1. Repaso
   - Unidades aproximadas

2. Ideales y cocientes
   - Ideales en C*-álgebras conmutativas.

3. Subálgebras hereditarias

Unidades aproximadas

Definición

Si A es una C^*-álgebra, se dice que una red $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una unidad aproximada para A si:

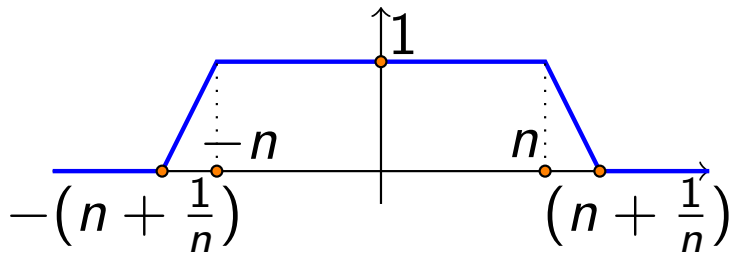
(a) $u_\lambda \in A_+$ *y* $\|u_\lambda\| \leq 1$, *para todo* $\lambda \in \Lambda$.

(b) *Si* $\lambda \leq \lambda'$, *entonces* $u_\lambda \leq u_{\lambda'}$.

(c) $\lim_\lambda u_\lambda a = a = \lim_\lambda a u_\lambda$, $\forall a \in A$.

Ejemplos

(1) En $C_0(\mathbb{R})$, consideremos (u_n) dada por:



Entonces $\|u_n\| = 1$, $u_n \geq 0$, y (u_n) es una unidad aproximada para la C^*-álgebra $C_0(\mathbb{R})$.

(2) Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y u_F es la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre F, donde $F \in \mathcal{F} := \{F \leq \mathcal{H} : \ dim\, F < \infty\}$ ($\mathcal{F}$ ordenado con el orden natural), entonces $(u_F)_{F\in\mathcal{F}}$ es una unidad aproximada para K.

(3) Sea $b \in A_+$, $b \neq 0$, y sea $C^*(b)$ la C^*-álgebra generada por b en A. Si $f : [0,\infty) \to [0,1)$ está dada por $f(t) = \frac{t}{1+t}$, definamos $b_n := f(nb)$. Entonces (b_n) es una unidad aproximada para $C^*(b)$.

Teorema

Toda C^*-álgebra A posee una unidad aproximada. Más precisamente, si $\Lambda = B(0,1) \cap A_+$, y B una $*$-subálgebra densa en A tal que

(1) $b(1+b)^{-1} \in B \ \forall b \in B \cap A_+$.

(2) $b(1-b)^{-1} \in B \ \forall b \cap B \cap \Lambda$.

Sea $(u_\lambda)_{\lambda\in B\cap\Lambda}$ tal que $u_\lambda = \lambda$ para todo $\lambda \in B \cap \Lambda$.
Entonces $(u_\lambda)_{\lambda\in B\cap\Lambda}$ es una unidad aproximada para A.

Proposición

Si A es una C^*-álgebra separable, existe $(u_n)_{n\geq 1}$ tal que (u_n) es una unidad aproximada para A.

Ideales y cocientes

Proposición

Si I es un $*$-ideal denso en A, entonces A tiene una unidad aproximada contenida en I.

Proposición

Si L es un ideal izquierdo en una C^*-álgebra A (no necesariamente cerrado), entonces L contiene una red $(u_\lambda) \subseteq L$, creciente y contenida en $\Lambda = A_+ \cap B(0,1)$, tal que $\lim_\lambda au_\lambda = a$ para todo $a \in L$.

Teorema (Segal, 1949)

Sea J un ideal bilateral cerrado en la C^*-álgebra A. Entonces $J = J^*$.

Lema

Sean L un ideal izquierdo cerrado en A, y (u_λ) una red como en la Proposición anterior. Entonces para todo $a \in A$ se tiene

$$d(a, L) = \text{ínf}\{\|a - x\| : \ x \in L\} = \lim_{\lambda} \|a - au_\lambda\|.$$

Demostración.

