+c)^*(b+c) + (b-c)^*(b-c) = 2(b^*b + c^*c) \in B,$$

$$(ab)^*(ab) = b^*a^*ab \leq b^*\|a^*a\|b = \|a\|^2 b^*b \in B,$$

- 2  $L(B)$  es cerrado: es preimagen de un cerrado por una función continua. Es un ideal a izquierda: si  $a \in A$ ,  $b, c \in L(B)$ :

$$(b+c)^*(b+c) \leq (b+c)^*(b+c) + (b-c)^*(b-c) = 2(b^*b + c^*c) \in B,$$

$$(ab)^*(ab) = b^*a^*ab \leq b^*\|a^*a\|b = \|a\|^2 b^*b \in B,$$

de donde  $(b+c)^*(b+c)$  y  $(ab)^*(ab) \in B$  porque  $B$  es hereditaria.

- 2  $L(B)$  es cerrado: es preimagen de un cerrado por una función continua. Es un ideal a izquierda: si  $a \in A$ ,  $b, c \in L(B)$ :

$$(b+c)^*(b+c) \leq (b+c)^*(b+c) + (b-c)^*(b-c) = 2(b^*b + c^*c) \in B,$$

$$(ab)^*(ab) = b^*a^*ab \leq b^*\|a^*a\|b = \|a\|^2 b^*b \in B,$$

de donde  $(b+c)^*(b+c)$  y  $(ab)^*(ab) \in B$  porque  $B$  es hereditaria.

Es claro que  $B \subseteq L(B)$ , así que  $B \subseteq L(B) \cap L(B)^*$ .

- 2  $L(B)$  es cerrado: es preimagen de un cerrado por una función continua. Es un ideal a izquierda: si  $a \in A$ ,  $b, c \in L(B)$ :

$$(b+c)^*(b+c) \leq (b+c)^*(b+c) + (b-c)^*(b-c) = 2(b^*b + c^*c) \in B,$$

$$(ab)^*(ab) = b^*a^*ab \leq b^*\|a^*a\|b = \|a\|^2 b^*b \in B,$$

de donde  $(b+c)^*(b+c)$  y  $(ab)^*(ab) \in B$  porque  $B$  es hereditaria.

Es claro que  $B \subseteq L(B)$ , así que  $B \subseteq L(B) \cap L(B)^*$ . Recíprocamente, sea  $a \in L(B) \cap L(B)^*$  positivo.

- 2  $L(B)$  es cerrado: es preimagen de un cerrado por una función continua. Es un ideal a izquierda: si  $a \in A$ ,  $b, c \in L(B)$ :

$$(b+c)^*(b+c) \leq (b+c)^*(b+c) + (b-c)^*(b-c) = 2(b^*b + c^*c) \in B,$$

$$(ab)^*(ab) = b^*a^*ab \leq b^*\|a^*a\|b = \|a\|^2 b^*b \in B,$$

de donde  $(b+c)^*(b+c)$  y  $(ab)^*(ab) \in B$  porque  $B$  es hereditaria.

Es claro que  $B \subseteq L(B)$ , así que  $B \subseteq L(B) \cap L(B)^*$ . Recíprocamente, sea  $a \in L(B) \cap L(B)^*$  positivo. Entonces  $a^{1/2} \in L(B)$ , y por lo tanto  $a = (a^{1/2})^* a^{1/2} \in B$ .

- 2  $L(B)$  es cerrado: es preimagen de un cerrado por una función continua. Es un ideal a izquierda: si  $a \in A$ ,  $b, c \in L(B)$ :

$$(b+c)^*(b+c) \leq (b+c)^*(b+c) + (b-c)^*(b-c) = 2(b^*b + c^*c) \in B,$$

$$(ab)^*(ab) = b^*a^*ab \leq b^*\|a^*a\|b = \|a\|^2 b^*b \in B,$$

de donde  $(b+c)^*(b+c)$  y  $(ab)^*(ab) \in B$  porque  $B$  es hereditaria.

Es claro que  $B \subseteq L(B)$ , así que  $B \subseteq L(B) \cap L(B)^*$ . Recíprocamente, sea  $a \in L(B) \cap L(B)^*$  positivo. Entonces  $a^{1/2} \in L(B)$ , y por lo tanto  $a = (a^{1/2})^* a^{1/2} \in B$ . Entonces  $B = L(B) \cap L(B)^*$  porque toda  $C^*$ -álgebra está linealmente generada por sus elementos positivos.



- 2  $L(B)$  es cerrado: es preimagen de un cerrado por una función continua. Es un ideal a izquierda: si  $a \in A$ ,  $b, c \in L(B)$ :

$$(b+c)^*(b+c) \leq (b+c)^*(b+c) + (b-c)^*(b-c) = 2(b^*b + c^*c) \in B,$$

$$(ab)^*(ab) = b^*a^*ab \leq b^*\|a^*a\|b = \|a\|^2 b^*b \in B,$$

de donde  $(b+c)^*(b+c)$  y  $(ab)^*(ab) \in B$  porque  $B$  es hereditaria.

Es claro que  $B \subseteq L(B)$ , así que  $B \subseteq L(B) \cap L(B)^*$ . Recíprocamente, sea  $a \in L(B) \cap L(B)^*$  positivo. Entonces  $a^{1/2} \in L(B)$ , y por lo tanto  $a = (a^{1/2})^* a^{1/2} \in B$ . Entonces  $B = L(B) \cap L(B)^*$  porque toda  $C^*$ -álgebra está linealmente generada por sus elementos positivos.

Ahora sean  $L$  un ideal izquierdo cerrado y  $B = L \cap L^*$ .

- 2  $L(B)$  es cerrado: es preimagen de un cerrado por una función continua. Es un ideal a izquierda: si  $a \in A$ ,  $b, c \in L(B)$ :

$$(b+c)^*(b+c) \leq (b+c)^*(b+c) + (b-c)^*(b-c) = 2(b^*b + c^*c) \in B,$$

$$(ab)^*(ab) = b^*a^*ab \leq b^*\|a^*a\|b = \|a\|^2 b^*b \in B,$$

de donde  $(b+c)^*(b+c)$  y  $(ab)^*(ab) \in B$  porque  $B$  es hereditaria.

Es claro que  $B \subseteq L(B)$ , así que  $B \subseteq L(B) \cap L(B)^*$ . Recíprocamente, sea  $a \in L(B) \cap L(B)^*$  positivo. Entonces  $a^{1/2} \in L(B)$ , y por lo tanto  $a = (a^{1/2})^* a^{1/2} \in B$ . Entonces  $B = L(B) \cap L(B)^*$  porque toda  $C^*$ -álgebra está linealmente generada por sus elementos positivos.

Ahora sean  $L$  un ideal izquierdo cerrado y  $B = L \cap L^*$ . Si  $x \in L(B)$ , entonces  $x^*x \in B$ .

- 2  $L(B)$  es cerrado: es preimagen de un cerrado por una función continua. Es un ideal a izquierda: si  $a \in A$ ,  $b, c \in L(B)$ :

$$(b+c)^*(b+c) \leq (b+c)^*(b+c) + (b-c)^*(b-c) = 2(b^*b + c^*c) \in B,$$

$$(ab)^*(ab) = b^*a^*ab \leq b^*\|a^*a\|b = \|a\|^2 b^*b \in B,$$

de donde  $(b+c)^*(b+c)$  y  $(ab)^*(ab) \in B$  porque  $B$  es hereditaria.

