1 Repaso

1. Repaso

2. Dualidad de Gelfand
   - Diccionario de la dualidad de Gelfand.
   - Subálgebras y elementos invertibles

1. Repaso

2. Dualidad de Gelfand
   - Diccionario de la dualidad de Gelfand.
   - Subálgebras y elementos invertibles

3. Cálculo funcional continuo

Repaso

Proposición

Repaso

Proposición

(a) *Si* $u \in \mathcal{U}(A) := \{v \in A : \ v \text{ es unitario}\}$, *entonces* $\sigma(u) \subset S^1$.

Repaso

Proposición

(a) *Si* $u \in \mathcal{U}(A) := \{v \in A : \; v \text{ es unitario}\}$, *entonces* $\sigma(u) \subset S^1$.

(b) *Si* $a \in A_{sa}$, *entonces* $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.

Repaso

Proposición

(a) *Si* $u \in \mathcal{U}(A) := \{v \in A : \ v \text{ es unitario}\}$, *entonces* $\sigma(u) \subset S^1$.

(b) *Si* $a \in A_{sa}$, *entonces* $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.

(c) *Si* $a \in A_{sa}$, *entonces* $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

Repaso

Proposición

(a) *Si* $u \in \mathcal{U}(A) := \{v \in A : \ v \text{ es unitario}\}$, *entonces* $\sigma(u) \subset S^1$.

(b) *Si* $a \in A_{sa}$, *entonces* $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.

(c) *Si* $a \in A_{sa}$, *entonces* $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

Repaso

Proposición

(a) *Si* $u \in \mathcal{U}(A) := \{v \in A : \ v \text{ es unitario}\}$*, entonces* $\sigma(u) \subset S^1$*.*

(b) *Si* $a \in A_{sa}$*, entonces* $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$*.*

(c) *Si* $a \in A_{sa}$*, entonces* $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$*.*

Demostración.

Repaso

Proposición

(a) *Si* $u \in \mathcal{U}(A) := \{v \in A : \ v \text{ es unitario}\}$, *entonces* $\sigma(u) \subset S^1$.

(b) *Si* $a \in A_{sa}$, *entonces* $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.

(c) *Si* $a \in A_{sa}$, *entonces* $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

Demostración.

(a) Como $\sigma(u) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \Rightarrow$

Repaso

Proposición

(a) *Si* $u \in \mathcal{U}(A) := \{v \in A : \ v \text{ es unitario}\}$, *entonces* $\sigma(u) \subset S^1$.

(b) *Si* $a \in A_{sa}$, *entonces* $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.

(c) *Si* $a \in A_{sa}$, *entonces* $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

Demostración.

(a) Como $\sigma(u) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \Rightarrow$

Repaso

Proposición

(a) *Si* $u \in \mathcal{U}(A) := \{v \in A : \ v \text{ es unitario}\}$, *entonces* $\sigma(u) \subset S^1$.

(b) *Si* $a \in A_{sa}$, *entonces* $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.

(c) *Si* $a \in A_{sa}$, *entonces* $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

Demostración.

(a) Como $\sigma(u) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \Rightarrow \sigma(u^{-1}) = \sigma(u^*) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) = S^1$.

(b) $(e^{ia})^* = e^{(ia)^*} = e^{-ia^*} = e^{-ia} = (e^{ia})^{-1}$, entonces $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.

Proposición

(a) *Si* $u \in \mathcal{U}(A) := \{v \in A : \ v \text{ es unitario}\}$, *entonces* $\sigma(u) \subset S^1$.

(b) *Si* $a \in A_{sa}$, *entonces* $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.

(c) *Si* $a \in A_{sa}$, *entonces* $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

Demostración.

(a) Como $\sigma(u) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \Rightarrow \sigma(u^{-1}) = \sigma(u^*) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) = S^1$.

(b) $(e^{ia})^* = e^{(ia)^*} = e^{-ia^*} = e^{-ia} = (e^{ia})^{-1}$, entonces $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.

(c) $e^{ia} - e^{i\lambda} = e^{i\lambda}(e^{i(a-\lambda)} - 1)$

Proposición

(a) *Si* $u \in \mathcal{U}(A) := \{v \in A : \ v \text{ es unitario}\}$*, entonces* $\sigma(u) \subset S^1$*.*

(b) *Si* $a \in A_{sa}$*, entonces* $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$*.*

(c) *Si* $a \in A_{sa}$*, entonces* $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$*.*

Demostración.

(a) Como $\sigma(u) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \Rightarrow \sigma(u^{-1}) = \sigma(u^*) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) = S^1$.

(b) $(e^{ia})^* = e^{(ia)^*} = e^{-ia^*} = e^{-ia} = (e^{ia})^{-1}$, entonces $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.

(c) $e^{ia} - e^{i\lambda} = e^{i\lambda}(e^{i(a-\lambda)} - 1)$

Repaso

Proposición

(a) *Si* $u \in \mathcal{U}(A) := \{v \in A : \ v \text{ es unitario}\}$*, entonces* $\sigma(u) \subset S^1$*.*

(b) *Si* $a \in A_{sa}$*, entonces* $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$*.*

(c) *Si* $a \in A_{sa}$*, entonces* $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$*.*

Demostración.

(a) Como $\sigma(u) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \Rightarrow \sigma(u^{-1}) = \sigma(u^*) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) = S^1$.

(b) $(e^{ia})^* = e^{(ia)^*} = e^{-ia^*} = e^{-ia} = (e^{ia})^{-1}$, entonces $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.

(c) $e^{ia} - e^{i\lambda} = e^{i\lambda}(e^{i(a-\lambda)} - 1) = e^{i\lambda}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i(a-\lambda))^n}{n!} - 1\right)$

Repaso

Proposición

(a) *Si* $u \in \mathcal{U}(A) := \{v \in A : \ v \text{ es unitario}\}$, *entonces* $\sigma(u) \subset S^1$.

(b) *Si* $a \in A_{sa}$, *entonces* $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.

(c) *Si* $a \in A_{sa}$, *entonces* $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

Demostración.

(a) Como $\sigma(u) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \Rightarrow \sigma(u^{-1}) = \sigma(u^*) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) = S^1$.

(b) $(e^{ia})^* = e^{(ia)^*} = e^{-ia^*} = e^{-ia} = (e^{ia})^{-1}$, entonces $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.

(c) $e^{ia} - e^{i\lambda} = e^{i\lambda}(e^{i(a-\lambda)} - 1) = e^{i\lambda}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i(a-\lambda))^n}{n!} - 1\right)$

$$= e^{i\lambda}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n(a-\lambda)^n}{n!}\right)$$

Proposición

(a) *Si* $u \in \mathcal{U}(A) := \{v \in A : \ v \text{ es unitario}\}$, *entonces* $\sigma(u) \subset S^1$.

(b) *Si* $a \in A_{sa}$, *entonces* $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.

(c) *Si* $a \in A_{sa}$, *entonces* $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

Demostración.

(a) Como $\sigma(u) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \Rightarrow \sigma(u^{-1}) = \sigma(u^*) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) = S^1$.

(b) $(e^{ia})^* = e^{(ia)^*} = e^{-ia^*} = e^{-ia} = (e^{ia})^{-1}$, entonces $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.

(c) $e^{ia} - e^{i\lambda} = e^{i\lambda}(e^{i(a-\lambda)} - 1) = e^{i\lambda}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i(a-\lambda))^n}{n!} - 1\right)$

$$= e^{i\lambda}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n(a-\lambda)^n}{n!}\right) = e^{i\lambda}(a-\lambda)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!}(a-\lambda)^{n-1}.$$

Repaso

Proposición

(a) *Si* $u \in \mathcal{U}(A) := \{v \in A : \ v \text{ es unitario}\}$, *entonces* $\sigma(u) \subset S^1$.

(b) *Si* $a \in A_{sa}$, *entonces* $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.

(c) *Si* $a \in A_{sa}$, *entonces* $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

Demostración.

(a) Como $\sigma(u) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \Rightarrow \sigma(u^{-1}) = \sigma(u^*) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) = S^1$.

(b) $(e^{ia})^* = e^{(ia)^*} = e^{-ia^*} = e^{-ia} = (e^{ia})^{-1}$, entonces $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.

(c) $e^{ia} - e^{i\lambda} = e^{i\lambda}(e^{i(a-\lambda)} - 1) = e^{i\lambda}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i(a-\lambda))^n}{n!} - 1\right)$

$$= e^{i\lambda}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n(a-\lambda)^n}{n!}\right) = e^{i\lambda}(a-\lambda)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!}(a-\lambda)^{n-1}.$$

Entonces si $\lambda \in \sigma(a)$ se tiene $e^{i\lambda} \in \sigma(e^{ia}) \subseteq S^1$, y por lo tanto $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

Proposición

Sean A una C^*-álgebra y $h : A \to \mathbb{C}$ un homomorfismo de álgebras, entonces $h(a^*) = \overline{h(a)}$, para todo $a \in A$.

Proposición

Sean A una C^*-álgebra y $h : A \to \mathbb{C}$ un homomorfismo de álgebras, entonces $h(a^*) = \overline{h(a)}$, para todo $a \in A$.

Demostración.

Si $a \in A_{sa}$, es $h(a) \in \sigma(a) \subset \mathbb{R}$. Ahora si $b = x + iy$, donde $x, y \in A_{sa}$:

$h(b^*) = h(x^*) - ih(y^*)$

Proposición

Sean A una C^*-álgebra y $h : A \to \mathbb{C}$ un homomorfismo de álgebras, entonces $h(a^*) = \overline{h(a)}$, para todo $a \in A$.

Demostración.

Si $a \in A_{sa}$, es $h(a) \in \sigma(a) \subset \mathbb{R}$. Ahora si $b = x + iy$, donde $x, y \in A_{sa}$:

$h(b^*) = h(x^*) - ih(y^*)$

Proposición

Sean A una C^*-álgebra y $h : A \to \mathbb{C}$ un homomorfismo de álgebras, entonces $h(a^*) = \overline{h(a)}$, para todo $a \in A$.

Demostración.

Si $a \in A_{sa}$, es $h(a) \in \sigma(a) \subset \mathbb{R}$. Ahora si $b = x + iy$, donde $x, y \in A_{sa}$:

$$h(b^*) = h(x^*) - ih(y^*) = h(x) - ih(y) = \overline{h(x)} - i\overline{h(y)}$$

Proposición

Sean A una C^*-álgebra y $h : A \to \mathbb{C}$ un homomorfismo de álgebras, entonces $h(a^*) = \overline{h(a)}$, para todo $a \in A$.

Demostración.

Si $a \in A_{sa}$, es $h(a) \in \sigma(a) \subset \mathbb{R}$. Ahora si $b = x + iy$, donde $x, y \in A_{sa}$:

$$\begin{aligned} h(b^*) = h(x^*) - ih(y^*) &= h(x) - ih(y) = \overline{h(x)} - i\overline{h(y)} \\ &= \overline{h(x) + ih(y)} = \overline{h(b)}. \end{aligned}$$

□

Proposición

Sean A una C^*-álgebra y $h : A \to \mathbb{C}$ un homomorfismo de álgebras, entonces $h(a^*) = \overline{h(a)}$, para todo $a \in A$.

Demostración.

Si $a \in A_{sa}$, es $h(a) \in \sigma(a) \subset \mathbb{R}$. Ahora si $b = x + iy$, donde $x, y \in A_{sa}$:

$$\begin{aligned} h(b^*) = h(x^*) - ih(y^*) = h(x) - ih(y) &= \overline{h(x)} - i\overline{h(y)} \\ = \overline{h(x) + ih(y)} &= \overline{h(b)}. \end{aligned}$$

□

Corolario

Supongamos que $\phi : A \to C_0(X)$ es un homomorfismo de álgebras de Banach. Entonces ϕ es un homomorfismo de C^*-álgebras.

Proposición

Sean A una C^*-álgebra y $h : A \to \mathbb{C}$ un homomorfismo de álgebras, entonces $h(a^*) = \overline{h(a)}$, para todo $a \in A$.

Demostración.

Si $a \in A_{sa}$, es $h(a) \in \sigma(a) \subset \mathbb{R}$. Ahora si $b = x + iy$, donde $x, y \in A_{sa}$:

$$\begin{aligned} h(b^*) = h(x^*) - ih(y^*) = \underline{h(x) - ih(y)} &= \overline{h(x)} - i\,\overline{h(y)} \\ = \overline{h(x) + ih(y)} &= \overline{h(b)}. \end{aligned}$$

□

Corolario

Supongamos que $\phi : A \to C_0(X)$ es un homomorfismo de álgebras de Banach. Entonces ϕ es un homomorfismo de C^*-álgebras.

Demostración.

Si $x \in X$ y $\delta_x : C_0(X) \to \mathbb{C}$ es la evaluación en x, entonces $\delta_x \circ \phi \in \hat{A}$,

Proposición

Sean A una C^*-álgebra y $h : A \to \mathbb{C}$ un homomorfismo de álgebras, entonces $h(a^*) = \overline{h(a)}$, para todo $a \in A$.