Es claro que $\alpha = \text{ínf}\{\|a - x\| : \ x \in L\} \leq \underline{\text{lím}}\|a - au_\lambda\|$, pues $au_\lambda \in L$, $\forall \lambda$. Dado $\varepsilon > 0$ sea $x \in L$ tal que $\|a - x\| < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$, y sea λ_0 tal que $\|x - xu_\lambda\| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Como $\|u_\lambda\| < 1$ y $u_\lambda \geq 0$, se tiene $\sigma(u_\lambda) \subseteq [0, 1]$ y $\sigma(1 - u_\lambda) \subseteq [0, 1]$. Luego $\|1 - u_\lambda\| \leq 1$. Entonces

$$\|a - au_\lambda\| = \|a - x + x - xu_\lambda + xu_\lambda - au_\lambda\|$$

$$\leq \|(a - x) - (a - x)u_\lambda\| + \|x - xu_\lambda\| \leq \|a - x\|\|1 - u_\lambda\| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

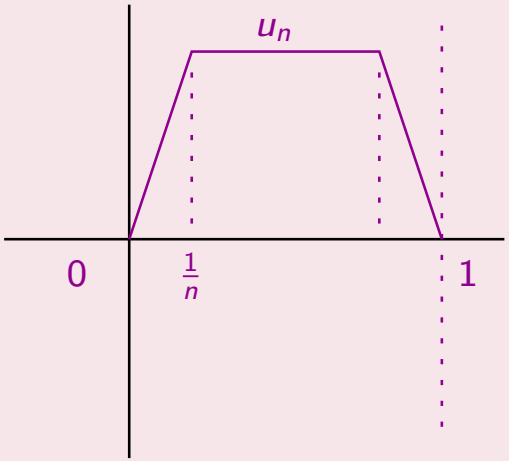
Por lo tanto $\|a - au_\lambda\| < \alpha + \varepsilon$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$, y entonces

$$\alpha \leq \underline{\text{lím}}\|a - au_\lambda\| \leq \overline{\text{lím}}\|a - au_\lambda\| \leq \alpha + \varepsilon,$$

para todo $\varepsilon > 0$. En consecuencia $\alpha = \text{lím}\, \|a - au_\lambda\|$. □

Ejemplo

Sean $A = C[0,1]$ y $L = C_0(0,1)$. Entonces $L \lhd A$. Consideremos la unidad aproximada $(u_n)_{n\geq 1}$ del ideal L dada por:



Si $a \in A$, se tiene

$$\lim_n au_n(t) = \begin{cases} 0 & si\ t = 0,1 \\ a(t) & si\ t \in (0,1). \end{cases}$$

Entonces $\|a - au_\lambda\|$ converge pero au_λ no.

Corolario

(a) *Si $I \lhd J \lhd A$, con I, J cerrados, entonces $I \lhd A$.*

(b) *Si $I, J \lhd A$ cerrados, entonces $I \cap J = \overline{IJ} := \overline{\{xy : x \in I, y \in J\}}$ (es posible probar que, de hecho, es $IJ = \overline{IJ}$).*

Demostración.

(a) Sean $a \in A$, $x \in I$, y sea (u_λ) una unidad aproximada de J. Entonces

$$ax = \lim_\lambda u_\lambda(ax) = \lim_\lambda (u_\lambda a)x \in I,$$

porque $u_\lambda a \in J$ y $x \in I$. Como I es cerrado, se tiene que $ax \in I$.

(b) Claramente $IJ \subset I \cap J$. Como $I \cap J$ es cerrado se tiene $\overline{IJ} \subset I \cap J$. Sean ahora $x \in I \cap J$, y (u_λ) una unidad aproximada de $I \cap J$. Entonces

$$x = \lim_\lambda x u_\lambda \in \overline{IJ},$$

porque $x \in I$ y $u_\lambda \in J$. Entonces $I \cap J \subseteq \overline{IJ}$.

□

Teorema (Segal, 1949)

Si $I \lhd A$, cerrado. Entonces $\frac{A}{I}$ es una C^*-álgebra (con la norma cociente).

