

- 1 Repaso
 - Cono positivo de una C^* -álgebra
- 2 Unidades aproximadas
- 3 Ideales y cocientes
 - Ideales en C^* -álgebras conmutativas.

Cono positivo de una C^* -álgebra

Definición

Sean A una C^* -álgebra y $a \in A$. Se dice que a es positivo ($a \in A_+$) si a es autoadjunto y $\sigma(a) \subseteq [0, \infty)$.

Teorema

Sea $a \in A$ un elemento positivo. Entonces existe un único $b \in A_+$ tal que $b^2 = a$.

Teorema

A_+ es un cono cerrado en A .

Definición

Sean $a, b \in A$. Se dice que $a \leq b$ (o $b \geq a$) si $b - a \in A_+$. Esta relación es un orden parcial en A . En general este orden se considera sólo sobre A_{sa} .

Proposición

Sea $a \in A_{sa}$. Entonces existen únicos $a_+, a_- \in A_+$ tales que $a = a_+ - a_-$ y $a_+ a_- = 0 = a_- a_+$ (notar que $aa_- = -a_-^2 = a_- a$, $aa_+ = a_+^2 = a_+ a$).

Teorema

Si $a \in A$ entonces $a^* a \in A_+$.

Teorema

Sea A una C^* -álgebra. Entonces

- (a) $A_+ = \{a^*a : a \in A\}$.
- (b) Si $a, b, c \in A$ y $a \leq b$. Entonces $c^*ac \leq c^*bc$.
- (c) Si $0 \leq a \leq b$, entonces $\|a\| \leq \|b\|$.
- (d) Si $1 \in A$ y $0 \leq a \leq b$ con $a \in \text{Inv}(A)$, entonces $b \in \text{Inv}(A)$ y $0 \leq b^{-1} \leq a^{-1}$.

Demostración.

- (a) Ya lo vimos.
- (b) Como $a \leq b$, existe $d \in A$ tal que $b - a = d^*d \in A_+$. Entonces $c^*bc - c^*ac = c^*(b - a)c = c^*d^*dc = (dc)^*dc \in A_+$.
- (c) Podemos suponer que $1 \in A$. Entonces $\|b\| - b \in A_{sa}$ y $\sigma(\|b\| - b) = \|\|b\| - \sigma(b)\| \subseteq [0, \|b\|]$. Luego $\|b\| - b \in A_+$ y por lo tanto $b \leq \|b\|$. Entonces se tiene que $a \leq b \leq \|b\|$, de manera que $\sigma(a) \subseteq [0, \|b\|]$. Sigue de esto que $\|a\| = r(a) \leq \|b\|$, y por lo tanto $\|a\| \leq \|b\|$.

(d) Si $a \in \text{Inv}(A) \cap A_+$, entonces $a^{-1} \in A_+$ porque es autoadjunto y $\sigma(a^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(a)\}$. Como $a \leq b$ se tiene

$$1 = a^{-\frac{1}{2}} a a^{-\frac{1}{2}} \leq a^{-\frac{1}{2}} b a^{-\frac{1}{2}}.$$

Entonces $1 \leq a^{-\frac{1}{2}} b a^{-\frac{1}{2}}$. Luego $a^{-\frac{1}{2}} b a^{-\frac{1}{2}} \in \text{Inv}(A)$, y $b \in \text{Inv}(A)$. Por otro lado, si $1 \leq c$, se tiene

$$c^{-1} = c^{-\frac{1}{2}} 1 c^{-\frac{1}{2}} \leq c^{-\frac{1}{2}} c c^{-\frac{1}{2}} = 1,$$

así que $c^{-1} \leq 1$. Entonces $(a^{-\frac{1}{2}} b a^{-\frac{1}{2}})^{-1} \leq 1$, es decir $a^{\frac{1}{2}} b^{-1} a^{\frac{1}{2}} \leq 1$. Luego $a^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} b^{-1} a^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}} \leq a^{-\frac{1}{2}} 1 a^{-\frac{1}{2}}$, y por lo tanto $b^{-1} \leq a^{-1}$.