Demostración.

Si $a \in A_{sa}$, es $h(a) \in \sigma(a) \subset \mathbb{R}$. Ahora si $b = x + iy$, donde $x, y \in A_{sa}$:

$$\begin{aligned} h(b^*) = h(x^*) - ih(y^*) = \underline{h(x) - ih(y)} &= \overline{h(x)} - i\overline{h(y)} \\ = \overline{h(x) + ih(y)} &= \overline{h(b)}. \end{aligned}$$

□

Corolario

Supongamos que $\phi : A \to C_0(X)$ es un homomorfismo de álgebras de Banach. Entonces ϕ es un homomorfismo de C^*-álgebras.

Demostración.

Si $x \in X$ y $\delta_x : C_0(X) \to \mathbb{C}$ es la evaluación en x, entonces $\delta_x \circ \phi \in \hat{A}$,

Proposición

Sean A una C^*-álgebra y $h : A \to \mathbb{C}$ un homomorfismo de álgebras, entonces $h(a^*) = \overline{h(a)}$, para todo $a \in A$.

Demostración.

Si $a \in A_{sa}$, es $h(a) \in \sigma(a) \subset \mathbb{R}$. Ahora si $b = x + iy$, donde $x, y \in A_{sa}$:

$$\begin{aligned} h(b^*) = h(x^*) - ih(y^*) &= \underline{h(x) - ih(y)} = \overline{h(x)} - i\overline{h(y)} \\ &= \overline{h(x) + ih(y)} = \overline{h(b)}. \end{aligned}$$

□

Corolario

Supongamos que $\phi : A \to C_0(X)$ es un homomorfismo de álgebras de Banach. Entonces ϕ es un homomorfismo de C^*-álgebras.

Demostración.

Si $x \in X$ y $\delta_x : C_0(X) \to \mathbb{C}$ es la evaluación en x, entonces $\delta_x \circ \phi \in \hat{A}$, y por lo tanto $\delta_x \circ \phi(a^*) = \overline{\delta_x \circ \phi(a)}$;

Proposición

Sean A una C^*-álgebra y $h : A \to \mathbb{C}$ un homomorfismo de álgebras, entonces $h(a^*) = \overline{h(a)}$, para todo $a \in A$.

Demostración.

Si $a \in A_{sa}$, es $h(a) \in \sigma(a) \subset \mathbb{R}$. Ahora si $b = x + iy$, donde $x, y \in A_{sa}$:

$$\begin{aligned} h(b^*) = h(x^*) - ih(y^*) = \underline{h(x) - ih(y)} &= \overline{h(x)} - i\overline{h(y)} \\ = \overline{h(x) + ih(y)} &= \overline{h(b)}. \end{aligned}$$

□

Corolario

Supongamos que $\phi : A \to C_0(X)$ es un homomorfismo de álgebras de Banach. Entonces ϕ es un homomorfismo de C^*-álgebras.

Demostración.

Si $x \in X$ y $\delta_x : C_0(X) \to \mathbb{C}$ es la evaluación en x, entonces $\delta_x \circ \phi \in \hat{A}$, y por lo tanto $\delta_x \circ \phi(a^*) = \overline{\delta_x \circ \phi(a)}$; es decir que $\phi(a^*) = \overline{\phi(a)}$. □

Teorema (Gelfand-Naimark, 1943)

Sea A una C^*-álgebra conmutativa. Entonces la transformada de Gelfand $\mathcal{G} : A \to C_0(\hat{A}\,)$ es un isomorfismo de C^*-álgebras.

Teorema (Gelfand-Naimark, 1943)

Sea A una C^*-álgebra conmutativa. Entonces la transformada de Gelfand $\mathcal{G} : A \to C_0(\hat{A}\,)$ es un isomorfismo de C^*-álgebras.

Demostración.

Ya sabemos que $\mathcal{G}$ es un homomorfismo continuo de álgebras,

Teorema (Gelfand-Naimark, 1943)

Sea A una C^*-álgebra conmutativa. Entonces la transformada de Gelfand $\mathcal{G} : A \to C_0(\hat{A}\,)$ es un isomorfismo de C^*-álgebras.

Demostración.

Ya sabemos que $\mathcal{G}$ es un homomorfismo continuo de álgebras,

Teorema (Gelfand-Naimark, 1943)

Sea A una C^*-álgebra conmutativa. Entonces la transformada de Gelfand $\mathcal{G} : A \to C_0(\hat{A}\,)$ es un isomorfismo de C^*-álgebras.

Demostración.

Ya sabemos que $\mathcal{G}$ es un homomorfismo continuo de álgebras, tal que $\mathcal{G}(A)$ separa puntos de $\hat{A}$ y $\mathcal{G}$ no se anula en $\hat{A}$,

Teorema (Gelfand-Naimark, 1943)

Sea A una C^*-álgebra conmutativa. Entonces la transformada de Gelfand $\mathcal{G} : A \to C_0(\hat{A}\,)$ es un isomorfismo de C^*-álgebras.

Demostración.

Ya sabemos que $\mathcal{G}$ es un homomorfismo continuo de álgebras, tal que $\mathcal{G}(A)$ separa puntos de $\hat{A}$ y $\mathcal{G}$ no se anula en $\hat{A}$, y que $\|\hat{a}\|_\infty = r(a)$.

Teorema (Gelfand-Naimark, 1943)

Sea A una C^*-álgebra conmutativa. Entonces la transformada de Gelfand $\mathcal{G} : A \to C_0(\hat{A}\,)$ es un isomorfismo de C^*-álgebras.

Demostración.

Ya sabemos que $\mathcal{G}$ es un homomorfismo continuo de álgebras, tal que $\mathcal{G}(A)$ separa puntos de $\hat{A}$ y $\mathcal{G}$ no se anula en $\hat{A}$, y que $\|\hat{a}\|_\infty = r(a)$.
Veamos que $\mathcal{G}$ es un homomorfismo de $*$-álgebras: si $a \in A$, $h \in \hat{A}$:

Teorema (Gelfand-Naimark, 1943)

Sea A una C^*-álgebra conmutativa. Entonces la transformada de Gelfand $\mathcal{G} : A \to C_0(\hat{A}\,)$ es un isomorfismo de C^*-álgebras.

Demostración.

Ya sabemos que $\mathcal{G}$ es un homomorfismo continuo de álgebras, tal que $\mathcal{G}(A)$ separa puntos de $\hat{A}$ y $\mathcal{G}$ no se anula en $\hat{A}$, y que $\|\hat{a}\|_\infty = r(a)$. Veamos que $\mathcal{G}$ es un homomorfismo de $*$-álgebras: si $a \in A$, $h \in \hat{A}$:

$$\mathcal{G}(a^*)(h) = h(a^*) = \overline{h(a)}$$

Teorema (Gelfand-Naimark, 1943)

Sea A una C^*-álgebra conmutativa. Entonces la transformada de Gelfand $\mathcal{G} : A \to C_0(\hat{A}\,)$ es un isomorfismo de C^*-álgebras.

Demostración.

Ya sabemos que $\mathcal{G}$ es un homomorfismo continuo de álgebras, tal que $\mathcal{G}(A)$ separa puntos de $\hat{A}$ y $\mathcal{G}$ no se anula en $\hat{A}$, y que $\|\hat{a}\|_\infty = r(a)$.
Veamos que $\mathcal{G}$ es un homomorfismo de $*$-álgebras: si $a \in A$, $h \in \hat{A}$:

$$\mathcal{G}(a^*)(h) = h(a^*) = \overline{h(a)} = \overline{\mathcal{G}(a)(h)}$$

Teorema (Gelfand-Naimark, 1943)

Sea A una C^*-álgebra conmutativa. Entonces la transformada de Gelfand $\mathcal{G} : A \to C_0(\hat{A}\,)$ es un isomorfismo de C^*-álgebras.

Demostración.

Ya sabemos que $\mathcal{G}$ es un homomorfismo continuo de álgebras, tal que $\mathcal{G}(A)$ separa puntos de $\hat{A}$ y $\mathcal{G}$ no se anula en $\hat{A}$, y que $\|\hat{a}\|_\infty = r(a)$.
Veamos que $\mathcal{G}$ es un homomorfismo de $*$-álgebras: si $a \in A$, $h \in \hat{A}$:

$$\mathcal{G}(a^*)(h) = h(a^*) = \overline{h(a)} = \overline{\mathcal{G}(a)(h)} = \overline{\mathcal{G}(a)}(h).$$

Teorema (Gelfand-Naimark, 1943)

Sea A una C^*-álgebra conmutativa. Entonces la transformada de Gelfand $\mathcal{G} : A \to C_0(\hat{A}\,)$ es un isomorfismo de C^*-álgebras.

Demostración.

Ya sabemos que $\mathcal{G}$ es un homomorfismo continuo de álgebras, tal que $\mathcal{G}(A)$ separa puntos de $\hat{A}$ y $\mathcal{G}$ no se anula en $\hat{A}$, y que $\|\hat{a}\|_\infty = r(a)$. Veamos que $\mathcal{G}$ es un homomorfismo de $*$-álgebras: si $a \in A$, $h \in \hat{A}$:

$$\mathcal{G}(a^*)(h) = h(a^*) = \overline{h(a)} = \overline{\mathcal{G}(a)(h)} = \overline{\mathcal{G}(a)}(h).$$

Entonces $\mathcal{G}(a^*) = \overline{\mathcal{G}(a)}$, de modo que $\mathcal{G}(A)$ es una subálgebra autoadjunta, que separa puntos y no se anula en $\hat{A}$.

Teorema (Gelfand-Naimark, 1943)

Sea A una C^*-álgebra conmutativa. Entonces la transformada de Gelfand $\mathcal{G} : A \to C_0(\hat{A}\,)$ es un isomorfismo de C^*-álgebras.

Demostración.

Ya sabemos que $\mathcal{G}$ es un homomorfismo continuo de álgebras, tal que $\mathcal{G}(A)$ separa puntos de $\hat{A}$ y $\mathcal{G}$ no se anula en $\hat{A}$, y que $\|\hat{a}\|_\infty = r(a)$. Veamos que $\mathcal{G}$ es un homomorfismo de $*$-álgebras: si $a \in A$, $h \in \hat{A}$:

$$\mathcal{G}(a^*)(h) = h(a^*) = \overline{h(a)} = \overline{\mathcal{G}(a)(h)} = \overline{\mathcal{G}(a)}(h).$$

Entonces $\mathcal{G}(a^*) = \overline{\mathcal{G}(a)}$, de modo que $\mathcal{G}(A)$ es una subálgebra autoadjunta, que separa puntos y no se anula en $\hat{A}$. Entonces $\overline{\mathcal{G}(A)} = C_0(\hat{A}\,)$ por el Teorema de Stone-Weierstrass.

Teorema (Gelfand-Naimark, 1943)

Sea A una C^*-álgebra conmutativa. Entonces la transformada de Gelfand $\mathcal{G} : A \to C_0(\hat{A}\,)$ es un isomorfismo de C^*-álgebras.

Demostración.

Ya sabemos que $\mathcal{G}$ es un homomorfismo continuo de álgebras, tal que $\mathcal{G}(A)$ separa puntos de $\hat{A}$ y $\mathcal{G}$ no se anula en $\hat{A}$, y que $\|\hat{a}\|_\infty = r(a)$. Veamos que $\mathcal{G}$ es un homomorfismo de $*$-álgebras: si $a \in A$, $h \in \hat{A}$:

$$\mathcal{G}(a^*)(h) = h(a^*) = \overline{h(a)} = \overline{\mathcal{G}(a)(h)} = \overline{\mathcal{G}(a)}(h).$$

Entonces $\mathcal{G}(a^*) = \overline{\mathcal{G}(a)}$, de modo que $\mathcal{G}(A)$ es una subálgebra autoadjunta, que separa puntos y no se anula en $\hat{A}$. Entonces $\overline{\mathcal{G}(A)} = C_0(\hat{A}\,)$ por el Teorema de Stone-Weierstrass. Además $\mathcal{G}$ es una isometría:

Teorema (Gelfand-Naimark, 1943)

Sea A una C^*-álgebra conmutativa. Entonces la transformada de Gelfand $\mathcal{G} : A \to C_0(\hat{A}\,)$ es un isomorfismo de C^*-álgebras.

Demostración.