Demostración.

Ya sabemos que $\frac{A}{I}$ es una $*$-álgebra de Banach. Sólo falta mostrar que $\|a+I\|^2 = \|(a+I)^*(a+I)\|$ para todo $a \in A$. De hecho es suficiente probar que $\|a+I\|^2 \leq \|(a+I)^*(a+I)\|$, porque la otra desigualdad es inmediata ($\|(a+I)^*(a+I)\| \leq \|(a+I)^*\|\|a+I\| = \|a+I\|^2$). Sea (u_λ) una unidad aproximada para I. Vimos que $\|a+I\|^2 = \lim_\lambda \|a-au_\lambda\|^2$. Ahora:

$$\|a-au_\lambda\|^2 = \|(a-au_\lambda)^*(a-au_\lambda)\| = \|(1-u_\lambda)a^*a(1-u_\lambda)\|$$
$$\leq \|1-u_\lambda\|\|a^*a-a^*au_\lambda\| \leq \|a^*a-a^*au_\lambda\|.$$

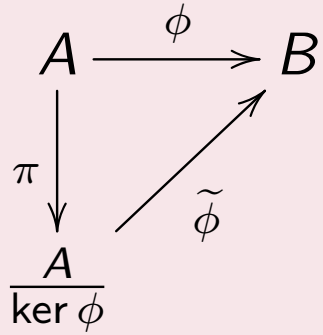
Entonces:

$$\|a+I\|^2 = \lim_\lambda \|a-au_\lambda\|^2 \leq \lim_\lambda \|a^*a-a^*au_\lambda\| = \|a^*a+I\| = \|(a+I)^*(a+I)\|.$$

□

Teorema

Sea $\phi : A \to B$ un homomorfismo entre las C^*-álgebras A y B. Entonces $\phi(A)$ es cerrado en B, y por lo tanto es una C^*-álgebra. Además existe un único homomorfismo $\widetilde{\phi} : \frac{A}{\ker \phi} \to B$ tal que el siguiente diagrama conmuta:



El mapa $\widetilde{\phi}$ es un homomorfismo isométrico de C^*-álgebras.

Demostración.

La existencia, unicidad e inyectividad del mapa $\widetilde{\phi}$ sigue del resultado análogo para álgebras. Además, como $\ker \phi$ es un ideal cerrado de A, se tiene que $\frac{A}{\ker \phi}$ es una C^*-álgebra. Entonces $\widetilde{\phi}$ es isométrico, pues es inyectivo. Luego $\widetilde{\phi}\left(\frac{A}{\ker \phi}\right) = \widetilde{\phi} \circ \pi(A) = \phi(A)$ es cerrado en B. □

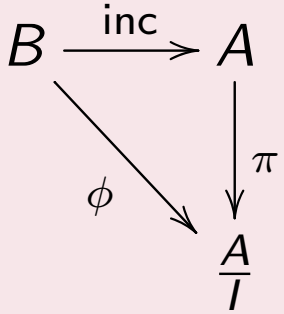
Proposición

Sean A una C^*-álgebra, $I \lhd A$ (cerrado) y B una C^*-subálgebra de A. Entonces $B + I$ es cerrado en A (y por lo tanto C^*-álgebra). Además

$$\frac{B}{B \cap I} \cong \frac{B + I}{I}.$$

Demostración.

Sea $\phi : B \to A/I$ dado por la conmutatividad del diagrama que sigue:



Como π es un homomorfismo, $\pi(B)$ debe ser cerrado, y por lo tanto $B+I = \pi^{-1}(\pi(B))$ también es cerrado. Por otro lado, $\ker \phi = B \cap I$, y por lo tanto

$$\frac{B}{B \cap I} \cong \phi(B) = \pi(B) = \frac{\pi^{-1}(\pi(B))}{I} = \frac{B + I}{I}.$$

□

Sea $A = C_0(X)$, donde X es un espacio de Hausdorff localmente compacto. Sean τ la topología de X, e indiquemos por $\mathcal{I}(A) = \{I : I \lhd A\}$ el reticulado de ideales de A. Si $V \in \tau$, podemos identificar la C^*-álgebra $C_0(V)$ con el ideal $I_V := \{a \in A : a(x) = 0 \text{ si } x \notin V\}$. Recíprocamente, si $I \lhd A$, entonces el conjunto $V^I := \{x \in X : \exists a \in I : a(x) \neq 0\}$ es obviamente abierto.