Definición

Sea A un álgebra de Banach. Se dice que una red $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq A$ es una unidad aproximada para A si $\lim_\lambda u_\lambda a = a = \lim_\lambda a u_\lambda$, para todo $a \in A$ (en general se pide también que $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ esté acotado).

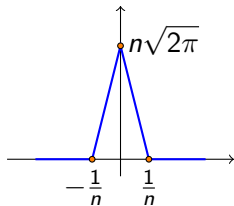
Definición

Si A es una C^* -álgebra, se dice que una red $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es una unidad aproximada para A si:

- (a) $u_\lambda \in A_+$ y $\|u_\lambda\| \leq 1$, para todo $\lambda \in \Lambda$.
- (b) Si $\lambda \leq \lambda'$, entonces $u_\lambda \leq u_{\lambda'}$.
- (c) $\lim_\lambda u_\lambda a = a = \lim_\lambda a u_\lambda$, $\forall a \in A$.

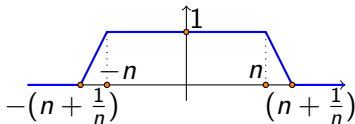
Ejemplos

(1) Sea $A = L^1(\mathbb{R})$ con $\|a\|_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |a(t)| dt$. Sea u_n dada por:



Entonces $\|u_n\|_1 = 1$ y $(u_n)_{n \geq 1}$ es una unidad aproximada para la $*$ -álgebra de Banach $L^1(\mathbb{R})$.

(2) En $C_0(\mathbb{R})$, consideremos (u_n) dada por:



Entonces $\|u_n\| = 1$, $u_n \geq 0$, y (u_n) es una unidad aproximada para la C^* -álgebra $C_0(\mathbb{R})$.

(3) Sea K el espacio de operadores compactos sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Consideremos $\mathcal{F} := \{F \leq \mathcal{H} : \dim F < \infty\}$ con el orden natural. Definimos $u_F :=$ proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre F . Veamos que $(u_F)_{F \in \mathcal{F}}$ es una unidad aproximada para K .

- (a) $u_F = u_F^*$, $u_F \in K_+$. Además $\|u_F\| = 1$ si $F \neq 0$.
- (b) Si $F_1 \leq F_2$ entonces $u_{F_2} - u_{F_1} = u_{F_2 \ominus F_1} \in K_+$ ($F_2 \ominus F_1 := F_2 \cap F_1^\perp$)
- (c) Se tiene $\lim_F u_F(\xi) = \xi$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Supongamos que $a \in K$. Entonces $a(\overline{B}(0, 1))$ es totalmente acotado. Dado $\varepsilon > 0$ tomemos una ε -red $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ en $a(\overline{B}(0, 1))$, y sea $F_\varepsilon := \text{span}\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$. Entonces $u_F(\eta_j) = \eta_j$ si $F \supseteq F_\varepsilon$ y $j = 1, \dots, n$. Dado $\xi \in \overline{B}(0, 1)$, sea η_j tal que $\|a(\xi) - \eta_j\| < \varepsilon$. Entonces si $F \supseteq F_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} \|(u_F a - a)\xi\| &= \|u_F a(\xi) - a(\xi)\| \leq \|u_F a(\xi) - \eta_j\| + \|\eta_j - a(\xi)\| \\ &\leq \|u_F\| \|a(\xi) - \eta_j\| + \|\eta_j - a(\xi)\| < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

de donde $\|u_F a - a\| < \varepsilon$ para todo $F \supseteq F_\varepsilon$. Luego $u_F a \rightarrow a$ en K , y también $u_F a^* \rightarrow a^*$ en K . Entonces $(u_F a^*)^* \rightarrow (a^*)^*$, es decir $au_F \rightarrow a$. Nótese que la demostración anterior prueba que la $*$ -álgebra F de los operadores de rango finito es densa en K .