Ya sabemos que $\mathcal{G}$ es un homomorfismo continuo de álgebras, tal que $\mathcal{G}(A)$ separa puntos de $\hat{A}$ y $\mathcal{G}$ no se anula en $\hat{A}$, y que $\|\hat{a}\|_\infty = r(a)$. Veamos que $\mathcal{G}$ es un homomorfismo de $*$-álgebras: si $a \in A$, $h \in \hat{A}$:

$$\mathcal{G}(a^*)(h) = h(a^*) = \overline{h(a)} = \overline{\mathcal{G}(a)(h)} = \overline{\mathcal{G}(a)}(h).$$

Entonces $\mathcal{G}(a^*) = \overline{\mathcal{G}(a)}$, de modo que $\mathcal{G}(A)$ es una subálgebra autoadjunta, que separa puntos y no se anula en $\hat{A}$. Entonces $\overline{\mathcal{G}(A)} = C_0(\hat{A}\,)$ por el Teorema de Stone-Weierstrass. Además $\mathcal{G}$ es una isometría:

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| = r(a^*a)$$

Teorema (Gelfand-Naimark, 1943)

Sea A una C^*-álgebra conmutativa. Entonces la transformada de Gelfand $\mathcal{G} : A \to C_0(\hat{A}\,)$ es un isomorfismo de C^*-álgebras.

Demostración.

Ya sabemos que $\mathcal{G}$ es un homomorfismo continuo de álgebras, tal que $\mathcal{G}(A)$ separa puntos de $\hat{A}$ y $\mathcal{G}$ no se anula en $\hat{A}$, y que $\|\hat{a}\|_\infty = r(a)$. Veamos que $\mathcal{G}$ es un homomorfismo de $*$-álgebras: si $a \in A$, $h \in \hat{A}$:

$$\mathcal{G}(a^*)(h) = h(a^*) = \overline{h(a)} = \overline{\mathcal{G}(a)(h)} = \overline{\mathcal{G}(a)}(h).$$

Entonces $\mathcal{G}(a^*) = \overline{\mathcal{G}(a)}$, de modo que $\mathcal{G}(A)$ es una subálgebra autoadjunta, que separa puntos y no se anula en $\hat{A}$. Entonces $\overline{\mathcal{G}(A)} = C_0(\hat{A}\,)$ por el Teorema de Stone-Weierstrass. Además $\mathcal{G}$ es una isometría:

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| = r(a^*a) = \|\widehat{a^*a}\|_\infty$$

Teorema (Gelfand-Naimark, 1943)

Sea A una C^*-álgebra conmutativa. Entonces la transformada de Gelfand $\mathcal{G} : A \to C_0(\hat{A}\,)$ es un isomorfismo de C^*-álgebras.

Demostración.

Ya sabemos que $\mathcal{G}$ es un homomorfismo continuo de álgebras, tal que $\mathcal{G}(A)$ separa puntos de $\hat{A}$ y $\mathcal{G}$ no se anula en $\hat{A}$, y que $\|\hat{a}\|_\infty = r(a)$. Veamos que $\mathcal{G}$ es un homomorfismo de $*$-álgebras: si $a \in A$, $h \in \hat{A}$:

$$\mathcal{G}(a^*)(h) = h(a^*) = \overline{h(a)} = \overline{\mathcal{G}(a)(h)} = \overline{\mathcal{G}(a)}(h).$$

Entonces $\mathcal{G}(a^*) = \overline{\mathcal{G}(a)}$, de modo que $\mathcal{G}(A)$ es una subálgebra autoadjunta, que separa puntos y no se anula en $\hat{A}$. Entonces $\overline{\mathcal{G}(A)} = C_0(\hat{A}\,)$ por el Teorema de Stone-Weierstrass. Además $\mathcal{G}$ es una isometría:

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| = r(a^*a) = \|\widehat{a^*a}\|_\infty = \|\,\hat{a}^*\hat{a}\,\|_\infty$$

Teorema (Gelfand-Naimark, 1943)

Sea A una C^*-álgebra conmutativa. Entonces la transformada de Gelfand $\mathcal{G} : A \to C_0(\hat{A})$ es un isomorfismo de C^*-álgebras.

Demostración.

Ya sabemos que $\mathcal{G}$ es un homomorfismo continuo de álgebras, tal que $\mathcal{G}(A)$ separa puntos de $\hat{A}$ y $\mathcal{G}$ no se anula en $\hat{A}$, y que $\|\hat{a}\|_\infty = r(a)$. Veamos que $\mathcal{G}$ es un homomorfismo de $*$-álgebras: si $a \in A$, $h \in \hat{A}$:

$$\mathcal{G}(a^*)(h) = h(a^*) = \overline{h(a)} = \overline{\mathcal{G}(a)(h)} = \overline{\mathcal{G}(a)}(h).$$

Entonces $\mathcal{G}(a^*) = \overline{\mathcal{G}(a)}$, de modo que $\mathcal{G}(A)$ es una subálgebra autoadjunta, que separa puntos y no se anula en $\hat{A}$. Entonces $\overline{\mathcal{G}(A)} = C_0(\hat{A})$ por el Teorema de Stone-Weierstrass. Además $\mathcal{G}$ es una isometría:

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| = r(a^*a) = \|\widehat{a^*a}\|_\infty = \|\hat{a^*}\hat{a}\|_\infty = \|\overline{\hat{a}},\hat{a}\|_\infty$$

Teorema (Gelfand-Naimark, 1943)

Sea A una C^*-álgebra conmutativa. Entonces la transformada de Gelfand $\mathcal{G} : A \to C_0(\hat{A}\,)$ es un isomorfismo de C^*-álgebras.

Demostración.

Ya sabemos que $\mathcal{G}$ es un homomorfismo continuo de álgebras, tal que $\mathcal{G}(A)$ separa puntos de $\hat{A}$ y $\mathcal{G}$ no se anula en $\hat{A}$, y que $\|\hat{a}\|_\infty = r(a)$. Veamos que $\mathcal{G}$ es un homomorfismo de $*$-álgebras: si $a \in A$, $h \in \hat{A}$:

$$\mathcal{G}(a^*)(h) = h(a^*) = \overline{h(a)} = \overline{\mathcal{G}(a)(h)} = \overline{\mathcal{G}(a)}(h).$$

Entonces $\mathcal{G}(a^*) = \overline{\mathcal{G}(a)}$, de modo que $\mathcal{G}(A)$ es una subálgebra autoadjunta, que separa puntos y no se anula en $\hat{A}$. Entonces $\overline{\mathcal{G}(A)} = C_0(\hat{A}\,)$ por el Teorema de Stone-Weierstrass. Además $\mathcal{G}$ es una isometría:

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| = r(a^*a) = \|\widehat{a^*a}\|_\infty = \|\,\hat{a^*}\hat{a}\,\|_\infty = \|\overline{\hat{a}},\hat{a}\,\|_\infty = \|\hat{a}\,\|_\infty^2.$$

Teorema (Gelfand-Naimark, 1943)

Sea A una C^*-álgebra conmutativa. Entonces la transformada de Gelfand $\mathcal{G} : A \to C_0(\hat{A}\,)$ es un isomorfismo de C^*-álgebras.

Demostración.

Ya sabemos que $\mathcal{G}$ es un homomorfismo continuo de álgebras, tal que $\mathcal{G}(A)$ separa puntos de $\hat{A}$ y $\mathcal{G}$ no se anula en $\hat{A}$, y que $\|\hat{a}\|_\infty = r(a)$. Veamos que $\mathcal{G}$ es un homomorfismo de $*$-álgebras: si $a \in A$, $h \in \hat{A}$:

$$\mathcal{G}(a^*)(h) = h(a^*) = \overline{h(a)} = \overline{\mathcal{G}(a)(h)} = \overline{\mathcal{G}(a)}(h).$$

Entonces $\mathcal{G}(a^*) = \overline{\mathcal{G}(a)}$, de modo que $\mathcal{G}(A)$ es una subálgebra autoadjunta, que separa puntos y no se anula en $\hat{A}$. Entonces $\overline{\mathcal{G}(A)} = C_0(\hat{A}\,)$ por el Teorema de Stone-Weierstrass. Además $\mathcal{G}$ es una isometría:

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| = r(a^*a) = \|\widehat{a^*a}\|_\infty = \|\,\hat{a}^*\hat{a}\,\|_\infty = \|\overline{\hat{a}},\hat{a}\,\|_\infty = \|\hat{a}\,\|_\infty^2.$$

Por lo tanto $\mathcal{G}$ es inyectiva, y $\mathcal{G}(A)$ es cerrada.

Teorema (Gelfand-Naimark, 1943)

Sea A una C^*-álgebra conmutativa. Entonces la transformada de Gelfand $\mathcal{G} : A \to C_0(\hat{A}\,)$ es un isomorfismo de C^*-álgebras.

Demostración.

Ya sabemos que $\mathcal{G}$ es un homomorfismo continuo de álgebras, tal que $\mathcal{G}(A)$ separa puntos de $\hat{A}$ y $\mathcal{G}$ no se anula en $\hat{A}$, y que $\|\hat{a}\|_\infty = r(a)$. Veamos que $\mathcal{G}$ es un homomorfismo de $*$-álgebras: si $a \in A$, $h \in \hat{A}$:

$$\mathcal{G}(a^*)(h) = h(a^*) = \overline{h(a)} = \overline{\mathcal{G}(a)(h)} = \overline{\mathcal{G}(a)}(h).$$

Entonces $\mathcal{G}(a^*) = \overline{\mathcal{G}(a)}$, de modo que $\mathcal{G}(A)$ es una subálgebra autoadjunta, que separa puntos y no se anula en $\hat{A}$. Entonces $\overline{\mathcal{G}(A)} = C_0(\hat{A}\,)$ por el Teorema de Stone-Weierstrass. Además $\mathcal{G}$ es una isometría:

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| = r(a^*a) = \|\widehat{a^*a}\|_\infty = \|\,\hat{a^*}\hat{a}\,\|_\infty = \|\overline{\hat{a}}\hat{a}\,\|_\infty = \|\hat{a}\,\|_\infty^2.$$

Por lo tanto $\mathcal{G}$ es inyectiva, y $\mathcal{G}(A)$ es cerrada. Pero como también $\mathcal{G}(A)$ es densa en $C_0(\hat{A}\,)$, se concluye que $\mathcal{G}$ es un isomorfismo. □

Proposición (Segal, 1949)

Si $\phi : A \to B$ es un hm inyectivo de C^*-álgebras, entonces ϕ es isométrico.

Demostración.

Proposición (Segal, 1949)

Si $\phi : A \to B$ es un hm inyectivo de C^*-álgebras, entonces ϕ es isométrico.

Demostración.

Proposición (Segal, 1949)

Si $\phi : A \to B$ es un hm inyectivo de C^*-álgebras, entonces ϕ es isométrico.

Demostración.

Proposición (Segal, 1949)

Si $\phi : A \to B$ es un hm inyectivo de C^*-álgebras, entonces ϕ es isométrico.

Demostración. Se puede suponer A y B unitales, y $\phi(1) = 1$. Como $\|\phi(x)\|^2 = \|\phi(x^*x)\|$ y x^*x es autoadjunto, basta probar que $\phi|_{A_{sa}}$ es isométrico.

Proposición (Segal, 1949)

Si $\phi : A \to B$ es un hm inyectivo de C^*-álgebras, entonces ϕ es isométrico.

Demostración. Se puede suponer A y B unitales, y $\phi(1) = 1$. Como $\|\phi(x)\|^2 = \|\phi(x^*x)\|$ y x^*x es autoadjunto, basta probar que $\phi|_{A_{sa}}$ es isométrico. Sean $a \in A_{sa}$ y $b := \phi(a)$ ($\Rightarrow \phi(a) \in B_{sa}$).

Proposición (Segal, 1949)

Si $\phi : A \to B$ es un hm inyectivo de C^*-álgebras, entonces ϕ es isométrico.

Demostración. Se puede suponer A y B unitales, y $\phi(1) = 1$. Como $\|\phi(x)\|^2 = \|\phi(x^*x)\|$ y x^*x es autoadjunto, basta probar que $\phi|_{A_{sa}}$ es isométrico. Sean $a \in A_{sa}$ y $b := \phi(a)$ ($\Rightarrow \phi(a) \in B_{sa}$). Entonces $\phi(C^*(1,a)) \subseteq C^*(1,b)$, y tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

Proposición (Segal, 1949)

Si $\phi : A \to B$ es un hm inyectivo de C^*-álgebras, entonces ϕ es isométrico.

Demostración. Se puede suponer A y B unitales, y $\phi(1) = 1$. Como $\|\phi(x)\|^2 = \|\phi(x^*x)\|$ y x^*x es autoadjunto, basta probar que $\phi|_{A_{sa}}$ es isométrico. Sean $a \in A_{sa}$ y $b := \phi(a)$ ($\Rightarrow \phi(a) \in B_{sa}$). Entonces $\phi(C^*(1,a)) \subseteq C^*(1,b)$, y tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} C^*(1,a) \arrow[r, "\mathcal{G}_A", "\cong"'] \arrow[d, "\phi"'] & C_0(\widehat{C^*(1,a)}) \arrow[d, "(\hat{\phi})_*"] \\ C^*(1,b) \arrow[r, "\cong", "\mathcal{G}_B"'] & C_0(\widehat{C^*(1,b)}) \end{tikzcd} \tag{1}$$

Proposición (Segal, 1949)

Si $\phi : A \to B$ es un hm inyectivo de C^*-álgebras, entonces ϕ es isométrico.