Teorema

Los mapas $\begin{array}{ccc} \mathcal{I}(A) & \longrightarrow & \tau \\ I & \longmapsto & V^I \end{array}$ *y* $\begin{array}{ccc} \tau & \longrightarrow & \mathcal{I}(A) \\ V & \longmapsto & I_V \end{array}$ *son mutuamente inversos, y son isomorfismos de reticulados.*

Demostración. Supongamos que U y V son elementos de τ, con $V \setminus U \neq \emptyset$. Si $x \in V \setminus U$, entonces existe $a \in A$ tal que $a(x) = 1$, $a(y) = 0$ si $y \notin V$. Entonces $a \in I_V \setminus I_U$, lo que muestra que el mapa $V \mapsto I_V$ es inyectivo. También preserva el orden, pues si $U \subseteq V$, entonces claramente $I_U \subseteq I_V$.

Supongamos que $I \lhd A$, y sea $J := I_{V^I} \cong C_0(V^I)$. Si $a \in I$ y $x \notin V^I$, entonces $a(x) = 0$, y por lo tanto $a \in I_{V^I}$. Ahora, I visto dentro de $C_0(V^I)$ es una subálgebra autoadjunta, cerrada y que no se anula en V^I. Sean $x, y \in V^I$, y sea $a \in I$ tal que $a(x) \neq 0$. Según el lema de Urysohn existe $b \in A$ tal que $b(x) = 1$, $b(y) = 0$. Pero entonces $c = ab \in I$, $c(x) \neq 0 = c(y)$, y por lo tanto I separa puntos de V^I. Entonces $I = I_{V^I}$ por el teorema de Stone-Weierstrass. Por lo tanto el mapa $V \mapsto I_V$ es una biyección que preserva el orden, y cuyo inverso es $I \mapsto V^I$, que claramente preserva el orden también. Finalmente, obsérvese que si $V \in \tau$, entonces

$$\frac{C_0(X)}{C_0(V)} \cong C_0(X \backslash V).$$

En efecto, basta notar que la restricción $\phi : C_0(X) \to C_0(X \backslash V)$, dada por $a \mapsto a_{|X \backslash V}$, ϕ es un homomorfismo sobreyectivo cuyo núcleo es $C_0(V)$. Luego podemos pensar los cerrados de X como los cocientes de $C_0(X)$.

Subálgebras hereditarias

Sean $A = M_3(\mathbb{C})$, y considérense las siguientes C*-subálgebras de A:

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{C} \right\} \qquad \text{y} \qquad C := \left\{ \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si $p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $0 < p < 1 \in B$, y $p \notin B$. Mientras tanto, si $c \in C_+$, y $0 \leq a \leq c$, entonces necesariamente $a \in C$:

$$|\langle ax, y\rangle|^2 \leq \langle ax, x\rangle\langle ay, y\rangle \leq \langle cx, x\rangle\langle cy, y\rangle,$$

de donde $\ker a \subseteq \ker c$, y en particular $a(e_3) = 0$, lo que implica que $a \in C$.

Definición

Sea B una C-subálgebra de la C*-álgebra A. Se dice que B es hereditaria en A si $0 \leq a \leq b \in B_+$ implica $a \in B$.*

Ejemplo

Sean $p = p^*p \in A$, *y* $p^\perp := 1 - p$. *Se tiene* $A \cong \begin{pmatrix} pAp & pAp^\perp \\ p^\perp Ap & p^\perp Ap^\perp \end{pmatrix}$. *El conjunto* pAp *es una C*-subálgebra de A. Además es hereditaria en A: si* $0 \leq a \leq pbp$, *entonces*

$$0 \leq p^\perp ap^\perp \leq p^\perp pbpp^\perp = 0,$$

de donde $p^\perp ap^\perp = 0$, *es decir* $\left(\sqrt{a}(1-p)\right)^* \sqrt{a}(1-p) = 0$. *Luego es* $\sqrt{a}(1-p) = 0$ *y entonces* $a(1-p) = 0$, *es decir,* $a = ap$. *Como* $a = a^*$, *se deduce que* $pa = a = ap$, *de modo que* $a = pap \in pAp$.