- (4) Sea $b \in A_+$, $b \neq 0$, y sea $C^*(b)$ la C^* -álgebra generada por b en A . Si $f : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ está dada por $f(t) = \frac{t}{1+t}$, definamos $b_n := f(nb)$. Entonces (b_n) es una unidad aproximada para $C^*(b)$. Para verlo basta mostrar que $\|bb_n - b\| \rightarrow_n 0$, porque b es un generador. Ahora:
 $bb_n - b = g_n(b)$, donde $g_n(t) = tf(nt) - t$, o sea
 $g_n(t) = t \frac{nt}{1+nt} - t = t(-\frac{1}{1+nt}) = -\frac{t}{1+nt}$. Entonces

$$\|bb_n - b\| = \|g_n(b)\| = r(g_n(b)) = \max_{t \in \sigma(b)} \frac{t}{1+nt} = \frac{r(b)}{1+nr(b)} \rightarrow_n 0.$$

Teorema

Toda C^ -álgebra A posee una unidad aproximada. Más precisamente, sean $\Lambda = B(0, 1) \cap A_+$, y B una $*$ -subálgebra densa en A tal que*

(1) $b(1+b)^{-1} \in B \ \forall b \in B \cap A_+.$

(2) $b(1-b)^{-1} \in B \ \forall b \in B \cap \Lambda.$

Sea $(u_\lambda)_{\lambda \in B \cap \Lambda}$ tal que $u_\lambda = \lambda$ para todo $\lambda \in B \cap \Lambda$.

Entonces $(u_\lambda)_{\lambda \in B \cap \Lambda}$ es una unidad aproximada para A .

Demostración. Sea $f : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ dada por $f(t) = \frac{t}{1+t}$. La función f es una biyección con inversa $g : [0, 1) \rightarrow [0, \infty)$ dada por $g(s) = \frac{s}{1-s}$. Es claro que $f(A_+) \subseteq \Lambda$, y $g(\Lambda) \subseteq A_+$, y como f y g son inversas entre sí, se deduce que $f(A_+) = \Lambda$, y $g(\Lambda) = A_+$. Por (1) y (2) es $f(B \cap A_+) \subseteq B \cap \Lambda$ y $g(B \cap \Lambda) \subseteq B \cap A_+$; luego $f(B \cap A_+) = B \cap \Lambda$ y $g(B \cap \Lambda) = B \cap A_+$.

Afirmación 1: *El mapa $B \cap A_+ \setminus \{0\} \rightarrow B \cap \Lambda \setminus \{0\}$ tal que $a \mapsto f(a)$ es una biyección con inversa $B \cap \Lambda \setminus \{0\} \rightarrow B \cap A_+ \setminus \{0\}$ tal que $a \mapsto g(a)$, y tanto f como g preservan el orden.*

Veamos que f preserva el orden.

- Si $a \geq 0$ entonces $1 + a \in \text{Inv}(\tilde{A})$ es invertible, pues $1 \leq 1 + a$.
- Si $a_1 \leq a_2$, entonces $1 + a_1 \leq 1 + a_2$ en $\tilde{A}$, de donde $(1 + a_1)^{-1} \geq (1 + a_2)^{-1}$, y entonces $(1 + a_1)^{-1} - 1 \geq (1 + a_2)^{-1} - 1$, y por lo tanto $1 - (1 + a_2)^{-1} \geq 1 - (1 + a_1)^{-1}$.
- Luego $\left((1 + a_2) - 1\right)(1 + a_2)^{-1} \geq \left((1 + a_1) - 1\right)(1 + a_1)^{-1}$, de modo que $a_2(1 + a_2)^{-1} \geq a_1(1 + a_1)^{-1}$. Es decir que $f(a_2) \geq f(a_1)$.

De manera análoga se ve que g preserva el orden. Como g es la inversa de f , la afirmación queda probada.

Como $B \cap A_+ \setminus \{0\}$ es un conjunto dirigido, se deduce que $B \cap \Lambda \setminus \{0\}$ también lo es. Concretamente, dados $b_1, b_2 \in B \cap \Lambda \setminus \{0\}$, sea $d := f(g(b_1) + g(b_2))$. Entonces $d \in B \cap \Lambda \setminus \{0\}$, y $d \geq b_1$, $d \geq b_2$.