Demostración. Se puede suponer A y B unitales, y $\phi(1) = 1$. Como $\|\phi(x)\|^2 = \|\phi(x^*x)\|$ y x^*x es autoadjunto, basta probar que $\phi|_{A_{sa}}$ es isométrico. Sean $a \in A_{sa}$ y $b := \phi(a)$ ($\Rightarrow \phi(a) \in B_{sa}$). Entonces $\phi(C^*(1,a)) \subseteq C^*(1,b)$, y tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} C^*(1,a) \arrow[r, "\mathcal{G}_A", "\cong"'] \arrow[d, "\phi"'] & C_0(\widehat{C^*(1,a)}) \arrow[d, "(\hat{\phi})_*"] \\ C^*(1,b) \arrow[r, "\cong", "\mathcal{G}_B"'] & C_0(\widehat{C^*(1,b)}) \end{tikzcd} \tag{1}$$

Como ϕ es inyectiva, $(\hat{\phi})_*$ también lo es. Si $\emptyset \neq V \subseteq \widehat{C^*(1,a)}$ abierto con $V \cap \hat{\phi}(\widehat{C^*(1,b)}) = \emptyset$,

Proposición (Segal, 1949)

Si $\phi : A \to B$ es un hm inyectivo de C^*-álgebras, entonces ϕ es isométrico.

Demostración. Se puede suponer A y B unitales, y $\phi(1) = 1$. Como $\|\phi(x)\|^2 = \|\phi(x^*x)\|$ y x^*x es autoadjunto, basta probar que $\phi|_{A_{sa}}$ es isométrico. Sean $a \in A_{sa}$ y $b := \phi(a)$ ($\Rightarrow \phi(a) \in B_{sa}$). Entonces $\phi(C^*(1,a)) \subseteq C^*(1,b)$, y tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} C^*(1,a) \arrow[r, "\mathcal{G}_A", "\cong"'] \arrow[d, "\phi"'] & C_0(\widehat{C^*(1,a)}) \arrow[d, "(\hat{\phi})_*"] \\ C^*(1,b) \arrow[r, "\cong", "\mathcal{G}_B"'] & C_0(\widehat{C^*(1,b)}) \end{tikzcd} \tag{1}$$

Como ϕ es inyectiva, $(\hat{\phi})_*$ también lo es. Si $\emptyset \neq V \subseteq \widehat{C^*(1,a)}$ abierto con $V \cap \hat{\phi}(\widehat{C^*(1,b)}) = \emptyset$, entonces existe $0 \neq c \in C(\widehat{C^*(1,a)})$ con $sop(c) \subseteq V$, y entonces $(\hat{\phi})_*(c) = c \circ \hat{\phi} = 0$,

Proposición (Segal, 1949)

Si $\phi : A \to B$ es un hm inyectivo de C^*-álgebras, entonces ϕ es isométrico.

Demostración. Se puede suponer A y B unitales, y $\phi(1) = 1$. Como $\|\phi(x)\|^2 = \|\phi(x^*x)\|$ y x^*x es autoadjunto, basta probar que $\phi|_{A_{sa}}$ es isométrico. Sean $a \in A_{sa}$ y $b := \phi(a)$ ($\Rightarrow \phi(a) \in B_{sa}$). Entonces $\phi(C^*(1,a)) \subseteq C^*(1,b)$, y tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} C^*(1,a) \arrow[r, "\mathcal{G}_A", "\cong"'] \arrow[d, "\phi"'] & C_0(\widehat{C^*(1,a)}) \arrow[d, "(\hat{\phi})_*"] \\ C^*(1,b) \arrow[r, "\cong", "\mathcal{G}_B"'] & C_0(\widehat{C^*(1,b)}) \end{tikzcd} \tag{1}$$

Como ϕ es inyectiva, $(\hat{\phi})_*$ también lo es. Si $\emptyset \neq V \subseteq \widehat{C^*(1,a)}$ abierto con $V \cap \hat{\phi}(\widehat{C^*(1,b)}) = \emptyset$, entonces existe $0 \neq c \in C(\widehat{C^*(1,a)})$ con $sop(c) \subseteq V$, y entonces $(\hat{\phi})_*(c) = c \circ \hat{\phi} = 0$, lo que contradice la inyectividad de $(\hat{\phi})_*$.

Proposición (Segal, 1949)

Si $\phi : A \to B$ es un hm inyectivo de C^*-álgebras, entonces ϕ es isométrico.

Demostración. Se puede suponer A y B unitales, y $\phi(1) = 1$. Como $\|\phi(x)\|^2 = \|\phi(x^*x)\|$ y x^*x es autoadjunto, basta probar que $\phi|_{A_{sa}}$ es isométrico. Sean $a \in A_{sa}$ y $b := \phi(a)$ ($\Rightarrow \phi(a) \in B_{sa}$). Entonces $\phi(C^*(1,a)) \subseteq C^*(1,b)$, y tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} C^*(1,a) \arrow[r, "\mathcal{G}_A", "\cong"'] \arrow[d, "\phi"'] & C_0(\widehat{C^*(1,a)}) \arrow[d, "(\hat{\phi})_*"] \\ C^*(1,b) \arrow[r, "\cong", "\mathcal{G}_B"'] & C_0(\widehat{C^*(1,b)}) \end{tikzcd} \qquad (1)$$

Como ϕ es inyectiva, $(\hat{\phi})_*$ también lo es. Si $\emptyset \neq V \subseteq \widehat{C^*(1,a)}$ abierto con $V \cap \hat{\phi}(\widehat{C^*(1,b)}) = \emptyset$, entonces existe $0 \neq c \in C(\widehat{C^*(1,a)})$ con $sop(c) \subseteq V$, y entonces $(\hat{\phi})_*(c) = c \circ \hat{\phi} = 0$, lo que contradice la inyectividad de $(\hat{\phi})_*$. Luego $\hat{\phi}(\widehat{C^*(1,b)})$ es denso en $\widehat{C^*(1,a)}$, y por lo tanto:

$$\|\phi(a)\| = \|\widehat{\phi(a)}\|$$

$$\|\phi(a)\| = \|\widehat{\phi(a)}\|$$

$$= \sup_{h \in \widehat{C^*(1,b)}} |(\hat{\phi})_*(\hat{a})(h)|$$

$$\|\phi(a)\| = \|\widehat{\phi(a)}\|$$

$$= \sup_{h\in\widehat{C^*(1,b)}} |(\hat{\phi})_*(\hat{a})(h)|$$

$$= \sup_{h\in\widehat{C^*(1,b)}} |\hat{a}(\hat{\phi}(h))|$$

$$\|\phi(a)\| = \|\widehat{\phi(a)}\|$$

$$= \sup_{h \in \widehat{C^*(1,b)}} |(\hat{\phi})_*(\hat{a})(h)|$$

$$= \sup_{h \in \widehat{C^*(1,b)}} |\hat{a}(\hat{\phi}(h))|$$

$$= \sup_{h' \in \hat{\phi}(\widehat{C^*(1,b)})} |\hat{a}(h')|$$

$$
\begin{aligned}
\|\phi(a)\| &= \|\widehat{\phi(a)}\| \\
&= \sup_{h\in\widehat{C^*(1,b)}} |(\hat{\phi})_*(\hat{a})(h)| \\
&= \sup_{h\in\widehat{C^*(1,b)}} |\hat{a}(\hat{\phi}(h))| \\
&= \sup_{h'\in\hat{\phi}(\widehat{C^*(1,b)})} |\hat{a}(h')| \\
&= \|\hat{a}\|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\phi(a)\| &= \|\widehat{\phi(a)}\| \\
&= \sup_{h \in \widehat{C^*(1,b)}} |(\hat{\phi})_*(\hat{a})(h)| \\
&= \sup_{h \in \widehat{C^*(1,b)}} |\hat{a}(\hat{\phi}(h))| \\
&= \sup_{h' \in \hat{\phi}(\widehat{C^*(1,b)})} |\hat{a}(h')| \\
&= \|\hat{a}\| \\
&= \|a\|.
\end{aligned}
$$

Dualidad de Gelfand.

Proposición

La transformada de Gelfand $\mathcal{G} : \mathrm{Id}_{\mathscr{C}_c^*} \to \mathrm{C}_0 \circ \widehat{\ }$ *es un isomorfismo de functores.*

Dualidad de Gelfand.

Proposición

La transformada de Gelfand $\mathcal{G} : \mathrm{Id}_{\mathscr{C}_c^*} \to \mathrm{C}_0 \circ \widehat{\ }$ *es un isomorfismo de functores.*

Demostración.

Sea $\phi : A \to B$ un homomorfismo no degenerado entre las C^*-álgebras conmutativas A y B. Como $\mathcal{G}$ es una transformación natural el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\mathcal{G}_A"', "\cong"] & B \arrow[d, "\cong"', "\mathcal{G}_B"] \\
C_0(\widehat{A}) \arrow[r, "(\hat{\phi})_*"'] & C_0(\widehat{B})
\end{tikzcd}$$

conmuta,

Dualidad de Gelfand.

Proposición

La transformada de Gelfand $\mathcal{G} : \mathrm{Id}_{\mathscr{C}_c^*} \to \mathrm{C}_0 \circ \widehat{\ }$ *es un isomorfismo de functores.*

Demostración.

Sea $\phi : A \to B$ un homomorfismo no degenerado entre las C^*-álgebras conmutativas A y B. Como $\mathcal{G}$ es una transformación natural el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\mathcal{G}_A"', "\cong"] & B \arrow[d, "\cong"', "\mathcal{G}_B"] \\ C_0(\widehat{A}) \arrow[r, "(\hat{\phi})_*"'] & C_0(\widehat{B}) \end{tikzcd}$$

conmuta,

Dualidad de Gelfand.

Proposición

La transformada de Gelfand $\mathcal{G} : \mathrm{Id}_{\mathscr{C}_c^*} \to \mathrm{C}_0 \circ \widehat{\ }$ *es un isomorfismo de functores.*

Demostración.

Sea $\phi : A \to B$ un homomorfismo no degenerado entre las C^*-álgebras conmutativas A y B. Como $\mathcal{G}$ es una transformación natural el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\mathcal{G}_A"', "\cong"] & B \arrow[d, "\mathcal{G}_B", "\cong"'] \\ C_0(\widehat{A}) \arrow[r, "(\hat{\phi})_*"'] & C_0(\widehat{B}) \end{tikzcd}$$

conmuta, y como por el Teorema de Gelfand-Naimark las flechas verticales son isomorfismos, entonces $\mathcal{G}$ es un isomorfismo. $\square$

Teorema

Los functores contravariantes $\mathrm{C}_0 : \mathscr{T}_{lch} \to \mathscr{C}^*_c$ *y* $\widehat{\ } : \mathscr{C}^*_c \to \mathscr{T}_{lch}$ *establecen una dualidad entre las categorías de* C^**-álgebras conmutativas y sus homomorfismos no degenerados y la categoría de espacios de Hausdorff localmente compactos y las funciones continuas propias.*

Teorema

Los functores contravariantes $\mathrm{C}_0 : \mathscr{T}_{lch} \to \mathscr{C}_c^*$ *y* $\widehat{\ } : \mathscr{C}_c^* \to \mathscr{T}_{lch}$ *establecen una dualidad entre las categorías de* C^**-álgebras conmutativas y sus homomorfismos no degenerados y la categoría de espacios de Hausdorff localmente compactos y las funciones continuas propias.*

Demostración.

Por la Proposición previa la transformada de Gelfand $\mathcal{G} : \mathrm{Id}_{\mathscr{C}_c^*} \to \mathrm{C}_0 \circ \widehat{\ }$ es un isomorfismo. Por otro lado, anteriormente se mostró que existe un isomorfismo $\delta : \mathrm{Id}_{\mathscr{T}_{lch}} \to \widehat{\ } \circ \mathrm{C}_0$. $\square$

Diccionario de la dualidad de Gelfand.

La dualidad entre las categorías $\mathscr{C}_c^*$ y $\mathscr{T}_{lch}$ permite establecer un diccionario entre conceptos topológicos y conceptos C^*-algebraicos:

Diccionario de la dualidad de Gelfand.

La dualidad entre las categorías $\mathscr{C}_c^*$ y $\mathscr{T}_{lch}$ permite establecer un diccionario entre conceptos topológicos y conceptos C^*-algebraicos:

Topología: X	**Álgebra: $\mathbf{A} = \mathbf{C_0}(\mathbf{X})$**
función propia	homomorfismo
homeomorfismo	automorfismo
compacto	unital
abierto	ideal
abierto denso	ideal esencial
cerrado	cociente
compactificación	unitización
αX	$\tilde{A}$
βX	$M(A)$
conexo	sin proyecciones no triviales
base numerable	separable
medida regular compleja	funcional lineal positiva

Definición

Si $K \subseteq \mathbb{C}$ es compacto, los agujeros de K son las componentes conexas acotadas de $\mathbb{C} \setminus K$.