Si en el ejemplo anterior definimos $L := Ap$, entonces L es un ideal izquierdo cerrado de A, y $pAp = L \cap L^*$. Más en general se tiene:

Proposición

1. *Si $L \subseteq A$ es un ideal izquierdo cerrado, entonces $L \cap L^*$ es una subálgebra hereditaria de A.*
2. *Si B es una subálgebra hereditaria de A, entonces $L(B) := \{a \in A : a^*a \in B\}$ es un ideal izquierdo cerrado de A.*

Además las correspondencias anteriores son inversas entre sí, es decir:

$$L(B) \cap L(B)^* = B \qquad y \qquad L(L \cap L^*) = L.$$

Demostración.

1. Supongamos que $0 \leq a \leq b$, $a \in A$, $b \in L \cap L^*$, y sea $(u_\lambda) \subseteq L \cap \Lambda$ tal que $xu_\lambda \to x \ \forall x \in L$. Entonces:

$$0 \leq (1-u_\lambda)a(1-u_\lambda) \leq (1-u_\lambda)b(1-u_\lambda),$$

$$\|(1-u_\lambda)a(1-u_\lambda)\| \leq \|(1-u_\lambda)b(1-u_\lambda)\|,$$

$$\|\sqrt{a}(1-u_\lambda)\|^2 \leq \|\sqrt{b}(1-u_\lambda)\|^2 \xrightarrow{\lambda} 0,$$

de donde $\sqrt{a} = \lim_\lambda \sqrt{a}u_\lambda$, y por lo tanto $\sqrt{a} = \lim_\lambda u_\lambda \ a \in L$. Como $a = a^*$, entonces $a \in L \cap L^*$.

2. $L(B)$ es cerrado: es preimagen de un cerrado por una función continua. Es un ideal a izquierda: si $a \in A$, $b, c \in L(B)$:

$$(b+c)^*(b+c) \leq (b+c)^*(b+c)+(b-c)^*(b-c) = 2(b^*b+c^*c) \in B,$$

$$(ab)^*(ab) = b^*a^*ab \leq b^*\|a^*a\|b = \|a\|^2 b^*b \in B,$$

de donde $(b+c)^*(b+c)$ y $(ab)^*(ab) \in B$ porque B es hereditaria.

Es claro que $B \subseteq L(B)$, así que $B \subseteq L(B) \cap L(B)^*$. Recíprocamente, sea $a \in L(B) \cap L(B)^*$ positivo. Entonces $a^{1/2} \in L(B)$, y por lo tanto $a = (a^{1/2})^* a^{1/2} \in B$. Entonces $B = L(B) \cap L(B)^*$ porque toda C*-álgebra está linealmente generada por sus elementos positivos.

Ahora sean L un ideal izquierdo cerrado y $B = L \cap L^*$. Si $x \in L(B)$, entonces $x^*x \in B$. Tomando una unidad aproximada (u_λ) para B, y observando que $xu_\lambda \in L \ \forall \lambda$, se concluye que $x \in L$, porque L es cerrado, y:

$$\|x - xu_\lambda\|^2 = \|(1-u_\lambda)x^*x(1-u_\lambda)\| \leq \|x^*x(1-u_\lambda)\| \xrightarrow{\lambda} 0.$$

Y finalmente, si $x \in L$, entonces $x^*x \in L \cap L^* = B$, o sea que $x \in L(B)$.

Teorema

Sea B una C-subálgebra. Entonces B es hereditaria en A si y sólo si $BAB \subseteq B$.*

Demostración.