Afirmación 2: $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda \cap B}$ es una unidad aproximada para A .

Es claro por construcción que $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda \cap B}$ satisface las propiedades (a) y (b) que definen las unidades aproximadas. Para ver que también satisface la propiedad (c), notar que basta probar que $u_\lambda a \rightarrow a \ \forall a \in A_+$, pues esto implica también que $au_\lambda \rightarrow a \ \forall a \in A_+$, y además A está generada linealmente por A_+ .

Por otro lado, como $\overline{B} = A$, se tiene $\overline{B \cap A_+} = A_+$, y por lo tanto basta probar que $u_\lambda b \rightarrow b$ para todo $b \in B \cap A_+$. Ahora, dado $b \in B \cap A_+$, sean $C^*(b)$ y (b_n) como en el Ejemplo (4), es decir que $b_n = f(nb) \in B \cap \Lambda$. Dado $\varepsilon > 0$, sea n_ε tal que $\|bb_n - b\| < \varepsilon \ \forall n \geq n_\varepsilon$, y supongamos que $\lambda \in B \cap \Lambda$ es tal que $\lambda \geq b_{n_\varepsilon}$. Entonces:

$$\|b - bu_\lambda\|^2 = \|b(1 - u_\lambda)\|^2 = \|b(1 - u_\lambda)^{\frac{1}{2}}(1 - u_\lambda)^{\frac{1}{2}}\|^2 \leq \|b(1 - u_\lambda)^{\frac{1}{2}}\|^2,$$

porque $\sigma((1 - u_\lambda)^{\frac{1}{2}}) \subseteq [0, 1]$. Entonces

$$\|b - bu_\lambda\|^2 \leq \|b((1 - u_\lambda)^{\frac{1}{2}})(b(1 - u_\lambda)^{\frac{1}{2}})^*\| = \|b(1 - u_\lambda)b\|.$$

Como $b_{n_\varepsilon} \leq u_\lambda$ se tiene $1 - u_\lambda \leq 1 - b_{n_\varepsilon}$, y por lo tanto

$$a(1 - u_\lambda)a^* \leq a(1 - b_{n_\varepsilon})a^*, \text{ para todo } a \in A.$$

En particular $b(1 - u_\lambda)b \leq b(1 - b_{n_\varepsilon})b$. Entonces

$$\|b(1 - u_\lambda)b\| \leq \|b(1 - b_{n_\varepsilon})b\| \leq \|b\| \|b - b_{n_\varepsilon}b\| \leq \|b\|\varepsilon.$$

Luego $\lim_\lambda bu_\lambda = b$, y la demostración est completa.

Proposición

Si A es una C^ -álgebra separable, existe $(u_n)_{n \geq 1}$ tal que (u_n) es una unidad aproximada para A .*

Demostración.

Sean $\{a_n\}_{n \geq 1}$ denso en A y $(v_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una unidad aproximada para A . Sea $\lambda_1 \in \Lambda$ tal que $\|a_1 v_{\lambda_1} - a_1\| < 1$. Construidos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, sea $\lambda_{n+1} \geq \lambda_1, \dots, \lambda_n$ tal que $\|a_j v_{\lambda_{n+1}} - a_j\| < \frac{1}{n+1}$ para todo $j = 1, \dots, n+1$. Entonces, tomando $u_n := v_{\lambda_n}$, la sucesión $(u_n)_{n \geq 1}$ es una unidad aproximada para A . □

Proposición

Si I es un $$ -ideal denso en A , entonces A tiene una unidad aproximada contenida en I .*

Demostración.