Es claro que  $B \subseteq L(B)$ , así que  $B \subseteq L(B) \cap L(B)^*$ . Recíprocamente, sea  $a \in L(B) \cap L(B)^*$  positivo. Entonces  $a^{1/2} \in L(B)$ , y por lo tanto  $a = (a^{1/2})^* a^{1/2} \in B$ . Entonces  $B = L(B) \cap L(B)^*$  porque toda  $C^*$ -álgebra está linealmente generada por sus elementos positivos.

Ahora sean  $L$  un ideal izquierdo cerrado y  $B = L \cap L^*$ . Si  $x \in L(B)$ , entonces  $x^*x \in B$ . Tomando una unidad aproximada  $(u_\lambda)$  para  $B$ ,

- 2  $L(B)$  es cerrado: es preimagen de un cerrado por una función continua. Es un ideal a izquierda: si  $a \in A$ ,  $b, c \in L(B)$ :

$$(b+c)^*(b+c) \leq (b+c)^*(b+c) + (b-c)^*(b-c) = 2(b^*b + c^*c) \in B,$$

$$(ab)^*(ab) = b^*a^*ab \leq b^*\|a^*a\|b = \|a\|^2 b^*b \in B,$$

de donde  $(b+c)^*(b+c)$  y  $(ab)^*(ab) \in B$  porque  $B$  es hereditaria.

Es claro que  $B \subseteq L(B)$ , así que  $B \subseteq L(B) \cap L(B)^*$ . Recíprocamente, sea  $a \in L(B) \cap L(B)^*$  positivo. Entonces  $a^{1/2} \in L(B)$ , y por lo tanto  $a = (a^{1/2})^* a^{1/2} \in B$ . Entonces  $B = L(B) \cap L(B)^*$  porque toda  $C^*$ -álgebra está linealmente generada por sus elementos positivos.

Ahora sean  $L$  un ideal izquierdo cerrado y  $B = L \cap L^*$ . Si  $x \in L(B)$ , entonces  $x^*x \in B$ . Tomando una unidad aproximada  $(u_\lambda)$  para  $B$ , y observando que  $xu_\lambda \in L \forall \lambda$ ,

- 2  $L(B)$  es cerrado: es preimagen de un cerrado por una función continua. Es un ideal a izquierda: si  $a \in A$ ,  $b, c \in L(B)$ :

$$(b+c)^*(b+c) \leq (b+c)^*(b+c) + (b-c)^*(b-c) = 2(b^*b + c^*c) \in B,$$

$$(ab)^*(ab) = b^*a^*ab \leq b^*\|a^*a\|b = \|a\|^2 b^*b \in B,$$

de donde  $(b+c)^*(b+c)$  y  $(ab)^*(ab) \in B$  porque  $B$  es hereditaria.

Es claro que  $B \subseteq L(B)$ , así que  $B \subseteq L(B) \cap L(B)^*$ . Recíprocamente, sea  $a \in L(B) \cap L(B)^*$  positivo. Entonces  $a^{1/2} \in L(B)$ , y por lo tanto  $a = (a^{1/2})^* a^{1/2} \in B$ . Entonces  $B = L(B) \cap L(B)^*$  porque toda  $C^*$ -álgebra está linealmente generada por sus elementos positivos.

Ahora sean  $L$  un ideal izquierdo cerrado y  $B = L \cap L^*$ . Si  $x \in L(B)$ , entonces  $x^*x \in B$ . Tomando una unidad aproximada  $(u_\lambda)$  para  $B$ , y observando que  $xu_\lambda \in L \forall \lambda$ , se concluye que  $x \in L$ , porque  $L$  es cerrado, y:

- 2  $L(B)$  es cerrado: es preimagen de un cerrado por una función continua. Es un ideal a izquierda: si  $a \in A$ ,  $b, c \in L(B)$ :

$$(b+c)^*(b+c) \leq (b+c)^*(b+c) + (b-c)^*(b-c) = 2(b^*b + c^*c) \in B,$$

$$(ab)^*(ab) = b^*a^*ab \leq b^*\|a^*a\|b = \|a\|^2 b^*b \in B,$$

de donde  $(b+c)^*(b+c)$  y  $(ab)^*(ab) \in B$  porque  $B$  es hereditaria.

Es claro que  $B \subseteq L(B)$ , así que  $B \subseteq L(B) \cap L(B)^*$ . Recíprocamente, sea  $a \in L(B) \cap L(B)^*$  positivo. Entonces  $a^{1/2} \in L(B)$ , y por lo tanto  $a = (a^{1/2})^* a^{1/2} \in B$ . Entonces  $B = L(B) \cap L(B)^*$  porque toda  $C^*$ -álgebra está linealmente generada por sus elementos positivos.

Ahora sean  $L$  un ideal izquierdo cerrado y  $B = L \cap L^*$ . Si  $x \in L(B)$ , entonces  $x^*x \in B$ . Tomando una unidad aproximada  $(u_\lambda)$  para  $B$ , y observando que  $xu_\lambda \in L \ \forall \lambda$ , se concluye que  $x \in L$ , porque  $L$  es cerrado, y:

$$\|x - xu_\lambda\|^2 = \|(1 - u_\lambda)x^*x(1 - u_\lambda)\|$$

- 2  $L(B)$  es cerrado: es preimagen de un cerrado por una función continua. Es un ideal a izquierda: si  $a \in A$ ,  $b, c \in L(B)$ :

$$(b+c)^*(b+c) \leq (b+c)^*(b+c) + (b-c)^*(b-c) = 2(b^*b + c^*c) \in B,$$

$$(ab)^*(ab) = b^*a^*ab \leq b^*\|a^*a\|b = \|a\|^2 b^*b \in B,$$

de donde  $(b+c)^*(b+c)$  y  $(ab)^*(ab) \in B$  porque  $B$  es hereditaria.

Es claro que  $B \subseteq L(B)$ , así que  $B \subseteq L(B) \cap L(B)^*$ . Recíprocamente, sea  $a \in L(B) \cap L(B)^*$  positivo. Entonces  $a^{1/2} \in L(B)$ , y por lo tanto  $a = (a^{1/2})^* a^{1/2} \in B$ . Entonces  $B = L(B) \cap L(B)^*$  porque toda  $C^*$ -álgebra está linealmente generada por sus elementos positivos.

Ahora sean  $L$  un ideal izquierdo cerrado y  $B = L \cap L^*$ . Si  $x \in L(B)$ , entonces  $x^*x \in B$ . Tomando una unidad aproximada  $(u_\lambda)$  para  $B$ , y observando que  $xu_\lambda \in L \ \forall \lambda$ , se concluye que  $x \in L$ , porque  $L$  es cerrado, y:

$$\|x - xu_\lambda\|^2 = \|(1 - u_\lambda)x^*x(1 - u_\lambda)\| \leq \|x^*x(1 - u_\lambda)\| \xrightarrow{\lambda} 0.$$

- 2  $L(B)$  es cerrado: es preimagen de un cerrado por una función continua. Es un ideal a izquierda: si  $a \in A$ ,  $b, c \in L(B)$ :

$$(b+c)^*(b+c) \leq (b+c)^*(b+c) + (b-c)^*(b-c) = 2(b^*b + c^*c) \in B,$$

$$(ab)^*(ab) = b^*a^*ab \leq b^*\|a^*a\|b = \|a\|^2 b^*b \in B,$$

de donde  $(b+c)^*(b+c)$  y  $(ab)^*(ab) \in B$  porque  $B$  es hereditaria.

Es claro que  $B \subseteq L(B)$ , así que  $B \subseteq L(B) \cap L(B)^*$ . Recíprocamente, sea  $a \in L(B) \cap L(B)^*$  positivo. Entonces  $a^{1/2} \in L(B)$ , y por lo tanto  $a = (a^{1/2})^*a^{1/2} \in B$ . Entonces  $B = L(B) \cap L(B)^*$  porque toda  $C^*$ -álgebra está linealmente generada por sus elementos positivos.