Definición

Si $K \subseteq \mathbb{C}$ *es compacto, los agujeros de* K *son las componentes conexas acotadas de* $\mathbb{C} \setminus K$.

Teorema

Sean B *un álgebra de Banach con unidad y* A *una subálgebra de Banach de* B *tal que* $1_B \in A$. *Entonces*

Definición

Si $K \subseteq \mathbb{C}$ es compacto, los agujeros de K son las componentes conexas acotadas de $\mathbb{C} \setminus K$.

Teorema

Sean B un álgebra de Banach con unidad y A una subálgebra de Banach de B tal que $1_B \in A$. Entonces

(1) $\mathrm{Inv}(A)$ *es un subconjunto abierto y cerrado de* $A \cap \mathrm{Inv}(B)$.

Subálgebras y elementos invertibles

Definición

Si $K \subseteq \mathbb{C}$ *es compacto, los agujeros de* K *son las componentes conexas acotadas de* $\mathbb{C} \setminus K$.

Teorema

Sean B *un álgebra de Banach con unidad y* A *una subálgebra de Banach de* B *tal que* $1_B \in A$. *Entonces*

(1) $\mathrm{Inv}(A)$ *es un subconjunto abierto y cerrado de* $A \cap \mathrm{Inv}(B)$.

(2) *Si* $a \in A$ *entonces* $\sigma_B(a) \subseteq \sigma_A(a)$ *y* $\partial\sigma_A(a) \subseteq \partial\sigma_B(a)$.

Subálgebras y elementos invertibles

Definición

Si $K \subseteq \mathbb{C}$ *es compacto, los agujeros de* K *son las componentes conexas acotadas de* $\mathbb{C} \setminus K$.

Teorema

Sean B *un álgebra de Banach con unidad y* A *una subálgebra de Banach de* B *tal que* $1_B \in A$. *Entonces*

(1) $\mathrm{Inv}(A)$ *es un subconjunto abierto y cerrado de* $A \cap \mathrm{Inv}(B)$.

(2) *Si* $a \in A$ *entonces* $\sigma_B(a) \subseteq \sigma_A(a)$ *y* $\partial\sigma_A(a) \subseteq \partial\sigma_B(a)$.

(3) *Si* $a \in A$ *es tal que* $\sigma_B(a)$ *no tiene agujeros, entonces* $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

Subálgebras y elementos invertibles

Definición

Si $K \subseteq \mathbb{C}$ es compacto, los agujeros de K son las componentes conexas acotadas de $\mathbb{C} \setminus K$.

Teorema

Sean B un álgebra de Banach con unidad y A una subálgebra de Banach de B tal que $1_B \in A$. Entonces

(1) $\mathrm{Inv}(A)$ *es un subconjunto abierto y cerrado de* $A \cap \mathrm{Inv}(B)$.

(2) *Si $a \in A$ entonces $\sigma_B(a) \subseteq \sigma_A(a)$ y $\partial\sigma_A(a) \subseteq \partial\sigma_B(a)$.*

(3) *Si $a \in A$ es tal que $\sigma_B(a)$ no tiene agujeros, entonces $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.*

Subálgebras y elementos invertibles

Definición

Si $K \subseteq \mathbb{C}$ *es compacto, los agujeros de* K *son las componentes conexas acotadas de* $\mathbb{C} \setminus K$*.*

Teorema

Sean B *un álgebra de Banach con unidad y* A *una subálgebra de Banach de* B *tal que* $1_B \in A$*. Entonces*

(1) $\mathrm{Inv}(A)$ *es un subconjunto abierto y cerrado de* $A \cap \mathrm{Inv}(B)$*.*

(2) *Si* $a \in A$ *entonces* $\sigma_B(a) \subseteq \sigma_A(a)$ *y* $\partial\sigma_A(a) \subseteq \partial\sigma_B(a)$*.*

(3) *Si* $a \in A$ *es tal que* $\sigma_B(a)$ *no tiene agujeros, entonces* $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$*.*

Demostración.

Subálgebras y elementos invertibles

Definición

Si $K \subseteq \mathbb{C}$ es compacto, los agujeros de K son las componentes conexas acotadas de $\mathbb{C} \setminus K$.

Teorema

Sean B un álgebra de Banach con unidad y A una subálgebra de Banach de B tal que $1_B \in A$. Entonces

(1) $\mathrm{Inv}(A)$ *es un subconjunto abierto y cerrado de* $A \cap \mathrm{Inv}(B)$.

(2) *Si $a \in A$ entonces $\sigma_B(a) \subseteq \sigma_A(a)$ y $\partial\sigma_A(a) \subseteq \partial\sigma_B(a)$.*

(3) *Si $a \in A$ es tal que $\sigma_B(a)$ no tiene agujeros, entonces $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.*

Demostración.

Definición

Si $K \subseteq \mathbb{C}$ es compacto, los agujeros de K son las componentes conexas acotadas de $\mathbb{C} \setminus K$.

Teorema

Sean B un álgebra de Banach con unidad y A una subálgebra de Banach de B tal que $1_B \in A$. Entonces

(1) $\operatorname{Inv}(A)$ *es un subconjunto abierto y cerrado de* $A \cap \operatorname{Inv}(B)$.

(2) *Si $a \in A$ entonces $\sigma_B(a) \subseteq \sigma_A(a)$ y $\partial\sigma_A(a) \subseteq \partial\sigma_B(a)$.*

(3) *Si $a \in A$ es tal que $\sigma_B(a)$ no tiene agujeros, entonces $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.*

Demostración.

(1) Es claro que $\operatorname{Inv}(A)$ es abierto en $A \cap \operatorname{Inv}(B)$. Sea $(a_n) \subseteq \operatorname{Inv}(A)$ tal que $a_n \to b \in \operatorname{Inv}(B)$

Subálgebras y elementos invertibles

Definición

Si $K \subseteq \mathbb{C}$ es compacto, los agujeros de K son las componentes conexas acotadas de $\mathbb{C} \setminus K$.

Teorema

Sean B un álgebra de Banach con unidad y A una subálgebra de Banach de B tal que $1_B \in A$. Entonces

(1) $\mathrm{Inv}(A)$ *es un subconjunto abierto y cerrado de* $A \cap \mathrm{Inv}(B)$.

(2) *Si* $a \in A$ *entonces* $\sigma_B(a) \subseteq \sigma_A(a)$ *y* $\partial\sigma_A(a) \subseteq \partial\sigma_B(a)$.

(3) *Si* $a \in A$ *es tal que* $\sigma_B(a)$ *no tiene agujeros, entonces* $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

Demostración.

(1) Es claro que $\mathrm{Inv}(A)$ es abierto en $A \cap \mathrm{Inv}(B)$. Sea $(a_n) \subseteq \mathrm{Inv}(A)$ tal que $a_n \to b \in \mathrm{Inv}(B)$

Subálgebras y elementos invertibles

Definición

Si $K \subseteq \mathbb{C}$ es compacto, los agujeros de K son las componentes conexas acotadas de $\mathbb{C} \setminus K$.

Teorema

Sean B un álgebra de Banach con unidad y A una subálgebra de Banach de B tal que $1_B \in A$. Entonces

(1) $\mathrm{Inv}(A)$ *es un subconjunto abierto y cerrado de* $A \cap \mathrm{Inv}(B)$.

(2) *Si* $a \in A$ *entonces* $\sigma_B(a) \subseteq \sigma_A(a)$ *y* $\partial\sigma_A(a) \subseteq \partial\sigma_B(a)$.

(3) *Si* $a \in A$ *es tal que* $\sigma_B(a)$ *no tiene agujeros, entonces* $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

Demostración.

(1) Es claro que $\mathrm{Inv}(A)$ es abierto en $A \cap \mathrm{Inv}(B)$. Sea $(a_n) \subseteq \mathrm{Inv}(A)$ tal que $a_n \to b \in \mathrm{Inv}(B) \cap A$.

Subálgebras y elementos invertibles

Definición

Si $K \subseteq \mathbb{C}$ es compacto, los agujeros de K son las componentes conexas acotadas de $\mathbb{C} \setminus K$.

Teorema

Sean B un álgebra de Banach con unidad y A una subálgebra de Banach de B tal que $1_B \in A$. Entonces

(1) $\mathrm{Inv}(A)$ *es un subconjunto abierto y cerrado de* $A \cap \mathrm{Inv}(B)$.

(2) *Si* $a \in A$ *entonces* $\sigma_B(a) \subseteq \sigma_A(a)$ *y* $\partial\sigma_A(a) \subseteq \partial\sigma_B(a)$.

(3) *Si* $a \in A$ *es tal que* $\sigma_B(a)$ *no tiene agujeros, entonces* $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

Demostración.

(1) Es claro que $\mathrm{Inv}(A)$ es abierto en $A \cap \mathrm{Inv}(B)$. Sea $(a_n) \subseteq \mathrm{Inv}(A)$ tal que $a_n \to b \in \mathrm{Inv}(B) \cap A$. Como la inversión es continua en $\mathrm{Inv}(B)$, $a_n^{-1} \to b^{-1}$.

Definición

Si $K \subseteq \mathbb{C}$ es compacto, los agujeros de K son las componentes conexas acotadas de $\mathbb{C} \setminus K$.

Teorema

Sean B un álgebra de Banach con unidad y A una subálgebra de Banach de B tal que $1_B \in A$. Entonces

(1) $\mathrm{Inv}(A)$ *es un subconjunto abierto y cerrado de* $A \cap \mathrm{Inv}(B)$.

(2) *Si $a \in A$ entonces $\sigma_B(a) \subseteq \sigma_A(a)$ y $\partial\sigma_A(a) \subseteq \partial\sigma_B(a)$.*

(3) *Si $a \in A$ es tal que $\sigma_B(a)$ no tiene agujeros, entonces $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.*

Demostración.

(1) Es claro que $\mathrm{Inv}(A)$ es abierto en $A \cap \mathrm{Inv}(B)$. Sea $(a_n) \subseteq \mathrm{Inv}(A)$ tal que $a_n \to b \in \mathrm{Inv}(B) \cap A$. Como la inversión es continua en $\mathrm{Inv}(B)$, $a_n^{-1} \to b^{-1}$. Entonces $b^{-1} \in A$.

Definición

Si $K \subseteq \mathbb{C}$ es compacto, los agujeros de K son las componentes conexas acotadas de $\mathbb{C} \setminus K$.

Teorema

Sean B un álgebra de Banach con unidad y A una subálgebra de Banach de B tal que $1_B \in A$. Entonces

(1) $\operatorname{Inv}(A)$ *es un subconjunto abierto y cerrado de* $A \cap \operatorname{Inv}(B)$.

(2) *Si* $a \in A$ *entonces* $\sigma_B(a) \subseteq \sigma_A(a)$ *y* $\partial\sigma_A(a) \subseteq \partial\sigma_B(a)$.

(3) *Si* $a \in A$ *es tal que* $\sigma_B(a)$ *no tiene agujeros, entonces* $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

Demostración.

(1) Es claro que $\operatorname{Inv}(A)$ es abierto en $A \cap \operatorname{Inv}(B)$. Sea $(a_n) \subseteq \operatorname{Inv}(A)$ tal que $a_n \to b \in \operatorname{Inv}(B) \cap A$. Como la inversión es continua en $\operatorname{Inv}(B)$, $a_n^{-1} \to b^{-1}$. Entonces $b^{-1} \in A$. Luego $b \in \operatorname{Inv}(A)$, de donde $\operatorname{Inv}(A)$ es cerrado en $A \cap \operatorname{Inv}(B)$.

(2) Ya vimos que $\sigma_B(a) \subseteq \sigma_A(a)$. Supongamos que $\lambda_0 \in \partial\sigma_A(a)$

(2) Ya vimos que $\sigma_B(a) \subseteq \sigma_A(a)$. Supongamos que $\lambda_0 \in \partial\sigma_A(a)$

(2) Ya vimos que $\sigma_B(a) \subseteq \sigma_A(a)$. Supongamos que $\lambda_0 \in \partial\sigma_A(a) \subseteq \sigma_A(a)$

(2) Ya vimos que $\sigma_B(a) \subseteq \sigma_A(a)$. Supongamos que $\lambda_0 \in \partial\sigma_A(a) \subseteq \sigma_A(a)$ y sea $(\lambda_n) \subseteq \rho_A(a)$ tal que $\lambda_n \to \lambda_0$.

(2) Ya vimos que $\sigma_B(a) \subseteq \sigma_A(a)$. Supongamos que $\lambda_0 \in \partial\sigma_A(a) \subseteq \sigma_A(a)$ y sea $(\lambda_n) \subseteq \rho_A(a)$ tal que $\lambda_n \to \lambda_0$. Luego $(a - \lambda_n) \to (a - \lambda_0)$.