Se verifica directamente que I un $*$ -ideal en $\tilde{A}$. Luego $x(1+x)^{-1} \in I$ para todo $x \in I \cap A_+$, y $x(1-x)^{-1} \in I$ para todo $x \in I \cap A_+$ tal que $\|x\| < 1$, y entonces el resultado sigue del teorema anterior. $\square$

Proposición

Si L es un ideal izquierdo en una C^ -álgebra A (no necesariamente cerrado), entonces L contiene una red $(u_\lambda) \subseteq L$, creciente y contenida en $\Lambda = A_+ \cap B(0,1)$, tal que $\lim_\lambda au_\lambda = a$ para todo $a \in L$.*

Demostración. Es claro que $L \cap L^*$ es una $*$ -subálgebra de A , densa en la C^* -álgebra $C := \overline{L \cap L^*}$. Se verifica directamente que L y L^* son ideales izquierdo y derecho respectivamente en $\tilde{A}$, de modo que si $b \in L \cap L^* \cap C_+$ entonces $b(1+b)^{-1} \in L \cap L^*$, y si $b \in L \cap L^* \cap C_+$ y $\|b\| < 1$, entonces $b(1-b)^{-1} \in L \cap L^*$ (ver la demostración de la proposición anterior). Por lo tanto existe una unidad aproximada (u_λ) de C contenida en $L \cap L^*$. Ahora si $a \in L$ se tiene:

$$\begin{aligned} \|au_\lambda - a\|^2 &= \|(au_\lambda - a)^*(au_\lambda - a)\| = \|u_\lambda a^* au_\lambda - u_\lambda a^* a - a^* au_\lambda + a^* a\| \\ &\leq \|u_\lambda\| \|a^* au_\lambda - a^* a\| + \|a^* au_\lambda - a^* a\| \leq 2\|a^* au_\lambda - a^* a\| \rightarrow_\lambda 0, \end{aligned}$$

porque (u_λ) es una unidad aproximada y $a^* a \in L \cap L^*$.

Teorema (Segal, 1949)

Sea J un ideal bilateral cerrado en la C^ -álgebra A . Entonces $J = J^*$.*

Demostración. Sea $(u_\lambda) \subseteq J$ como en la Proposición previa, y sea $a \in J$. Entonces $\lim_\lambda au_\lambda = a$. Tomando el adjunto tenemos que $\lim_\lambda u_\lambda a^* = a^*$. Como $u_\lambda a^* \in J$ porque $u_\lambda \in J$, y como J es cerrado, se concluye que $a^* \in J$.

Lema

Sean L un ideal izquierdo cerrado en A , y (u_λ) una red como en la Proposición anterior. Entonces para todo $a \in A$ se tiene

$$d(a, L) = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} = \lim_{\lambda} \|a - au_\lambda\|.$$

Demostración.

Es claro que $\alpha = \inf\{\|a - x\| : x \in L\} \leq \liminf \|a - au_\lambda\|$, pues $au_\lambda \in L$, $\forall \lambda$. Dado $\varepsilon > 0$ sea $x \in L$ tal que $\|a - x\| < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$, y sea λ_0 tal que $\|x - xu_\lambda\| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Como $\|u_\lambda\| < 1$ y $u_\lambda \geq 0$, se tiene $\sigma(u_\lambda) \subseteq [0, 1]$ y $\sigma(1 - u_\lambda) \subseteq [0, 1]$. Luego $\|1 - u_\lambda\| \leq 1$. Entonces

$$\begin{aligned} \|a - au_\lambda\| &= \|a - x + x - xu_\lambda + xu_\lambda - au_\lambda\| \\ &\leq \|(a - x) - (a - x)u_\lambda\| + \|x - xu_\lambda\| \leq \|a - x\|\|1 - u_\lambda\| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

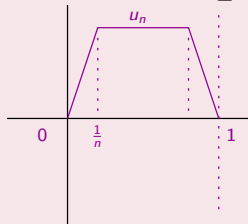
Por lo tanto $\|a - au_\lambda\| < \alpha + \varepsilon$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$, y entonces

$$\alpha \leq \liminf \|a - au_\lambda\| \leq \overline{\lim} \|a - au_\lambda\| \leq \alpha + \varepsilon,$$

para todo $\varepsilon > 0$. En consecuencia $\alpha = \lim \|a - au_\lambda\|$. □

Ejemplo

Sean $A = C[0, 1]$ y $L = C_0(0, 1)$. Entonces $L \triangleleft A$. Consideremos la unidad aproximada $(u_n)_{n \geq 1}$ del ideal L dada por:



Si $a \in A$, se tiene

$$\lim_n au_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0, 1 \\ a(t) & \text{si } t \in (0, 1). \end{cases}$$

Entonces $\|a - au_\lambda\|$ converge pero au_λ no.