Ahora sean  $L$  un ideal izquierdo cerrado y  $B = L \cap L^*$ . Si  $x \in L(B)$ , entonces  $x^*x \in B$ . Tomando una unidad aproximada  $(u_\lambda)$  para  $B$ , y observando que  $xu_\lambda \in L \ \forall \lambda$ , se concluye que  $x \in L$ , porque  $L$  es cerrado, y:

$$\|x - xu_\lambda\|^2 = \|(1 - u_\lambda)x^*x(1 - u_\lambda)\| \leq \|x^*x(1 - u_\lambda)\| \xrightarrow{\lambda} 0.$$

Y finalmente, si  $x \in L$ ,



- 2  $L(B)$  es cerrado: es preimagen de un cerrado por una función continua. Es un ideal a izquierda: si  $a \in A$ ,  $b, c \in L(B)$ :

$$(b+c)^*(b+c) \leq (b+c)^*(b+c) + (b-c)^*(b-c) = 2(b^*b + c^*c) \in B,$$

$$(ab)^*(ab) = b^*a^*ab \leq b^*\|a^*a\|b = \|a\|^2 b^*b \in B,$$

de donde  $(b+c)^*(b+c)$  y  $(ab)^*(ab) \in B$  porque  $B$  es hereditaria.

Es claro que  $B \subseteq L(B)$ , así que  $B \subseteq L(B) \cap L(B)^*$ . Recíprocamente, sea  $a \in L(B) \cap L(B)^*$  positivo. Entonces  $a^{1/2} \in L(B)$ , y por lo tanto  $a = (a^{1/2})^* a^{1/2} \in B$ . Entonces  $B = L(B) \cap L(B)^*$  porque toda  $C^*$ -álgebra está linealmente generada por sus elementos positivos.

Ahora sean  $L$  un ideal izquierdo cerrado y  $B = L \cap L^*$ . Si  $x \in L(B)$ , entonces  $x^*x \in B$ . Tomando una unidad aproximada  $(u_\lambda)$  para  $B$ , y observando que  $xu_\lambda \in L \forall \lambda$ , se concluye que  $x \in L$ , porque  $L$  es cerrado, y:

$$\|x - xu_\lambda\|^2 = \|(1 - u_\lambda)x^*x(1 - u_\lambda)\| \leq \|x^*x(1 - u_\lambda)\| \xrightarrow{\lambda} 0.$$

Y finalmente, si  $x \in L$ , entonces  $x^*x \in L \cap L^* = B$ ,

- 2  $L(B)$  es cerrado: es preimagen de un cerrado por una función continua. Es un ideal a izquierda: si  $a \in A$ ,  $b, c \in L(B)$ :

$$(b+c)^*(b+c) \leq (b+c)^*(b+c) + (b-c)^*(b-c) = 2(b^*b + c^*c) \in B,$$

$$(ab)^*(ab) = b^*a^*ab \leq b^*\|a^*a\|b = \|a\|^2 b^*b \in B,$$

de donde  $(b+c)^*(b+c)$  y  $(ab)^*(ab) \in B$  porque  $B$  es hereditaria.

Es claro que  $B \subseteq L(B)$ , así que  $B \subseteq L(B) \cap L(B)^*$ . Recíprocamente, sea  $a \in L(B) \cap L(B)^*$  positivo. Entonces  $a^{1/2} \in L(B)$ , y por lo tanto  $a = (a^{1/2})^* a^{1/2} \in B$ . Entonces  $B = L(B) \cap L(B)^*$  porque toda  $C^*$ -álgebra está linealmente generada por sus elementos positivos.

Ahora sean  $L$  un ideal izquierdo cerrado y  $B = L \cap L^*$ . Si  $x \in L(B)$ , entonces  $x^*x \in B$ . Tomando una unidad aproximada  $(u_\lambda)$  para  $B$ , y observando que  $xu_\lambda \in L \forall \lambda$ , se concluye que  $x \in L$ , porque  $L$  es cerrado, y:

$$\|x - xu_\lambda\|^2 = \|(1 - u_\lambda)x^*x(1 - u_\lambda)\| \leq \|x^*x(1 - u_\lambda)\| \xrightarrow{\lambda} 0.$$

Y finalmente, si  $x \in L$ , entonces  $x^*x \in L \cap L^* = B$ , o sea que  $x \in L(B)$ .

## Teorema

*Sea  $B$  una  $C^*$ -subálgebra. Entonces  $B$  es hereditaria en  $A$  si y sólo si  $BAB \subseteq B$ .*

## Teorema

Sea  $B$  una  $C^*$ -subálgebra. Entonces  $B$  es hereditaria en  $A$  si y sólo si  $BAB \subseteq B$ .

## Demostración.

Si  $B = L \cap L^*$ ,  $L$  ideal izquierdo cerrado (y entonces  $L^*$  ideal derecho).

## Teorema

Sea  $B$  una  $C^*$ -subálgebra. Entonces  $B$  es hereditaria en  $A$  si y sólo si  $BAB \subseteq B$ .

## Demostración.

Si  $B = L \cap L^*$ ,  $L$  ideal izquierdo cerrado (y entonces  $L^*$  ideal derecho).

## Teorema

Sea  $B$  una  $C^*$ -subálgebra. Entonces  $B$  es hereditaria en  $A$  si y sólo si  $BAB \subseteq B$ .

## Demostración.

Si  $B = L \cap L^*$ ,  $L$  ideal izquierdo cerrado (y entonces  $L^*$  ideal derecho). Se tiene  $BAB \subseteq B$ , porque si  $b_1, b_2 \in B$ ,  $a \in A$ ,

## Teorema

Sea  $B$  una  $C^*$ -subálgebra. Entonces  $B$  es hereditaria en  $A$  si y sólo si  $BAB \subseteq B$ .

## Demostración.

Si  $B = L \cap L^*$ ,  $L$  ideal izquierdo cerrado (y entonces  $L^*$  ideal derecho). Se tiene  $BAB \subseteq B$ , porque si  $b_1, b_2 \in B$ ,  $a \in A$ , entonces

## Teorema

Sea  $B$  una  $C^*$ -subálgebra. Entonces  $B$  es hereditaria en  $A$  si y sólo si  $BAB \subseteq B$ .

## Demostración.

Si  $B = L \cap L^*$ ,  $L$  ideal izquierdo cerrado (y entonces  $L^*$  ideal derecho). Se tiene  $BAB \subseteq B$ , porque si  $b_1, b_2 \in B$ ,  $a \in A$ , entonces

$$b_1ab_2 = (b_1a)b_2 = b_1(ab_2) \in L \cap L^* = B.$$



## Teorema

Sea  $B$  una  $C^*$ -subálgebra. Entonces  $B$  es hereditaria en  $A$  si y sólo si  $BAB \subseteq B$ .

## Demostración.

Si  $B = L \cap L^*$ ,  $L$  ideal izquierdo cerrado (y entonces  $L^*$  ideal derecho). Se tiene  $BAB \subseteq B$ , porque si  $b_1, b_2 \in B$ ,  $a \in A$ , entonces

$$b_1 a b_2 = (b_1 a) b_2 = b_1 (a b_2) \in L \cap L^* = B.$$

Recíprocamente, supongamos que  $BAB \subseteq B$ , y sea  $0 \leq a \leq b$ , con  $b \in B$ .

## Teorema

Sea  $B$  una  $C^*$ -subálgebra. Entonces  $B$  es hereditaria en  $A$  si y sólo si  $BAB \subseteq B$ .