(2) Ya vimos que $\sigma_B(a) \subseteq \sigma_A(a)$. Supongamos que $\lambda_0 \in \partial\sigma_A(a) \subseteq \sigma_A(a)$ y sea $(\lambda_n) \subseteq \rho_A(a)$ tal que $\lambda_n \to \lambda_0$. Luego $(a - \lambda_n) \to (a - \lambda_0)$. Además $(a - \lambda_n) \in \mathrm{Inv}(A)$, y por la parte (1) se sabe que $a - \lambda_0 \notin \mathrm{Inv}(B)$. Entonces $\lambda_0 \in \sigma_B(a)$,

(2) Ya vimos que $\sigma_B(a) \subseteq \sigma_A(a)$. Supongamos que $\lambda_0 \in \partial\sigma_A(a) \subseteq \sigma_A(a)$ y sea $(\lambda_n) \subseteq \rho_A(a)$ tal que $\lambda_n \to \lambda_0$. Luego $(a - \lambda_n) \to (a - \lambda_0)$. Además $(a - \lambda_n) \in \mathrm{Inv}(A)$, y por la parte (1) se sabe que $a - \lambda_0 \notin \mathrm{Inv}(B)$. Entonces $\lambda_0 \in \sigma_B(a)$, y como $(a - \lambda_n) \in \mathrm{Inv}(B)$ converge a $a - \lambda_0$, se concluye que $\lambda_0 \in \partial\sigma_B(a)$.

(2) Ya vimos que $\sigma_B(a) \subseteq \sigma_A(a)$. Supongamos que $\lambda_0 \in \partial\sigma_A(a) \subseteq \sigma_A(a)$ y sea $(\lambda_n) \subseteq \rho_A(a)$ tal que $\lambda_n \to \lambda_0$. Luego $(a - \lambda_n) \to (a - \lambda_0)$. Además $(a - \lambda_n) \in \mathrm{Inv}(A)$, y por la parte (1) se sabe que $a - \lambda_0 \notin \mathrm{Inv}(B)$. Entonces $\lambda_0 \in \sigma_B(a)$, y como $(a - \lambda_n) \in \mathrm{Inv}(B)$ converge a $a - \lambda_0$, se concluye que $\lambda_0 \in \partial\sigma_B(a)$. Entonces $\partial\sigma_A(a) \subseteq \partial\sigma_B(a)$.

(2) Ya vimos que $\sigma_B(a) \subseteq \sigma_A(a)$. Supongamos que $\lambda_0 \in \partial\sigma_A(a) \subseteq \sigma_A(a)$ y sea $(\lambda_n) \subseteq \rho_A(a)$ tal que $\lambda_n \to \lambda_0$. Luego $(a - \lambda_n) \to (a - \lambda_0)$. Además $(a - \lambda_n) \in \mathrm{Inv}(A)$, y por la parte (1) se sabe que $a - \lambda_0 \notin \mathrm{Inv}(B)$. Entonces $\lambda_0 \in \sigma_B(a)$, y como $(a - \lambda_n) \in \mathrm{Inv}(B)$ converge a $a - \lambda_0$, se concluye que $\lambda_0 \in \partial\sigma_B(a)$. Entonces $\partial\sigma_A(a) \subseteq \partial\sigma_B(a)$.

(3) Probar que $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$ es equivalente a probar que $\rho_A(a) = \rho_B(a)$.

(2) Ya vimos que $\sigma_B(a) \subseteq \sigma_A(a)$. Supongamos que $\lambda_0 \in \partial\sigma_A(a) \subseteq \sigma_A(a)$ y sea $(\lambda_n) \subseteq \rho_A(a)$ tal que $\lambda_n \to \lambda_0$. Luego $(a - \lambda_n) \to (a - \lambda_0)$. Además $(a - \lambda_n) \in \mathrm{Inv}(A)$, y por la parte (1) se sabe que $a - \lambda_0 \notin \mathrm{Inv}(B)$. Entonces $\lambda_0 \in \sigma_B(a)$, y como $(a - \lambda_n) \in \mathrm{Inv}(B)$ converge a $a - \lambda_0$, se concluye que $\lambda_0 \in \partial\sigma_B(a)$. Entonces $\partial\sigma_A(a) \subseteq \partial\sigma_B(a)$.

(3) Probar que $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$ es equivalente a probar que $\rho_A(a) = \rho_B(a)$.

(2) Ya vimos que $\sigma_B(a) \subseteq \sigma_A(a)$. Supongamos que $\lambda_0 \in \partial\sigma_A(a) \subseteq \sigma_A(a)$ y sea $(\lambda_n) \subseteq \rho_A(a)$ tal que $\lambda_n \to \lambda_0$. Luego $(a - \lambda_n) \to (a - \lambda_0)$. Además $(a - \lambda_n) \in \mathrm{Inv}(A)$, y por la parte (1) se sabe que $a - \lambda_0 \notin \mathrm{Inv}(B)$. Entonces $\lambda_0 \in \sigma_B(a)$, y como $(a - \lambda_n) \in \mathrm{Inv}(B)$ converge a $a - \lambda_0$, se concluye que $\lambda_0 \in \partial\sigma_B(a)$. Entonces $\partial\sigma_A(a) \subseteq \partial\sigma_B(a)$.

(3) Probar que $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$ es equivalente a probar que $\rho_A(a) = \rho_B(a)$. Recordar que $\rho(x) = S_x^{-1}(\mathrm{Inv}(B))$, donde $S_x(\lambda) = x - \lambda$.

(2) Ya vimos que $\sigma_B(a) \subseteq \sigma_A(a)$. Supongamos que $\lambda_0 \in \partial\sigma_A(a) \subseteq \sigma_A(a)$ y sea $(\lambda_n) \subseteq \rho_A(a)$ tal que $\lambda_n \to \lambda_0$. Luego $(a-\lambda_n) \to (a-\lambda_0)$. Además $(a-\lambda_n) \in \mathrm{Inv}(A)$, y por la parte (1) se sabe que $a-\lambda_0 \notin \mathrm{Inv}(B)$. Entonces $\lambda_0 \in \sigma_B(a)$, y como $(a-\lambda_n) \in \mathrm{Inv}(B)$ converge a $a-\lambda_0$, se concluye que $\lambda_0 \in \partial\sigma_B(a)$. Entonces $\partial\sigma_A(a) \subseteq \partial\sigma_B(a)$.

(3) Probar que $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$ es equivalente a probar que $\rho_A(a) = \rho_B(a)$. Recordar que $\rho(x) = S_x^{-1}(\mathrm{Inv}(B))$, donde $S_x(\lambda) = x - \lambda$. Como $\mathrm{Inv}(A)$ es abierto y cerrado en $\mathrm{Inv}(B) \cap A$,

(2) Ya vimos que $\sigma_B(a) \subseteq \sigma_A(a)$. Supongamos que $\lambda_0 \in \partial\sigma_A(a) \subseteq \sigma_A(a)$ y sea $(\lambda_n) \subseteq \rho_A(a)$ tal que $\lambda_n \to \lambda_0$. Luego $(a - \lambda_n) \to (a - \lambda_0)$. Además $(a - \lambda_n) \in \mathrm{Inv}(A)$, y por la parte (1) se sabe que $a - \lambda_0 \notin \mathrm{Inv}(B)$. Entonces $\lambda_0 \in \sigma_B(a)$, y como $(a - \lambda_n) \in \mathrm{Inv}(B)$ converge a $a - \lambda_0$, se concluye que $\lambda_0 \in \partial\sigma_B(a)$. Entonces $\partial\sigma_A(a) \subseteq \partial\sigma_B(a)$.

(3) Probar que $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$ es equivalente a probar que $\rho_A(a) = \rho_B(a)$. Recordar que $\rho(x) = S_x^{-1}(\mathrm{Inv}(B))$, donde $S_x(\lambda) = x - \lambda$. Como $\mathrm{Inv}(A)$ es abierto y cerrado en $\mathrm{Inv}(B) \cap A$, entonces $\rho_A(a) = S_a^{-1}(\mathrm{Inv}(A))$ es abierto y cerrado en $S_a^{-1}(\mathrm{Inv}(B) \cap A) = \rho_B(a) \cap \mathbb{C} = \rho_B(a)$.

(2) Ya vimos que $\sigma_B(a) \subseteq \sigma_A(a)$. Supongamos que $\lambda_0 \in \partial\sigma_A(a) \subseteq \sigma_A(a)$ y sea $(\lambda_n) \subseteq \rho_A(a)$ tal que $\lambda_n \to \lambda_0$. Luego $(a-\lambda_n) \to (a-\lambda_0)$. Además $(a-\lambda_n) \in \mathrm{Inv}(A)$, y por la parte (1) se sabe que $a-\lambda_0 \notin \mathrm{Inv}(B)$. Entonces $\lambda_0 \in \sigma_B(a)$, y como $(a-\lambda_n) \in \mathrm{Inv}(B)$ converge a $a-\lambda_0$, se concluye que $\lambda_0 \in \partial\sigma_B(a)$. Entonces $\partial\sigma_A(a) \subseteq \partial\sigma_B(a)$.

(3) Probar que $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$ es equivalente a probar que $\rho_A(a) = \rho_B(a)$. Recordar que $\rho(x) = S_x^{-1}(\mathrm{Inv}(B))$, donde $S_x(\lambda) = x - \lambda$. Como $\mathrm{Inv}(A)$ es abierto y cerrado en $\mathrm{Inv}(B) \cap A$, entonces $\rho_A(a) = S_a^{-1}(\mathrm{Inv}(A))$ es abierto y cerrado en $S_a^{-1}(\mathrm{Inv}(B) \cap A) = \rho_B(a) \cap \mathbb{C} = \rho_B(a)$. Como $\rho_B(a)$ es conexo y $\rho_A(a) \neq \emptyset$ tenemos que $\rho_B(a) = \rho_A(a)$.

Teorema (Permanencia espectral)

Sean B una C^*-álgebra con unidad, A una C^*-subálgebra de B tal que $1_B \in A$ y $a \in A$. Entonces $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

Teorema (Permanencia espectral)

Sean B una C^*-álgebra con unidad, A una C^*-subálgebra de B tal que $1_B \in A$ y $a \in A$. Entonces $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

Demostración.

La parte (3) del teorema anterior implica que $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ si $a \in A_{sa}$.

Teorema (Permanencia espectral)

Sean B una C^*-álgebra con unidad, A una C^*-subálgebra de B tal que $1_B \in A$ y $a \in A$. Entonces $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

Demostración.

La parte (3) del teorema anterior implica que $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ si $a \in A_{sa}$.

Teorema (Permanencia espectral)

Sean B una C^*-álgebra con unidad, A una C^*-subálgebra de B tal que $1_B \in A$ y $a \in A$. Entonces $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

Demostración.

La parte (3) del teorema anterior implica que $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ si $a \in A_{sa}$. Para el caso general basta ver que $\mathrm{Inv}(A) = A \cap \mathrm{Inv}(B)$ (porque esto implica que $\rho_A(a) = \rho_B(a)$).

Teorema (Permanencia espectral)

Sean B una C^*-álgebra con unidad, A una C^*-subálgebra de B tal que $1_B \in A$ y $a \in A$. Entonces $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

Demostración.

La parte (3) del teorema anterior implica que $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ si $a \in A_{sa}$. Para el caso general basta ver que $\mathrm{Inv}(A) = A \cap \mathrm{Inv}(B)$ (porque esto implica que $\rho_A(a) = \rho_B(a)$). Para esto hay que probar que si $a \in A \cap \mathrm{Inv}(B)$, entonces $a \in \mathrm{Inv}(A)$.

Teorema (Permanencia espectral)

Sean B una C^*-álgebra con unidad, A una C^*-subálgebra de B tal que $1_B \in A$ y $a \in A$. Entonces $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

Demostración.

La parte (3) del teorema anterior implica que $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ si $a \in A_{sa}$. Para el caso general basta ver que $\mathrm{Inv}(A) = A \cap \mathrm{Inv}(B)$ (porque esto implica que $\rho_A(a) = \rho_B(a)$). Para esto hay que probar que si $a \in A \cap \mathrm{Inv}(B)$, entonces $a \in \mathrm{Inv}(A)$. Para un tal a se tiene que $a^* \in \mathrm{Inv}(B)$: $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$.

Teorema (Permanencia espectral)

Sean B una C^*-álgebra con unidad, A una C^*-subálgebra de B tal que $1_B \in A$ y $a \in A$. Entonces $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

Demostración.

La parte (3) del teorema anterior implica que $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ si $a \in A_{sa}$. Para el caso general basta ver que $\mathrm{Inv}(A) = A \cap \mathrm{Inv}(B)$ (porque esto implica que $\rho_A(a) = \rho_B(a)$). Para esto hay que probar que si $a \in A \cap \mathrm{Inv}(B)$, entonces $a \in \mathrm{Inv}(A)$. Para un tal a se tiene que $a^* \in \mathrm{Inv}(B)$: $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$. Por lo tanto aa^* y $a^*a \in \mathrm{Inv}(B) \cap A$.