Si $B = L \cap L^*$, L ideal izquierdo cerrado (y entonces L^* ideal derecho). Se tiene $BAB \subseteq B$, porque si $b_1, b_2 \in B$, $a \in A$, entonces

$$b_1 a b_2 = (b_1 a) b_2 = b_1 (a b_2) \in L \cap L^* = B.$$

Recíprocamente, supongamos que $BAB \subseteq B$, y sea $0 \leq a \leq b$, con $b \in B$. Si (u_λ) es una unidad aproximada para B, entonces:

$$0 \leq (1 - u_\lambda) a (1 - u_\lambda) \leq (1 - u_\lambda) b (1 - u_\lambda),$$

$$\|(1 - u_\lambda) a (1 - u_\lambda)\| \leq \|(1 - u_\lambda) b (1 - u_\lambda)\|,$$

$$\|\sqrt{a}(1 - u_\lambda)\|^2 \leq \|\sqrt{b}(1 - u_\lambda)\|^2 \overset{\lambda}{\to} 0,$$

de donde $\sqrt{a} = \lim_\lambda \sqrt{a} u_\lambda$, y por lo tanto $\sqrt{a} = \lim_\lambda u_\lambda \sqrt{a}$. Luego $a = \lim_\lambda u_\lambda a u_\lambda \in BAB \subseteq B$, lo que muestra que B es hereditaria. □

Corolario

Todo ideal bilateral cerrado es una C-subálgebra hereditaria.*

Corolario

En una C-álgebra conmutativa coinciden las nociones de ideal bilateral, ideal a izquierda, ideal a derecha, y de subálgebra hereditaria.*

Corolario

Si $b \in A_+$, entonces la menor subálgebra hereditaria de A que contiene a b es $\mathrm{Her}(b) := \overline{bAb}$, *que corresponde al ideal izquierdo* $\overline{Ab}$ *generado por b (y por lo tanto* $\mathrm{Her}(b) = \overline{Ab} \cap \overline{Ab}^* = \overline{Ab} \cap \overline{bA}$*).*

Definición

Se dice que una C-álgebra es σ-unital si posee una unidad aproximada numerable. Por ejemplo, toda C*-álgebra separable es σ-unital.*

Teorema

Si B es una C-subálgebra σ-unital de A, entonces B es hereditaria sii existe un elemento positivo $b \in A$ tal que* $B = \mathrm{Her}(b)$.

Demostración.

Si (u_n) es una unidad aproximada numerable de la subálgebra hereditaria B, definamos $b := \sum_{n\geq 1} \frac{u_n}{2^n} \in B$. Luego $\mathrm{Her}(b) \subseteq B$. Como $0 \leq u_n \leq 2^n b \in \mathrm{Her}(b)$, se tiene que $u_n \in \mathrm{Her}(b)\ \forall n$. Luego si $b' \in B$: $b' = \lim_n u_n b' u_n \in \mathrm{Her}(b)$. El recíproco es parte del Corolario previo. □

Si ξ, η son vectores de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, sea $\theta_{\xi,\eta} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dado por $\theta_{\xi,\eta}(\zeta) := \langle \zeta, \eta \rangle \xi$. Entonces $\theta_{\xi,\eta}$ es un operador de rango 1 (si $\xi \neq 0 \neq \eta$), y genera linealmente a la $*$-álgebra de operadores de rango finito, que es densa en K. Si D es denso en $\mathcal{H}$, entonces la colección de sumas finitas de operadores $\theta_{\xi,\xi'}$ (con $\xi, \xi' \in D$) es un subconjunto denso en K.