## Demostración.

Si  $B = L \cap L^*$ ,  $L$  ideal izquierdo cerrado (y entonces  $L^*$  ideal derecho). Se tiene  $BAB \subseteq B$ , porque si  $b_1, b_2 \in B$ ,  $a \in A$ , entonces

$$b_1 a b_2 = (b_1 a) b_2 = b_1 (a b_2) \in L \cap L^* = B.$$

Recíprocamente, supongamos que  $BAB \subseteq B$ , y sea  $0 \leq a \leq b$ , con  $b \in B$ . Si  $(u_\lambda)$  es una unidad aproximada para  $B$ , entonces:

## Teorema

Sea  $B$  una  $C^*$ -subálgebra. Entonces  $B$  es hereditaria en  $A$  si y sólo si  $BAB \subseteq B$ .

## Demostración.

Si  $B = L \cap L^*$ ,  $L$  ideal izquierdo cerrado (y entonces  $L^*$  ideal derecho). Se tiene  $BAB \subseteq B$ , porque si  $b_1, b_2 \in B$ ,  $a \in A$ , entonces

$$b_1 a b_2 = (b_1 a) b_2 = b_1 (a b_2) \in L \cap L^* = B.$$

Recíprocamente, supongamos que  $BAB \subseteq B$ , y sea  $0 \leq a \leq b$ , con  $b \in B$ . Si  $(u_\lambda)$  es una unidad aproximada para  $B$ , entonces:

$$0 \leq (1 - u_\lambda) a (1 - u_\lambda) \leq (1 - u_\lambda) b (1 - u_\lambda),$$

## Teorema

Sea  $B$  una  $C^*$ -subálgebra. Entonces  $B$  es hereditaria en  $A$  si y sólo si  $BAB \subseteq B$ .

## Demostración.

Si  $B = L \cap L^*$ ,  $L$  ideal izquierdo cerrado (y entonces  $L^*$  ideal derecho). Se tiene  $BAB \subseteq B$ , porque si  $b_1, b_2 \in B$ ,  $a \in A$ , entonces

$$b_1 a b_2 = (b_1 a) b_2 = b_1 (a b_2) \in L \cap L^* = B.$$

Recíprocamente, supongamos que  $BAB \subseteq B$ , y sea  $0 \leq a \leq b$ , con  $b \in B$ . Si  $(u_\lambda)$  es una unidad aproximada para  $B$ , entonces:

$$0 \leq (1 - u_\lambda) a (1 - u_\lambda) \leq (1 - u_\lambda) b (1 - u_\lambda),$$

$$\|(1 - u_\lambda) a (1 - u_\lambda)\| \leq \|(1 - u_\lambda) b (1 - u_\lambda)\|,$$

## Teorema

Sea  $B$  una  $C^*$ -subálgebra. Entonces  $B$  es hereditaria en  $A$  si y sólo si  $BAB \subseteq B$ .

## Demostración.

Si  $B = L \cap L^*$ ,  $L$  ideal izquierdo cerrado (y entonces  $L^*$  ideal derecho). Se tiene  $BAB \subseteq B$ , porque si  $b_1, b_2 \in B$ ,  $a \in A$ , entonces

$$b_1 a b_2 = (b_1 a) b_2 = b_1 (a b_2) \in L \cap L^* = B.$$

Recíprocamente, supongamos que  $BAB \subseteq B$ , y sea  $0 \leq a \leq b$ , con  $b \in B$ . Si  $(u_\lambda)$  es una unidad aproximada para  $B$ , entonces:

$$0 \leq (1 - u_\lambda) a (1 - u_\lambda) \leq (1 - u_\lambda) b (1 - u_\lambda),$$

$$\|(1 - u_\lambda) a (1 - u_\lambda)\| \leq \|(1 - u_\lambda) b (1 - u_\lambda)\|,$$

$$\|\sqrt{a}(1 - u_\lambda)\|^2 \leq \|\sqrt{b}(1 - u_\lambda)\|^2 \xrightarrow{\lambda} 0,$$

## Teorema

Sea  $B$  una  $C^*$ -subálgebra. Entonces  $B$  es hereditaria en  $A$  si y sólo si  $BAB \subseteq B$ .

## Demostración.

Si  $B = L \cap L^*$ ,  $L$  ideal izquierdo cerrado (y entonces  $L^*$  ideal derecho). Se tiene  $BAB \subseteq B$ , porque si  $b_1, b_2 \in B$ ,  $a \in A$ , entonces

$$b_1ab_2 = (b_1a)b_2 = b_1(ab_2) \in L \cap L^* = B.$$

Recíprocamente, supongamos que  $BAB \subseteq B$ , y sea  $0 \leq a \leq b$ , con  $b \in B$ . Si  $(u_\lambda)$  es una unidad aproximada para  $B$ , entonces:

$$0 \leq (1 - u_\lambda)a(1 - u_\lambda) \leq (1 - u_\lambda)b(1 - u_\lambda),$$

$$\|(1 - u_\lambda)a(1 - u_\lambda)\| \leq \|(1 - u_\lambda)b(1 - u_\lambda)\|,$$

$$\|\sqrt{a}(1 - u_\lambda)\|^2 \leq \|\sqrt{b}(1 - u_\lambda)\|^2 \xrightarrow{\lambda} 0,$$

de donde  $\sqrt{a} = \lim_\lambda \sqrt{a}u_\lambda$ ,

## Teorema

Sea  $B$  una  $C^*$ -subálgebra. Entonces  $B$  es hereditaria en  $A$  si y sólo si  $BAB \subseteq B$ .

## Demostración.

Si  $B = L \cap L^*$ ,  $L$  ideal izquierdo cerrado (y entonces  $L^*$  ideal derecho). Se tiene  $BAB \subseteq B$ , porque si  $b_1, b_2 \in B$ ,  $a \in A$ , entonces

$$b_1 a b_2 = (b_1 a) b_2 = b_1 (a b_2) \in L \cap L^* = B.$$

Recíprocamente, supongamos que  $BAB \subseteq B$ , y sea  $0 \leq a \leq b$ , con  $b \in B$ . Si  $(u_\lambda)$  es una unidad aproximada para  $B$ , entonces:

$$0 \leq (1 - u_\lambda) a (1 - u_\lambda) \leq (1 - u_\lambda) b (1 - u_\lambda),$$

$$\|(1 - u_\lambda) a (1 - u_\lambda)\| \leq \|(1 - u_\lambda) b (1 - u_\lambda)\|,$$

$$\|\sqrt{a}(1 - u_\lambda)\|^2 \leq \|\sqrt{b}(1 - u_\lambda)\|^2 \xrightarrow{\lambda} 0,$$

de donde  $\sqrt{a} = \lim_\lambda \sqrt{a} u_\lambda$ , y por lo tanto  $\sqrt{a} = \lim_\lambda u_\lambda \sqrt{a}$ .

## Teorema

Sea  $B$  una  $C^*$ -subálgebra. Entonces  $B$  es hereditaria en  $A$  si y sólo si  $BAB \subseteq B$ .