Corolario

- (a) Si $I \triangleleft J \triangleleft A$, con I, J cerrados, entonces $I \triangleleft A$.
- (b) Si $I, J \triangleleft A$ cerrados, entonces $I \cap J = \overline{IJ}$ (es posible probar que, de hecho, es $IJ = \overline{IJ}$).

Demostración.

(a) Sean $a \in A$, $x \in I$, y sea (u_λ) una unidad aproximada de J . Entonces

$$ax = \lim_{\lambda} u_\lambda(ax) = \lim_{\lambda} (u_\lambda a)x \in I,$$

porque $u_\lambda a \in J$ y $x \in I$. Como I es cerrado, se tiene que $ax \in I$.

(b) Claramente $IJ \subset I \cap J$. Como $I \cap J$ es cerrado se tiene $\overline{IJ} \subset I \cap J$. Sean ahora $x \in I \cap J$, y (u_λ) una unidad aproximada de $I \cap J$. Entonces

$$x = \lim_{\lambda} xu_\lambda \in \overline{IJ},$$

porque $x \in I$ y $u_\lambda \in J$. Entonces $I \cap J \subseteq \overline{IJ}$.



Teorema (Segal, 1949)

Si $I \triangleleft A$, cerrado. Entonces $\frac{A}{I}$ es una C^* -álgebra (con la norma cociente).

Demostración.

Ya sabemos que $\frac{A}{I}$ es una $*$ -álgebra de Banach. Sólo falta mostrar que $\|a + I\|^2 = \|(a + I)^*(a + I)\|$ para todo $a \in A$. De hecho es suficiente probar que $\|a + I\|^2 \leq \|(a + I)^*(a + I)\|$, porque la otra desigualdad es inmediata ($\|(a + I)^*(a + I)\| \leq \|(a + I)^*\| \|a + I\| = \|a + I\|^2$). Sea (u_λ) una unidad aproximada para I . Vimos que $\|a + I\|^2 = \lim_\lambda \|a - au_\lambda\|^2$. Ahora:

$$\begin{aligned}\|a - au_\lambda\|^2 &= \|(a - au_\lambda)^*(a - au_\lambda)\| = \|(1 - u_\lambda)a^*a(1 - u_\lambda)\| \\ &\leq \|1 - u_\lambda\| \|a^*a - a^*au_\lambda\| \leq \|a^*a - a^*au_\lambda\|.\end{aligned}$$

Entonces:

$$\|a + I\|^2 = \lim_\lambda \|a - au_\lambda\|^2 \leq \lim_\lambda \|a^*a - a^*au_\lambda\| = \|a^*a + I\| = \|(a + I)^*(a + I)\|.$$



Teorema

Sea $\phi : A \rightarrow B$ un homomorfismo entre las C^* -álgebras A y B . Entonces $\phi(A)$ es cerrado en B , y por lo tanto es una C^* -álgebra. Además existe un único homomorfismo $\tilde{\phi} : \frac{A}{\ker \phi} \rightarrow B$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{\phi} & \\ \frac{A}{\ker \phi} & & \end{array}$$

El mapa $\tilde{\phi}$ es un homomorfismo isométrico de C^* -álgebras.

Demostración.