Teorema (Permanencia espectral)

Sean B una C^*-álgebra con unidad, A una C^*-subálgebra de B tal que $1_B \in A$ y $a \in A$. Entonces $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

Demostración.

La parte (3) del teorema anterior implica que $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ si $a \in A_{sa}$. Para el caso general basta ver que $\mathrm{Inv}(A) = A \cap \mathrm{Inv}(B)$ (porque esto implica que $\rho_A(a) = \rho_B(a)$). Para esto hay que probar que si $a \in A \cap \mathrm{Inv}(B)$, entonces $a \in \mathrm{Inv}(A)$. Para un tal a se tiene que $a^* \in \mathrm{Inv}(B)$: $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$. Por lo tanto aa^* y $a^*a \in \mathrm{Inv}(B) \cap A$. Entonces existen $b, c \in B$ tales que $(aa^*)b = 1$ y $c(a^*a) = 1$.

Teorema (Permanencia espectral)

Sean B una C^*-álgebra con unidad, A una C^*-subálgebra de B tal que $1_B \in A$ y $a \in A$. Entonces $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

Demostración.

La parte (3) del teorema anterior implica que $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ si $a \in A_{sa}$. Para el caso general basta ver que $\operatorname{Inv}(A) = A \cap \operatorname{Inv}(B)$ (porque esto implica que $\rho_A(a) = \rho_B(a)$). Para esto hay que probar que si $a \in A \cap \operatorname{Inv}(B)$, entonces $a \in \operatorname{Inv}(A)$. Para un tal a se tiene que $a^* \in \operatorname{Inv}(B)$: $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$. Por lo tanto aa^* y $a^*a \in \operatorname{Inv}(B) \cap A$. Entonces existen $b, c \in B$ tales que $(aa^*)b = 1$ y $c(a^*a) = 1$. Luego $a(a^*b) = 1$ y $(ca^*)a = 1$.

Teorema (Permanencia espectral)

Sean B una C^*-álgebra con unidad, A una C^*-subálgebra de B tal que $1_B \in A$ y $a \in A$. Entonces $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

Demostración.

La parte (3) del teorema anterior implica que $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ si $a \in A_{sa}$. Para el caso general basta ver que $\operatorname{Inv}(A) = A \cap \operatorname{Inv}(B)$ (porque esto implica que $\rho_A(a) = \rho_B(a)$). Para esto hay que probar que si $a \in A \cap \operatorname{Inv}(B)$, entonces $a \in \operatorname{Inv}(A)$. Para un tal a se tiene que $a^* \in \operatorname{Inv}(B)$: $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$. Por lo tanto aa^* y $a^*a \in \operatorname{Inv}(B) \cap A$. Entonces existen $b, c \in B$ tales que $(aa^*)b = 1$ y $c(a^*a) = 1$. Luego $a(a^*b) = 1$ y $(ca^*)a = 1$. Entonces el inverso de a en B es $a^*b = ca^*$.

Teorema (Permanencia espectral)

Sean B una C^*-álgebra con unidad, A una C^*-subálgebra de B tal que $1_B \in A$ y $a \in A$. Entonces $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

Demostración.

La parte (3) del teorema anterior implica que $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ si $a \in A_{sa}$. Para el caso general basta ver que $\mathrm{Inv}(A) = A \cap \mathrm{Inv}(B)$ (porque esto implica que $\rho_A(a) = \rho_B(a)$). Para esto hay que probar que si $a \in A \cap \mathrm{Inv}(B)$, entonces $a \in \mathrm{Inv}(A)$. Para un tal a se tiene que $a^* \in \mathrm{Inv}(B)$: $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$. Por lo tanto aa^* y $a^*a \in \mathrm{Inv}(B) \cap A$. Entonces existen $b, c \in B$ tales que $(aa^*)b = 1$ y $c(a^*a) = 1$. Luego $a(a^*b) = 1$ y $(ca^*)a = 1$. Entonces el inverso de a en B es $a^*b = ca^*$. Por otro lado, como $aa^* \in \mathrm{Inv}(B) \cap B_{sa}$,

Teorema (Permanencia espectral)

Sean B una C^*-álgebra con unidad, A una C^*-subálgebra de B tal que $1_B \in A$ y $a \in A$. Entonces $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

Demostración.

La parte (3) del teorema anterior implica que $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ si $a \in A_{sa}$. Para el caso general basta ver que $\operatorname{Inv}(A) = A \cap \operatorname{Inv}(B)$ (porque esto implica que $\rho_A(a) = \rho_B(a)$). Para esto hay que probar que si $a \in A \cap \operatorname{Inv}(B)$, entonces $a \in \operatorname{Inv}(A)$. Para un tal a se tiene que $a^* \in \operatorname{Inv}(B)$: $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$. Por lo tanto aa^* y $a^*a \in \operatorname{Inv}(B) \cap A$. Entonces existen $b, c \in B$ tales que $(aa^*)b = 1$ y $c(a^*a) = 1$. Luego $a(a^*b) = 1$ y $(ca^*)a = 1$. Entonces el inverso de a en B es $a^*b = ca^*$. Por otro lado, como $aa^* \in \operatorname{Inv}(B) \cap B_{sa}$, entonces $0 \notin \sigma_B(aa^*) = \sigma_A(aa^*)$.

Teorema (Permanencia espectral)

Sean B una C^*-álgebra con unidad, A una C^*-subálgebra de B tal que $1_B \in A$ y $a \in A$. Entonces $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

Demostración.

La parte (3) del teorema anterior implica que $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ si $a \in A_{sa}$. Para el caso general basta ver que $\mathrm{Inv}(A) = A \cap \mathrm{Inv}(B)$ (porque esto implica que $\rho_A(a) = \rho_B(a)$). Para esto hay que probar que si $a \in A \cap \mathrm{Inv}(B)$, entonces $a \in \mathrm{Inv}(A)$. Para un tal a se tiene que $a^* \in \mathrm{Inv}(B)$: $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$. Por lo tanto aa^* y $a^*a \in \mathrm{Inv}(B) \cap A$. Entonces existen $b, c \in B$ tales que $(aa^*)b = 1$ y $c(a^*a) = 1$. Luego $a(a^*b) = 1$ y $(ca^*)a = 1$. Entonces el inverso de a en B es $a^*b = ca^*$. Por otro lado, como $aa^* \in \mathrm{Inv}(B) \cap B_{sa}$, entonces $0 \notin \sigma_B(aa^*) = \sigma_A(aa^*)$. Entonces $b = (aa^*)^{-1} \in A$.

Teorema (Permanencia espectral)

Sean B una C^*-álgebra con unidad, A una C^*-subálgebra de B tal que $1_B \in A$ y $a \in A$. Entonces $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

Demostración.

La parte (3) del teorema anterior implica que $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ si $a \in A_{sa}$. Para el caso general basta ver que $\mathrm{Inv}(A) = A \cap \mathrm{Inv}(B)$ (porque esto implica que $\rho_A(a) = \rho_B(a)$). Para esto hay que probar que si $a \in A \cap \mathrm{Inv}(B)$, entonces $a \in \mathrm{Inv}(A)$. Para un tal a se tiene que $a^* \in \mathrm{Inv}(B)$: $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$. Por lo tanto aa^* y $a^*a \in \mathrm{Inv}(B) \cap A$. Entonces existen $b, c \in B$ tales que $(aa^*)b = 1$ y $c(a^*a) = 1$. Luego $a(a^*b) = 1$ y $(ca^*)a = 1$. Entonces el inverso de a en B es $a^*b = ca^*$. Por otro lado, como $aa^* \in \mathrm{Inv}(B) \cap B_{sa}$, entonces $0 \notin \sigma_B(aa^*) = \sigma_A(aa^*)$. Entonces $b = (aa^*)^{-1} \in A$. Por lo tanto $a^*b \in A$.

Teorema (Permanencia espectral)

Sean B una C^*-álgebra con unidad, A una C^*-subálgebra de B tal que $1_B \in A$ y $a \in A$. Entonces $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

Demostración.

La parte (3) del teorema anterior implica que $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ si $a \in A_{sa}$. Para el caso general basta ver que $\mathrm{Inv}(A) = A \cap \mathrm{Inv}(B)$ (porque esto implica que $\rho_A(a) = \rho_B(a)$). Para esto hay que probar que si $a \in A \cap \mathrm{Inv}(B)$, entonces $a \in \mathrm{Inv}(A)$. Para un tal a se tiene que $a^* \in \mathrm{Inv}(B)$: $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$. Por lo tanto aa^* y $a^*a \in \mathrm{Inv}(B) \cap A$. Entonces existen $b, c \in B$ tales que $(aa^*)b = 1$ y $c(a^*a) = 1$. Luego $a(a^*b) = 1$ y $(ca^*)a = 1$. Entonces el inverso de a en B es $a^*b = ca^*$. Por otro lado, como $aa^* \in \mathrm{Inv}(B) \cap B_{sa}$, entonces $0 \notin \sigma_B(aa^*) = \sigma_A(aa^*)$. Entonces $b = (aa^*)^{-1} \in A$. Por lo tanto $a^*b \in A$. Entonces el inverso de a en B pertenece a A, es decir $a \in \mathrm{Inv}(A)$.

Teorema (Permanencia espectral)

Sean B una C^*-álgebra con unidad, A una C^*-subálgebra de B tal que $1_B \in A$ y $a \in A$. Entonces $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

Demostración.

La parte (3) del teorema anterior implica que $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ si $a \in A_{sa}$. Para el caso general basta ver que $\mathrm{Inv}(A) = A \cap \mathrm{Inv}(B)$ (porque esto implica que $\rho_A(a) = \rho_B(a)$). Para esto hay que probar que si $a \in A \cap \mathrm{Inv}(B)$, entonces $a \in \mathrm{Inv}(A)$. Para un tal a se tiene que $a^* \in \mathrm{Inv}(B)$: $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$. Por lo tanto aa^* y $a^*a \in \mathrm{Inv}(B) \cap A$. Entonces existen $b, c \in B$ tales que $(aa^*)b = 1$ y $c(a^*a) = 1$. Luego $a(a^*b) = 1$ y $(ca^*)a = 1$. Entonces el inverso de a en B es $a^*b = ca^*$. Por otro lado, como $aa^* \in \mathrm{Inv}(B) \cap B_{sa}$, entonces $0 \notin \sigma_B(aa^*) = \sigma_A(aa^*)$. Entonces $b = (aa^*)^{-1} \in A$. Por lo tanto $a^*b \in A$. Entonces el inverso de a en B pertenece a A, es decir $a \in \mathrm{Inv}(A)$. En conclusión es $\mathrm{Inv}(A) = A \cap \mathrm{Inv}(B)$. □

Cálculo funcional continuo

Proposición

Sean A una C^*-álgebra unital y $a \in A$ tal que $A = C^*(1, a)$. Si $\phi, \psi : A \to B$ son homomorfismos unitales de C^*-álgebras, y $\phi(a) = \psi(a)$, entonces $\phi = \psi$.

Cálculo funcional continuo

Proposición

Sean A una C^*-álgebra unital y $a \in A$ tal que $A = C^*(1, a)$. Si $\phi, \psi : A \to B$ son homomorfismos unitales de C^*-álgebras, y $\phi(a) = \psi(a)$, entonces $\phi = \psi$.

Proposición

Sean A una C^*-álgebra unital y $a \in A$ tal que $A = C^*(1, a)$. Si $\phi, \psi : A \to B$ son homomorfismos unitales de C^*-álgebras, y $\phi(a) = \psi(a)$, entonces $\phi = \psi$.

Demostración.

Proposición

Sean A una C^*-álgebra unital y $a \in A$ tal que $A = C^*(1, a)$. Si $\phi, \psi : A \to B$ son homomorfismos unitales de C^*-álgebras, y $\phi(a) = \psi(a)$, entonces $\phi = \psi$.

Demostración.

Proposición

Sean A una C^*-álgebra unital y $a \in A$ tal que $A = C^*(1, a)$. Si $\phi, \psi : A \to B$ son homomorfismos unitales de C^*-álgebras, y $\phi(a) = \psi(a)$, entonces $\phi = \psi$.

Demostración. La hipótesis implica $\phi(a^*) = \phi(a)^*$

Proposición

Sean A una C^*-álgebra unital y $a \in A$ tal que $A = C^*(1, a)$. Si $\phi, \psi : A \to B$ son homomorfismos unitales de C^*-álgebras, y $\phi(a) = \psi(a)$, entonces $\phi = \psi$.

Demostración. La hipótesis implica $\phi(a^*) = \phi(a)^* = \psi(a)^*$

Proposición

Sean A una C^*-álgebra unital y $a \in A$ tal que $A = C^*(1, a)$. Si $\phi, \psi : A \to B$ son homomorfismos unitales de C^*-álgebras, y $\phi(a) = \psi(a)$, entonces $\phi = \psi$.