## Demostración.

Si  $B = L \cap L^*$ ,  $L$  ideal izquierdo cerrado (y entonces  $L^*$  ideal derecho). Se tiene  $BAB \subseteq B$ , porque si  $b_1, b_2 \in B$ ,  $a \in A$ , entonces

$$b_1 a b_2 = (b_1 a) b_2 = b_1 (a b_2) \in L \cap L^* = B.$$

Recíprocamente, supongamos que  $BAB \subseteq B$ , y sea  $0 \leq a \leq b$ , con  $b \in B$ . Si  $(u_\lambda)$  es una unidad aproximada para  $B$ , entonces:

$$0 \leq (1 - u_\lambda) a (1 - u_\lambda) \leq (1 - u_\lambda) b (1 - u_\lambda),$$

$$\|(1 - u_\lambda) a (1 - u_\lambda)\| \leq \|(1 - u_\lambda) b (1 - u_\lambda)\|,$$

$$\|\sqrt{a}(1 - u_\lambda)\|^2 \leq \|\sqrt{b}(1 - u_\lambda)\|^2 \xrightarrow{\lambda} 0,$$

de donde  $\sqrt{a} = \lim_\lambda \sqrt{a} u_\lambda$ , y por lo tanto  $\sqrt{a} = \lim_\lambda u_\lambda \sqrt{a}$ . Luego  $a = \lim_\lambda u_\lambda a u_\lambda \in BAB \subseteq B$ ,



## Teorema

Sea  $B$  una  $C^*$ -subálgebra. Entonces  $B$  es hereditaria en  $A$  si y sólo si  $BAB \subseteq B$ .

## Demostración.

Si  $B = L \cap L^*$ ,  $L$  ideal izquierdo cerrado (y entonces  $L^*$  ideal derecho). Se tiene  $BAB \subseteq B$ , porque si  $b_1, b_2 \in B$ ,  $a \in A$ , entonces

$$b_1 a b_2 = (b_1 a) b_2 = b_1 (a b_2) \in L \cap L^* = B.$$

Recíprocamente, supongamos que  $BAB \subseteq B$ , y sea  $0 \leq a \leq b$ , con  $b \in B$ . Si  $(u_\lambda)$  es una unidad aproximada para  $B$ , entonces:

$$0 \leq (1 - u_\lambda) a (1 - u_\lambda) \leq (1 - u_\lambda) b (1 - u_\lambda),$$

$$\|(1 - u_\lambda) a (1 - u_\lambda)\| \leq \|(1 - u_\lambda) b (1 - u_\lambda)\|,$$

$$\|\sqrt{a}(1 - u_\lambda)\|^2 \leq \|\sqrt{b}(1 - u_\lambda)\|^2 \xrightarrow{\lambda} 0,$$

de donde  $\sqrt{a} = \lim_\lambda \sqrt{a} u_\lambda$ , y por lo tanto  $\sqrt{a} = \lim_\lambda u_\lambda \sqrt{a}$ . Luego  $a = \lim_\lambda u_\lambda a u_\lambda \in BAB \subseteq B$ , lo que muestra que  $B$  es hereditaria. □

## Corolario

*Todo ideal bilateral cerrado es una  $C^*$ -subálgebra hereditaria.*

## Corolario

*Todo ideal bilateral cerrado es una  $C^*$ -subálgebra hereditaria.*

## Corolario

*En una  $C^*$ -álgebra conmutativa coinciden las nociones de ideal bilateral,*

## Corolario

*Todo ideal bilateral cerrado es una  $C^*$ -subálgebra hereditaria.*

## Corolario

*En una  $C^*$ -álgebra conmutativa coinciden las nociones de ideal bilateral,*

## Corolario

*Todo ideal bilateral cerrado es una  $C^*$ -subálgebra hereditaria.*

## Corolario

*En una  $C^*$ -álgebra conmutativa coinciden las nociones de ideal bilateral, ideal a izquierda,*

## Corolario

*Todo ideal bilateral cerrado es una  $C^*$ -subálgebra hereditaria.*

## Corolario

*En una  $C^*$ -álgebra conmutativa coinciden las nociones de ideal bilateral, ideal a izquierda, ideal a derecha,*

## Corolario

*Todo ideal bilateral cerrado es una  $C^*$ -subálgebra hereditaria.*

## Corolario

*En una  $C^*$ -álgebra conmutativa coinciden las nociones de ideal bilateral, ideal a izquierda, ideal a derecha, y de subálgebra hereditaria.*

## Corolario

*Todo ideal bilateral cerrado es una  $C^*$ -subálgebra hereditaria.*

## Corolario

*En una  $C^*$ -álgebra conmutativa coinciden las nociones de ideal bilateral, ideal a izquierda, ideal a derecha, y de subálgebra hereditaria.*

## Corolario

*Si  $b \in A_+$ , entonces la menor subálgebra hereditaria de  $A$  que contiene a  $b$  es  $\text{Her}(b) := \overline{bAb}$ ,*



## Corolario

*Todo ideal bilateral cerrado es una  $C^*$ -subálgebra hereditaria.*

## Corolario

*En una  $C^*$ -álgebra conmutativa coinciden las nociones de ideal bilateral, ideal a izquierda, ideal a derecha, y de subálgebra hereditaria.*

## Corolario

*Si  $b \in A_+$ , entonces la menor subálgebra hereditaria de  $A$  que contiene a  $b$  es  $\text{Her}(b) := \overline{bAb}$ ,*

## Corolario

*Todo ideal bilateral cerrado es una  $C^*$ -subálgebra hereditaria.*

## Corolario

*En una  $C^*$ -álgebra conmutativa coinciden las nociones de ideal bilateral, ideal a izquierda, ideal a derecha, y de subálgebra hereditaria.*

## Corolario

*Si  $b \in A_+$ , entonces la menor subálgebra hereditaria de  $A$  que contiene a  $b$  es  $\text{Her}(b) := \overline{bAb}$ , que corresponde al ideal izquierdo  $\overline{Ab}$  generado por  $b$*

## Corolario

*Todo ideal bilateral cerrado es una  $C^*$ -subálgebra hereditaria.*

## Corolario

*En una  $C^*$ -álgebra conmutativa coinciden las nociones de ideal bilateral, ideal a izquierda, ideal a derecha, y de subálgebra hereditaria.*

## Corolario

*Si  $b \in A_+$ , entonces la menor subálgebra hereditaria de  $A$  que contiene a  $b$  es  $\text{Her}(b) := \overline{bAb}$ , que corresponde al ideal izquierdo  $\overline{Ab}$  generado por  $b$  (y por lo tanto  $\text{Her}(b) = \overline{Ab} \cap \overline{Ab}^* = \overline{Ab} \cap \overline{bA}$ ).*

## Corolario

*Todo ideal bilateral cerrado es una  $C^*$ -subálgebra hereditaria.*

## Corolario

*En una  $C^*$ -álgebra conmutativa coinciden las nociones de ideal bilateral, ideal a izquierda, ideal a derecha, y de subálgebra hereditaria.*

## Corolario

*Si  $b \in A_+$ , entonces la menor subálgebra hereditaria de  $A$  que contiene a  $b$  es  $\text{Her}(b) := \overline{bAb}$ , que corresponde al ideal izquierdo  $\overline{Ab}$  generado por  $b$  (y por lo tanto  $\text{Her}(b) = \overline{Ab} \cap \overline{Ab}^* = \overline{Ab} \cap \overline{bA}$ ).*

## Definición

*Se dice que una  $C^*$ -álgebra es  $\sigma$ -unital si posee una unidad aproximada numerable. Por ejemplo, toda  $C^*$ -álgebra separable es  $\sigma$ -unital.*

## Corolario

*Todo ideal bilateral cerrado es una  $C^*$ -subálgebra hereditaria.*

## Corolario

*En una  $C^*$ -álgebra conmutativa coinciden las nociones de ideal bilateral, ideal a izquierda, ideal a derecha, y de subálgebra hereditaria.*

## Corolario

*Si  $b \in A_+$ , entonces la menor subálgebra hereditaria de  $A$  que contiene a  $b$  es  $\text{Her}(b) := \overline{bAb}$ , que corresponde al ideal izquierdo  $\overline{Ab}$  generado por  $b$  (y por lo tanto  $\text{Her}(b) = \overline{Ab} \cap \overline{Ab}^* = \overline{Ab} \cap \overline{bA}$ ).*

## Definición

*Se dice que una  $C^*$ -álgebra es  $\sigma$ -unital si posee una unidad aproximada numerable. Por ejemplo, toda  $C^*$ -álgebra separable es  $\sigma$ -unital.*

## Teorema

*Si  $B$  es una  $C^*$ -subálgebra  $\sigma$ -unital de  $A$ , entonces  $B$  es hereditaria sii existe un elemento positivo  $b \in A$  tal que  $B = \text{Her}(b)$ .*

## Demostración.

Si  $(u_n)$  es una unidad aproximada numerable de la subálgebra hereditaria  $B$ ,

## Demostración.

Si  $(u_n)$  es una unidad aproximada numerable de la subálgebra hereditaria  $B$ ,

## Demostración.

Si  $(u_n)$  es una unidad aproximada numerable de la subálgebra hereditaria  $B$ , definamos  $b := \sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{2^n} \in B$ .