La existencia, unicidad e inyectividad del mapa $\tilde{\phi}$ sigue del resultado análogo para álgebras. Además, como $\ker \phi$ es un ideal cerrado de A , se tiene que $\frac{A}{\ker \phi}$ es una C^* -álgebra. Entonces $\tilde{\phi}$ es isométrico, pues es inyectivo. Luego $\tilde{\phi} \left(\frac{A}{\ker \phi} \right) = \tilde{\phi} \circ \pi(A) = \phi(A)$ es cerrado en B . □

Proposición

Sean A una C^* -álgebra, $I \triangleleft A$ (cerrado) y B una C^* -subálgebra de A . Entonces $B + I$ es cerrado en A (y por lo tanto C^* -álgebra). Además

$$\frac{B}{B \cap I} \cong \frac{B + I}{I}.$$

Demostración.

Sea $\phi : B \rightarrow A/I$ dado por la conmutatividad del diagrama que sigue:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\text{inc}} & A \\ & \searrow \phi & \downarrow \pi \\ & & A/I \end{array}$$

Como π es un homomorfismo, $\pi(B)$ debe ser cerrado, y por lo tanto $B + I = \pi^{-1}(\pi(B))$ también es cerrado. Por otro lado, $\ker \phi = B \cap I$, y por lo tanto

$$\frac{B}{B \cap I} \cong \phi(B) = \pi(B) = \frac{\pi^{-1}(\pi(B))}{I} = \frac{B + I}{I}.$$



Sea $A = C_0(X)$, donde X es un espacio de Hausdorff localmente compacto. Sean τ la topología de X , e indiquemos por $\mathcal{I}(A) = \{I : I \triangleleft A\}$ el reticulado de ideales de A . Si $V \in \tau$, podemos identificar la C^* -álgebra $C_0(V)$ con el ideal $I_V := \{a \in A : a(x) = 0 \text{ si } x \notin V\}$. Recíprocamente, si $I \triangleleft A$, entonces el conjunto $V^I := \{x \in X : \exists a \in I : a(x) \neq 0\}$ es obviamente abierto.

Teorema

Los mapas $\mathcal{I}(A) \longrightarrow \tau$ y $\tau \longrightarrow \mathcal{I}(A)$ son mutuamente inversos, y

$$I \longmapsto V^I \qquad V \longmapsto I_V$$

son isomorfismos de reticulados.

Demostración. Supongamos que U y V son elementos de τ , con $V \setminus U \neq \emptyset$. Si $x \in V \setminus U$, entonces existe $a \in A$ tal que $a(x) = 1$, $a(y) = 0$ si $y \notin V$. Entonces $a \in I_V \setminus I_U$, lo que muestra que el mapa $V \mapsto I_V$ es inyectivo. También preserva el orden, pues si $U \subseteq V$, entonces claramente $I_U \subseteq I_V$.

Supongamos que $I \triangleleft A$, y sea $J := I_{V'} \cong C_0(V')$. Si $a \in I$ y $x \notin V'$, entonces $a(x) = 0$, y por lo tanto $a \in I_{V'}$. Ahora, I visto dentro de $C_0(V')$ es una subálgebra autoadjunta, cerrada y que no se anula en V' . Sean $x, y \in V'$, y sea $a \in I$ tal que $a(x) \neq 0$. Según el lema de Urysohn existe $b \in A$ tal que $b(x) = 1$, $b(y) = 0$. Pero entonces $c = ab \in I$, $c(x) \neq 0 = c(y)$, y por lo tanto I separa puntos de V' . Entonces $I = I_{V'}$ por el teorema de Stone-Weierstrass. Por lo tanto el mapa $V \mapsto I_V$ es una biyección que preserva el orden, y cuyo inverso es $I \mapsto V'$, que claramente preserva el orden también. Finalmente, obsérvese que si $V \in \tau$, entonces

$$\frac{C_0(X)}{C_0(V)} \cong C_0(X \setminus V).$$

En efecto, basta notar que la restricción $\phi : C_0(X) \rightarrow C_0(X \setminus V)$, dada por $a \mapsto a|_{X \setminus V}$, ϕ es un homomorfismo sobreyectivo cuyo núcleo es $C_0(V)$. Luego podemos pensar los cerrados de X como los cocientes de $C_0(X)$.