Ejemplo

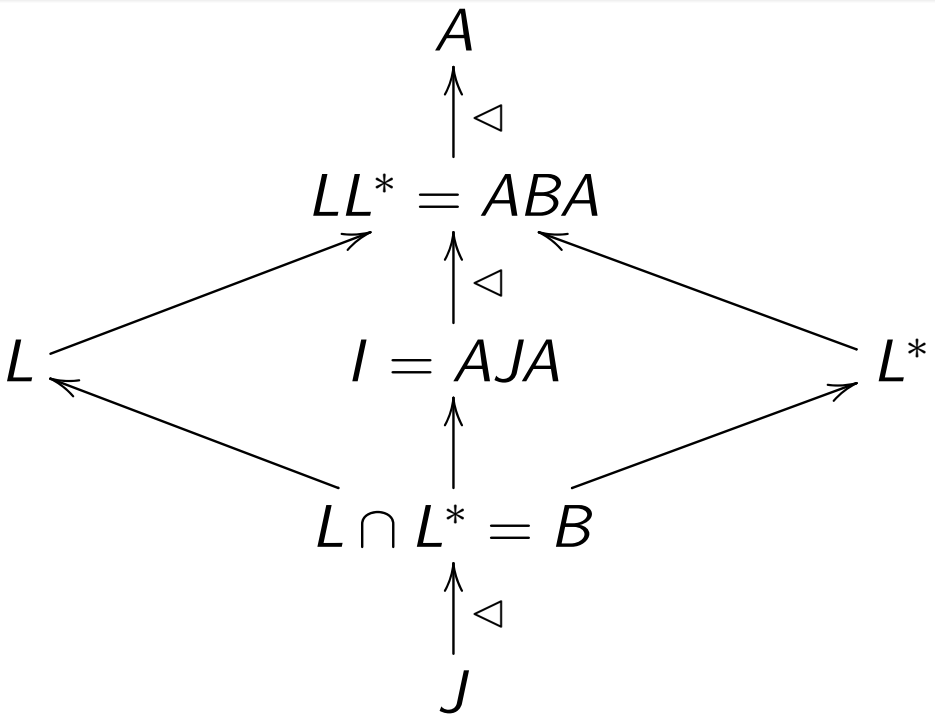
Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, entonces $\mathrm{K} = \mathrm{Her}(a)$ *para algún* $a \in \mathrm{K}$ *sii $\mathcal{H}$ es separable. Si $\mathcal{H}$ es separable, entonces* K *es σ-unital, pues es separable también. Si $\mathcal{H}$ no es separable y* $a \in \mathrm{K}$*, entonces $\overline{a\mathcal{H}}$ es separable, y por lo tanto $(\overline{a\mathcal{H}})^{\perp} \neq 0$. Luego se puede tomar $\xi \perp \overline{a\mathcal{H}}$, con $\|\xi\| = 1$. Entonces $\theta_{\xi,\xi} \notin \overline{aB(\mathcal{H})a}$, pues $\theta_{\xi,\xi}(\xi) = \xi \perp \overline{b\mathcal{H}}$, $\forall b \in \overline{aB(\mathcal{H})a}$.*

Teorema

Sean B una C-subálgebra hereditaria de A, y J un ideal de B. Entonces existe un ideal I de A tal que $J = B \cap I$.*

Demostración.

Sea $I = AJA := \overline{span}\{axa' : a, a' \in A, x \in J\}$. Luego $I \lhd A$, y $J \subseteq B \cap I$. Si $B \cap I$ y (u_λ) es unidad aproximada de $B \cap I$, es $x = \lim_\lambda u_\lambda x u_\lambda \in BIB$. Por último: $BIB = BAJAB = BA(BJB)AB = (BAB)J(BAB) \subseteq BJB = J$, de modo que $J = B \cap I = BIB$. □



Definición

Se dice que una C-álgebra A es simple si sus únicos ideales son 0 y A.*

Corolario

Una C-subálgebra hereditaria de una C*-álgebra simple también es simple.*

Observación

El corolario anterior no es cierto en general si la subálgebra no es hereditaria. Por ejemplo K *es simple (ejercicio), pero si* $\xi \perp \eta \in \mathcal{H}$, *entonces* $A := \mathbb{C}\theta_{\xi,\xi} + \mathbb{C}\theta_{\eta,\eta}$ *es una C*-subálgebra de* K *que no es simple:* $0 \neq \mathbb{C}\theta_{\xi,\xi} \lhd A$.