## Demostración.

Si  $(u_n)$  es una unidad aproximada numerable de la subálgebra hereditaria  $B$ , definamos  $b := \sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{2^n} \in B$ . Luego  $\text{Her}(b) \subseteq B$ .

## Demostración.

Si  $(u_n)$  es una unidad aproximada numerable de la subálgebra hereditaria  $B$ , definamos  $b := \sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{2^n} \in B$ . Luego  $\text{Her}(b) \subseteq B$ . Como  $0 \leq u_n \leq 2^n b \in \text{Her}(b)$ , se tiene que  $u_n \in \text{Her}(b) \forall n$ . Luego si  $b' \in B$ :

## Demostración.

Si  $(u_n)$  es una unidad aproximada numerable de la subálgebra hereditaria  $B$ , definamos  $b := \sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{2^n} \in B$ . Luego  $\text{Her}(b) \subseteq B$ . Como  $0 \leq u_n \leq 2^n b \in \text{Her}(b)$ , se tiene que  $u_n \in \text{Her}(b) \forall n$ . Luego si  $b' \in B$ :  $b' = \lim_n u_n b' u_n \in \text{Her}(b)$ . El recíproco es parte del Corolario previo.  $\square$

Si  $\xi, \eta$  son vectores de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ ,

## Demostración.

Si  $(u_n)$  es una unidad aproximada numerable de la subálgebra hereditaria  $B$ , definamos  $b := \sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{2^n} \in B$ . Luego  $\text{Her}(b) \subseteq B$ . Como  $0 \leq u_n \leq 2^n b \in \text{Her}(b)$ , se tiene que  $u_n \in \text{Her}(b) \forall n$ . Luego si  $b' \in B$ :  $b' = \lim_n u_n b' u_n \in \text{Her}(b)$ . El recíproco es parte del Corolario previo.  $\square$

Si  $\xi, \eta$  son vectores de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , sea  $\theta_{\xi, \eta} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  dado por  $\theta_{\xi, \eta}(\zeta) := \langle \zeta, \eta \rangle \xi$ .

## Demostración.

Si  $(u_n)$  es una unidad aproximada numerable de la subálgebra hereditaria  $B$ , definamos  $b := \sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{2^n} \in B$ . Luego  $\text{Her}(b) \subseteq B$ . Como  $0 \leq u_n \leq 2^n b \in \text{Her}(b)$ , se tiene que  $u_n \in \text{Her}(b) \forall n$ . Luego si  $b' \in B$ :  $b' = \lim_n u_n b' u_n \in \text{Her}(b)$ . El recíproco es parte del Corolario previo.  $\square$

Si  $\xi, \eta$  son vectores de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , sea  $\theta_{\xi, \eta} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  dado por  $\theta_{\xi, \eta}(\zeta) := \langle \zeta, \eta \rangle \xi$ . Entonces  $\theta_{\xi, \eta}$  es un operador de rango 1 (si  $\xi \neq 0 \neq \eta$ ), y genera linealmente a la  $*$ -álgebra de operadores de rango finito, que es densa en  $K$ .

## Demostración.

Si  $(u_n)$  es una unidad aproximada numerable de la subálgebra hereditaria  $B$ , definamos  $b := \sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{2^n} \in B$ . Luego  $\text{Her}(b) \subseteq B$ . Como  $0 \leq u_n \leq 2^n b \in \text{Her}(b)$ , se tiene que  $u_n \in \text{Her}(b) \forall n$ . Luego si  $b' \in B$ :  $b' = \lim_n u_n b' u_n \in \text{Her}(b)$ . El recíproco es parte del Corolario previo.  $\square$

Si  $\xi, \eta$  son vectores de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , sea  $\theta_{\xi, \eta} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  dado por  $\theta_{\xi, \eta}(\zeta) := \langle \zeta, \eta \rangle \xi$ . Entonces  $\theta_{\xi, \eta}$  es un operador de rango 1 (si  $\xi \neq 0 \neq \eta$ ), y genera linealmente a la  $*$ -álgebra de operadores de rango finito, que es densa en  $K$ . Si  $D$  es denso en  $\mathcal{H}$ , entonces la colección de sumas finitas de operadores  $\theta_{\xi, \xi'}$  (con  $\xi, \xi' \in D$ ) es un subconjunto denso en  $K$ .

## Demostración.

Si  $(u_n)$  es una unidad aproximada numerable de la subálgebra hereditaria  $B$ , definamos  $b := \sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{2^n} \in B$ . Luego  $\text{Her}(b) \subseteq B$ . Como  $0 \leq u_n \leq 2^n b \in \text{Her}(b)$ , se tiene que  $u_n \in \text{Her}(b) \forall n$ . Luego si  $b' \in B$ :  $b' = \lim_n u_n b' u_n \in \text{Her}(b)$ . El recíproco es parte del Corolario previo.  $\square$

Si  $\xi, \eta$  son vectores de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , sea  $\theta_{\xi, \eta} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  dado por  $\theta_{\xi, \eta}(\zeta) := \langle \zeta, \eta \rangle \xi$ . Entonces  $\theta_{\xi, \eta}$  es un operador de rango 1 (si  $\xi \neq 0 \neq \eta$ ), y genera linealmente a la  $*$ -álgebra de operadores de rango finito, que es densa en  $K$ . Si  $D$  es denso en  $\mathcal{H}$ , entonces la colección de sumas finitas de operadores  $\theta_{\xi, \xi'}$  (con  $\xi, \xi' \in D$ ) es un subconjunto denso en  $K$ .

## Ejemplo

Si  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert, entonces  $K = \text{Her}(a)$  para algún  $a \in K$  sii  $\mathcal{H}$  es separable.

## Demostración.

Si  $(u_n)$  es una unidad aproximada numerable de la subálgebra hereditaria  $B$ , definamos  $b := \sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{2^n} \in B$ . Luego  $\text{Her}(b) \subseteq B$ . Como  $0 \leq u_n \leq 2^n b \in \text{Her}(b)$ , se tiene que  $u_n \in \text{Her}(b) \forall n$ . Luego si  $b' \in B$ :  $b' = \lim_n u_n b' u_n \in \text{Her}(b)$ . El recíproco es parte del Corolario previo.  $\square$

Si  $\xi, \eta$  son vectores de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , sea  $\theta_{\xi, \eta} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  dado por  $\theta_{\xi, \eta}(\zeta) := \langle \zeta, \eta \rangle \xi$ . Entonces  $\theta_{\xi, \eta}$  es un operador de rango 1 (si  $\xi \neq 0 \neq \eta$ ), y genera linealmente a la  $*$ -álgebra de operadores de rango finito, que es densa en  $K$ . Si  $D$  es denso en  $\mathcal{H}$ , entonces la colección de sumas finitas de operadores  $\theta_{\xi, \xi'}$  (con  $\xi, \xi' \in D$ ) es un subconjunto denso en  $K$ .

## Ejemplo

Si  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert, entonces  $K = \text{Her}(a)$  para algún  $a \in K$  sii  $\mathcal{H}$  es separable.



## Demostración.

Si  $(u_n)$  es una unidad aproximada numerable de la subálgebra hereditaria  $B$ , definamos  $b := \sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{2^n} \in B$ . Luego  $\text{Her}(b) \subseteq B$ . Como  $0 \leq u_n \leq 2^n b \in \text{Her}(b)$ , se tiene que  $u_n \in \text{Her}(b) \forall n$ . Luego si  $b' \in B$ :  $b' = \lim_n u_n b' u_n \in \text{Her}(b)$ . El recíproco es parte del Corolario previo.  $\square$

Si  $\xi, \eta$  son vectores de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , sea  $\theta_{\xi, \eta} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  dado por  $\theta_{\xi, \eta}(\zeta) := \langle \zeta, \eta \rangle \xi$ . Entonces  $\theta_{\xi, \eta}$  es un operador de rango 1 (si  $\xi \neq 0 \neq \eta$ ), y genera linealmente a la  $*$ -álgebra de operadores de rango finito, que es densa en  $K$ . Si  $D$  es denso en  $\mathcal{H}$ , entonces la colección de sumas finitas de operadores  $\theta_{\xi, \xi'}$  (con  $\xi, \xi' \in D$ ) es un subconjunto denso en  $K$ .

## Ejemplo

*Si  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert, entonces  $K = \text{Her}(a)$  para algún  $a \in K$  sii  $\mathcal{H}$  es separable. Si  $\mathcal{H}$  es separable, entonces  $K$  es  $\sigma$ -unital, pues es separable también.*

## Demostración.

Si  $(u_n)$  es una unidad aproximada numerable de la subálgebra hereditaria  $B$ , definamos  $b := \sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{2^n} \in B$ . Luego  $\text{Her}(b) \subseteq B$ . Como  $0 \leq u_n \leq 2^n b \in \text{Her}(b)$ , se tiene que  $u_n \in \text{Her}(b) \forall n$ . Luego si  $b' \in B$ :  $b' = \lim_n u_n b' u_n \in \text{Her}(b)$ . El recíproco es parte del Corolario previo.  $\square$

Si  $\xi, \eta$  son vectores de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , sea  $\theta_{\xi, \eta} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  dado por  $\theta_{\xi, \eta}(\zeta) := \langle \zeta, \eta \rangle \xi$ . Entonces  $\theta_{\xi, \eta}$  es un operador de rango 1 (si  $\xi \neq 0 \neq \eta$ ), y genera linealmente a la  $*$ -álgebra de operadores de rango finito, que es densa en  $K$ . Si  $D$  es denso en  $\mathcal{H}$ , entonces la colección de sumas finitas de operadores  $\theta_{\xi, \xi'}$  (con  $\xi, \xi' \in D$ ) es un subconjunto denso en  $K$ .

## Ejemplo

*Si  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert, entonces  $K = \text{Her}(a)$  para algún  $a \in K$  sii  $\mathcal{H}$  es separable. Si  $\mathcal{H}$  es separable, entonces  $K$  es  $\sigma$ -unital, pues es separable también. Si  $\mathcal{H}$  no es separable y  $a \in K$ , entonces  $\overline{a\mathcal{H}}$  es separable,*

## Demostración.

Si  $(u_n)$  es una unidad aproximada numerable de la subálgebra hereditaria  $B$ , definamos  $b := \sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{2^n} \in B$ . Luego  $\text{Her}(b) \subseteq B$ . Como  $0 \leq u_n \leq 2^n b \in \text{Her}(b)$ , se tiene que  $u_n \in \text{Her}(b) \forall n$ . Luego si  $b' \in B$ :  $b' = \lim_n u_n b' u_n \in \text{Her}(b)$ . El recíproco es parte del Corolario previo.  $\square$

Si  $\xi, \eta$  son vectores de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , sea  $\theta_{\xi, \eta} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  dado por  $\theta_{\xi, \eta}(\zeta) := \langle \zeta, \eta \rangle \xi$ . Entonces  $\theta_{\xi, \eta}$  es un operador de rango 1 (si  $\xi \neq 0 \neq \eta$ ), y genera linealmente a la  $*$ -álgebra de operadores de rango finito, que es densa en  $K$ . Si  $D$  es denso en  $\mathcal{H}$ , entonces la colección de sumas finitas de operadores  $\theta_{\xi, \xi'}$  (con  $\xi, \xi' \in D$ ) es un subconjunto denso en  $K$ .

## Ejemplo

*Si  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert, entonces  $K = \text{Her}(a)$  para algún  $a \in K$  sii  $\mathcal{H}$  es separable. Si  $\mathcal{H}$  es separable, entonces  $K$  es  $\sigma$ -unital, pues es separable también. Si  $\mathcal{H}$  no es separable y  $a \in K$ , entonces  $\overline{a\mathcal{H}}$  es separable, y por lo tanto  $(a\mathcal{H})^\perp \neq 0$ .*

## Demostración.

Si  $(u_n)$  es una unidad aproximada numerable de la subálgebra hereditaria  $B$ , definamos  $b := \sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{2^n} \in B$ . Luego  $\text{Her}(b) \subseteq B$ . Como  $0 \leq u_n \leq 2^n b \in \text{Her}(b)$ , se tiene que  $u_n \in \text{Her}(b) \forall n$ . Luego si  $b' \in B$ :  $b' = \lim_n u_n b' u_n \in \text{Her}(b)$ . El recíproco es parte del Corolario previo.  $\square$

Si  $\xi, \eta$  son vectores de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , sea  $\theta_{\xi, \eta} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  dado por  $\theta_{\xi, \eta}(\zeta) := \langle \zeta, \eta \rangle \xi$ . Entonces  $\theta_{\xi, \eta}$  es un operador de rango 1 (si  $\xi \neq 0 \neq \eta$ ), y genera linealmente a la  $*$ -álgebra de operadores de rango finito, que es densa en  $K$ . Si  $D$  es denso en  $\mathcal{H}$ , entonces la colección de sumas finitas de operadores  $\theta_{\xi, \xi'}$  (con  $\xi, \xi' \in D$ ) es un subconjunto denso en  $K$ .

## Ejemplo

*Si  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert, entonces  $K = \text{Her}(a)$  para algún  $a \in K$  sii  $\mathcal{H}$  es separable. Si  $\mathcal{H}$  es separable, entonces  $K$  es  $\sigma$ -unital, pues es separable también. Si  $\mathcal{H}$  no es separable y  $a \in K$ , entonces  $\overline{a\mathcal{H}}$  es separable, y por lo tanto  $(a\mathcal{H})^\perp \neq 0$ . Luego se puede tomar  $\xi \perp a\mathcal{H}$ , con  $\|\xi\| = 1$ .*

## Demostración.

Si  $(u_n)$  es una unidad aproximada numerable de la subálgebra hereditaria  $B$ , definamos  $b := \sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{2^n} \in B$ . Luego  $\text{Her}(b) \subseteq B$ . Como  $0 \leq u_n \leq 2^n b \in \text{Her}(b)$ , se tiene que  $u_n \in \text{Her}(b) \forall n$ . Luego si  $b' \in B$ :  $b' = \lim_n u_n b' u_n \in \text{Her}(b)$ . El recíproco es parte del Corolario previo.  $\square$

Si  $\xi, \eta$  son vectores de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , sea  $\theta_{\xi, \eta} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  dado por  $\theta_{\xi, \eta}(\zeta) := \langle \zeta, \eta \rangle \xi$ . Entonces  $\theta_{\xi, \eta}$  es un operador de rango 1 (si  $\xi \neq 0 \neq \eta$ ), y genera linealmente a la  $*$ -álgebra de operadores de rango finito, que es densa en  $K$ . Si  $D$  es denso en  $\mathcal{H}$ , entonces la colección de sumas finitas de operadores  $\theta_{\xi, \xi'}$  (con  $\xi, \xi' \in D$ ) es un subconjunto denso en  $K$ .

## Ejemplo

*Si  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert, entonces  $K = \text{Her}(a)$  para algún  $a \in K$  sii  $\mathcal{H}$  es separable. Si  $\mathcal{H}$  es separable, entonces  $K$  es  $\sigma$ -unital, pues es separable también. Si  $\mathcal{H}$  no es separable y  $a \in K$ , entonces  $\overline{a\mathcal{H}}$  es separable, y por lo tanto  $(a\mathcal{H})^\perp \neq 0$ . Luego se puede tomar  $\xi \perp a\mathcal{H}$ , con  $\|\xi\| = 1$ . Entonces  $\theta_{\xi, \xi} \notin \overline{aB(\mathcal{H})a}$ ,*

## Demostración.

Si  $(u_n)$  es una unidad aproximada numerable de la subálgebra hereditaria  $B$ , definamos  $b := \sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{2^n} \in B$ . Luego  $\text{Her}(b) \subseteq B$ . Como  $0 \leq u_n \leq 2^n b \in \text{Her}(b)$ , se tiene que  $u_n \in \text{Her}(b) \forall n$ . Luego si  $b' \in B$ :  $b' = \lim_n u_n b' u_n \in \text{Her}(b)$ . El recíproco es parte del Corolario previo.  $\square$

Si  $\xi, \eta$  son vectores de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , sea  $\theta_{\xi, \eta} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  dado por  $\theta_{\xi, \eta}(\zeta) := \langle \zeta, \eta \rangle \xi$ . Entonces  $\theta_{\xi, \eta}$  es un operador de rango 1 (si  $\xi \neq 0 \neq \eta$ ), y genera linealmente a la  $*$ -álgebra de operadores de rango finito, que es densa en  $K$ . Si  $D$  es denso en  $\mathcal{H}$ , entonces la colección de sumas finitas de operadores  $\theta_{\xi, \xi'}$  (con  $\xi, \xi' \in D$ ) es un subconjunto denso en  $K$ .

## Ejemplo

*Si  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert, entonces  $K = \text{Her}(a)$  para algún  $a \in K$  sii  $\mathcal{H}$  es separable. Si  $\mathcal{H}$  es separable, entonces  $K$  es  $\sigma$ -unital, pues es separable también. Si  $\mathcal{H}$  no es separable y  $a \in K$ , entonces  $\overline{a\mathcal{H}}$  es separable, y por lo tanto  $(a\mathcal{H})^\perp \neq 0$ . Luego se puede tomar  $\xi \perp \overline{a\mathcal{H}}$ , con  $\|\xi\| = 1$ . Entonces  $\theta_{\xi, \xi} \notin \overline{aB(\mathcal{H})a}$ , pues  $\theta_{\xi, \xi}(\xi) = \xi \perp \overline{b\mathcal{H}}, \forall b \in \overline{aB(\mathcal{H})a}$ .*

## Teorema

*Sean  $B$  una  $C^*$ -subálgebra hereditaria de  $A$ , y  $J$  un ideal de  $B$ . Entonces existe un ideal  $I$  de  $A$  tal que  $J = B \cap I$ .*

## Teorema

*Sean  $B$  una  $C^*$ -subálgebra hereditaria de  $A$ , y  $J$  un ideal de  $B$ . Entonces existe un ideal  $I$  de  $A$  tal que  $J = B \cap I$ .*

## Demostración.

Sea  $I = AJA := \overline{\text{span}}\{axa' : a, a' \in A, x \in J\}$ .



## Teorema

Sean  $B$  una  $C^*$ -subálgebra hereditaria de  $A$ , y  $J$  un ideal de  $B$ . Entonces existe un ideal  $I$  de  $A$  tal que  $J = B \cap I$ .

## Demostración.

Sea  $I = AJA := \overline{\text{span}}\{axa' : a, a' \in A, x \in J\}$ .

## Teorema

Sean  $B$  una  $C^*$ -subálgebra hereditaria de  $A$ , y  $J$  un ideal de  $B$ . Entonces existe un ideal  $I$  de  $A$  tal que  $J = B \cap I$ .

## Demostración.

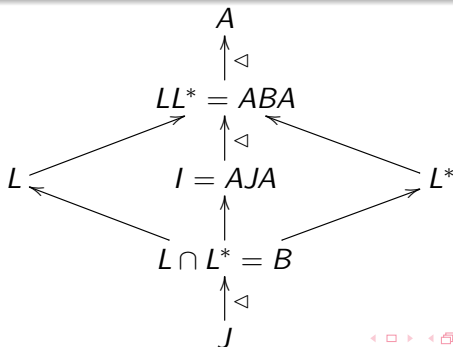
Sea  $I = AJA := \overline{\text{span}}\{axa' : a, a' \in A, x \in J\}$ . Luego  $I \triangleleft A$ , y  $J \subseteq B \cap I$ . Si  $B \cap I$  y  $(u_\lambda)$  es unidad aproximada de  $B \cap I$ , es  $x = \lim_\lambda u_\lambda x u_\lambda \in B \cap I$ .

## Teorema

Sean  $B$  una  $C^*$ -subálgebra hereditaria de  $A$ , y  $J$  un ideal de  $B$ . Entonces existe un ideal  $I$  de  $A$  tal que  $J = B \cap I$ .

## Demostración.

Sea  $I = AJA := \overline{\text{span}}\{axa' : a, a' \in A, x \in J\}$ . Luego  $I \triangleleft A$ , y  $J \subseteq B \cap I$ . Si  $B \cap I$  y  $(u_\lambda)$  es unidad aproximada de  $B \cap I$ , es  $x = \lim_\lambda u_\lambda x u_\lambda \in BIB$ . Por último:  $BIB = BAJAB = BA(BJB)AB = (BAB)J(BAB) \subseteq BJB = J$ , de modo que  $J = B \cap I = BIB$ . □



## Definición

*Se dice que una  $C^*$ -álgebra  $A$  es simple si sus únicos ideales son  $0$  y  $A$ .*

## Definición

*Se dice que una  $C^*$ -álgebra  $A$  es simple si sus únicos ideales son  $0$  y  $A$ .*

## Corolario

*Una  $C^*$ -subálgebra hereditaria de una  $C^*$ -álgebra simple también es simple.*

## Definición

*Se dice que una  $C^*$ -álgebra  $A$  es simple si sus únicos ideales son  $0$  y  $A$ .*

## Corolario

*Una  $C^*$ -subálgebra hereditaria de una  $C^*$ -álgebra simple también es simple.*

## Observación

*El corolario anterior no es cierto en general si la subálgebra no es hereditaria. Por ejemplo  $K$  es simple (ejercicio), pero si  $\xi \perp \eta \in \mathcal{H}$ , entonces  $A := \mathbb{C}\theta_{\xi,\xi} + \mathbb{C}\theta_{\eta,\eta}$  es una  $C^*$ -subálgebra de  $K$  que no es simple:  $0 \neq \mathbb{C}\theta_{\xi,\xi} \triangleleft A$ .*