Demostración. La hipótesis implica $\phi(a^*) = \phi(a)^* = \psi(a)^* = \psi(a^*)$.

Cálculo funcional continuo

Proposición

Sean A una C^*-álgebra unital y $a \in A$ tal que $A = C^*(1, a)$. Si $\phi, \psi : A \to B$ son homomorfismos unitales de C^*-álgebras, y $\phi(a) = \psi(a)$, entonces $\phi = \psi$.

Demostración. La hipótesis implica $\phi(a^*) = \phi(a)^* = \psi(a)^* = \psi(a^*)$. Sea $A_0 := \{p(a, a^*) : p \in \mathbb{C}\{X, Y\}\}$ (aquí $\mathbb{C}\{X, Y\}$ representa el álgebra de polinomios en dos variables no conmutativas X e Y).

Cálculo funcional continuo

Proposición

Sean A una C^*-álgebra unital y $a \in A$ tal que $A = C^*(1, a)$. Si $\phi, \psi : A \to B$ son homomorfismos unitales de C^*-álgebras, y $\phi(a) = \psi(a)$, entonces $\phi = \psi$.

Demostración. La hipótesis implica $\phi(a^*) = \phi(a)^* = \psi(a)^* = \psi(a^*)$. Sea $A_0 := \{p(a, a^*) : p \in \mathbb{C}\{X, Y\}\}$ (aquí $\mathbb{C}\{X, Y\}$ representa el álgebra de polinomios en dos variables no conmutativas X e Y). Entonces $\overline{A_0} = A$, y $\phi|_{A_0} = \psi|_{A_0}$,

Cálculo funcional continuo

Proposición

Sean A una C^*-álgebra unital y $a \in A$ tal que $A = C^*(1, a)$. Si $\phi, \psi : A \to B$ son homomorfismos unitales de C^*-álgebras, y $\phi(a) = \psi(a)$, entonces $\phi = \psi$.

Demostración. La hipótesis implica $\phi(a^*) = \phi(a)^* = \psi(a)^* = \psi(a^*)$. Sea $A_0 := \{p(a, a^*) : p \in \mathbb{C}\{X, Y\}\}$ (aquí $\mathbb{C}\{X, Y\}$ representa el álgebra de polinomios en dos variables no conmutativas X e Y). Entonces $\overline{A_0} = A$, y $\phi|_{A_0} = \psi|_{A_0}$, y por lo tanto $\phi = \psi$ porque ambos son continuos.

Cálculo funcional continuo

Proposición

Sean A una C^*-álgebra unital y $a \in A$ tal que $A = C^*(1, a)$. Si $\phi, \psi : A \to B$ son homomorfismos unitales de C^*-álgebras, y $\phi(a) = \psi(a)$, entonces $\phi = \psi$.

Demostración. La hipótesis implica $\phi(a^*) = \phi(a)^* = \psi(a)^* = \psi(a^*)$. Sea $A_0 := \{p(a, a^*) : p \in \mathbb{C}\{X, Y\}\}$ (aquí $\mathbb{C}\{X, Y\}$ representa el álgebra de polinomios en dos variables no conmutativas X e Y). Entonces $\overline{A_0} = A$, y $\phi|_{A_0} = \psi|_{A_0}$, y por lo tanto $\phi = \psi$ porque ambos son continuos.

Corolario

Sean $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto, y $\iota \in C(K)$ la inclusión de K en $\mathbb{C}$: $\iota(z) = z$ $\forall z \in K$. Si $\phi, \psi : C(K) \to B$ son homomorfismos unitales de C^*-álgebras, y $\phi(\iota) = \psi(\iota)$, entonces $\phi = \psi$.

Proposición

Sean A una C^*-álgebra unital y $a \in A$ tal que $A = C^*(1, a)$. Si $\phi, \psi : A \to B$ son homomorfismos unitales de C^*-álgebras, y $\phi(a) = \psi(a)$, entonces $\phi = \psi$.

Demostración. La hipótesis implica $\phi(a^*) = \phi(a)^* = \psi(a)^* = \psi(a^*)$. Sea $A_0 := \{p(a, a^*) : p \in \mathbb{C}\{X, Y\}\}$ (aquí $\mathbb{C}\{X, Y\}$ representa el álgebra de polinomios en dos variables no conmutativas X e Y). Entonces $\overline{A_0} = A$, y $\phi|_{A_0} = \psi|_{A_0}$, y por lo tanto $\phi = \psi$ porque ambos son continuos.

Corolario

Sean $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto, y $\iota \in C(K)$ la inclusión de K en $\mathbb{C}$: $\iota(z) = z$ $\forall z \in K$. Si $\phi, \psi : C(K) \to B$ son homomorfismos unitales de C^*-álgebras, y $\phi(\iota) = \psi(\iota)$, entonces $\phi = \psi$.

Cálculo funcional continuo

Proposición

Sean A una C^*-álgebra unital y $a \in A$ tal que $A = C^*(1, a)$. Si $\phi, \psi : A \to B$ son homomorfismos unitales de C^*-álgebras, y $\phi(a) = \psi(a)$, entonces $\phi = \psi$.

Demostración. La hipótesis implica $\phi(a^*) = \phi(a)^* = \psi(a)^* = \psi(a^*)$. Sea $A_0 := \{p(a, a^*) : p \in \mathbb{C}\{X, Y\}\}$ (aquí $\mathbb{C}\{X, Y\}$ representa el álgebra de polinomios en dos variables no conmutativas X e Y). Entonces $\overline{A_0} = A$, y $\phi|_{A_0} = \psi|_{A_0}$, y por lo tanto $\phi = \psi$ porque ambos son continuos.

Corolario

Sean $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto, y $\iota \in C(K)$ la inclusión de K en $\mathbb{C}$: $\iota(z) = z$ $\forall z \in K$. Si $\phi, \psi : C(K) \to B$ son homomorfismos unitales de C^*-álgebras, y $\phi(\iota) = \psi(\iota)$, entonces $\phi = \psi$.

Demostración.

Proposición

Sean A una C^*-álgebra unital y $a \in A$ tal que $A = C^*(1, a)$. Si $\phi, \psi : A \to B$ son homomorfismos unitales de C^*-álgebras, y $\phi(a) = \psi(a)$, entonces $\phi = \psi$.

Demostración. La hipótesis implica $\phi(a^*) = \phi(a)^* = \psi(a)^* = \psi(a^*)$. Sea $A_0 := \{p(a, a^*) : p \in \mathbb{C}\{X, Y\}\}$ (aquí $\mathbb{C}\{X, Y\}$ representa el álgebra de polinomios en dos variables no conmutativas X e Y). Entonces $\overline{A_0} = A$, y $\phi|_{A_0} = \psi|_{A_0}$, y por lo tanto $\phi = \psi$ porque ambos son continuos.

Corolario

Sean $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto, y $\iota \in C(K)$ la inclusión de K en $\mathbb{C}$: $\iota(z) = z$ $\forall z \in K$. Si $\phi, \psi : C(K) \to B$ son homomorfismos unitales de C^*-álgebras, y $\phi(\iota) = \psi(\iota)$, entonces $\phi = \psi$.

Demostración.

Cálculo funcional continuo

Proposición

Sean A una C^*-álgebra unital y $a \in A$ tal que $A = C^*(1, a)$. Si $\phi, \psi : A \to B$ son homomorfismos unitales de C^*-álgebras, y $\phi(a) = \psi(a)$, entonces $\phi = \psi$.

Demostración. La hipótesis implica $\phi(a^*) = \phi(a)^* = \psi(a)^* = \psi(a^*)$. Sea $A_0 := \{p(a, a^*) : p \in \mathbb{C}\{X, Y\}\}$ (aquí $\mathbb{C}\{X, Y\}$ representa el álgebra de polinomios en dos variables no conmutativas X e Y). Entonces $\overline{A_0} = A$, y $\phi|_{A_0} = \psi|_{A_0}$, y por lo tanto $\phi = \psi$ porque ambos son continuos.

Corolario

Sean $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto, y $\iota \in C(K)$ la inclusión de K en $\mathbb{C}$: $\iota(z) = z$ $\forall z \in K$. Si $\phi, \psi : C(K) \to B$ son homomorfismos unitales de C^*-álgebras, y $\phi(\iota) = \psi(\iota)$, entonces $\phi = \psi$.

Demostración. Basta notar que $C^*(1, \iota) = C(K)$ por el teorema de Stone-Weierstrass, y aplicar la Proposición previa.

Lema

Sea a un elemento normal de una C^*-álgebra con unidad A. Entonces la evaluación $ev_a : \widehat{C^*(1, a)} \to \sigma(a)$ es un homeomorfismo.

Lema

Sea a un elemento normal de una C^*-álgebra con unidad A. Entonces la evaluación $ev_a : \widehat{C^*(1, a)} \to \sigma(a)$ *es un homeomorfismo.*

Lema

Sea a un elemento normal de una C^*-álgebra con unidad A. Entonces la evaluación $ev_a : \widehat{C^*(1, a)} \to \sigma(a)$ *es un homeomorfismo.*

Demostración.

Lema

Sea a un elemento normal de una C^*-álgebra con unidad A. Entonces la evaluación $ev_a : \widehat{C^*(1, a)} \to \sigma(a)$ es un homeomorfismo.

Demostración.

Lema

Sea a un elemento normal de una C^*-álgebra con unidad A. Entonces la evaluación $ev_a : \widehat{C^*(1,a)} \to \sigma(a)$ *es un homeomorfismo.*

Demostración. Como $C^*(1,a)$ es un álgebra de Banach con unidad, ya sabemos que ev_a es continuo y sobreyectivo, y también es inyectivo por la Proposición anterior.

Lema

Sea a un elemento normal de una C^*-álgebra con unidad A. Entonces la evaluación $ev_a : \widehat{C^*(1,a)} \to \sigma(a)$ es un homeomorfismo.

Demostración. Como $C^*(1,a)$ es un álgebra de Banach con unidad, ya sabemos que ev_a es continuo y sobreyectivo, y también es inyectivo por la Proposición anterior. Como $\sigma(a)$ y $\widehat{C^*(1,a)}$ son espacios de Hausdorff compactos, entonces ev_a es un homeomorfismo.

Lema

Sea a un elemento normal de una C^*-álgebra con unidad A. Entonces la evaluación $ev_a : \widehat{C^*(1,a)} \to \sigma(a)$ es un homeomorfismo.

Demostración. Como $C^*(1,a)$ es un álgebra de Banach con unidad, ya sabemos que ev_a es continuo y sobreyectivo, y también es inyectivo por la Proposición anterior. Como $\sigma(a)$ y $\widehat{C^*(1,a)}$ son espacios de Hausdorff compactos, entonces ev_a es un homeomorfismo.

Teorema (Cálculo funcional continuo)

Sea a un elemento normal de una C^*-álgebra con unidad A. Entonces existe un único homomorfismo de C^*-álgebras $\tau_a : C(\sigma(a)) \to A$ tal que $\tau_a(1) = 1$ y $\tau_a(\iota) = a$, donde $\iota : \sigma(a) \to \mathbb{C}$ es la inclusión. Además τ_a es una isometría con imagen $C^*(1,a)$.

Lema

Sea a un elemento normal de una C^*-álgebra con unidad A. Entonces la evaluación $ev_a : \widehat{C^*(1,a)} \to \sigma(a)$ es un homeomorfismo.

Demostración. Como $C^*(1,a)$ es un álgebra de Banach con unidad, ya sabemos que ev_a es continuo y sobreyectivo, y también es inyectivo por la Proposición anterior. Como $\sigma(a)$ y $\widehat{C^*(1,a)}$ son espacios de Hausdorff compactos, entonces ev_a es un homeomorfismo.

Teorema (Cálculo funcional continuo)

Sea a un elemento normal de una C^*-álgebra con unidad A. Entonces existe un único homomorfismo de C^*-álgebras $\tau_a : C(\sigma(a)) \to A$ tal que $\tau_a(1) = 1$ y $\tau_a(\iota) = a$, donde $\iota : \sigma(a) \to \mathbb{C}$ es la inclusión. Además τ_a es una isometría con imagen $C^*(1,a)$.

Lema

Sea a un elemento normal de una C^*-álgebra con unidad A. Entonces la evaluación $ev_a : \widehat{C^*(1,a)} \to \sigma(a)$ es un homeomorfismo.

Demostración. Como $C^*(1,a)$ es un álgebra de Banach con unidad, ya sabemos que ev_a es continuo y sobreyectivo, y también es inyectivo por la Proposición anterior. Como $\sigma(a)$ y $\widehat{C^*(1,a)}$ son espacios de Hausdorff compactos, entonces ev_a es un homeomorfismo.

Teorema (Cálculo funcional continuo)

Sea a un elemento normal de una C^*-álgebra con unidad A. Entonces existe un único homomorfismo de C^*-álgebras $\tau_a : C(\sigma(a)) \to A$ tal que $\tau_a(1) = 1$ y $\tau_a(\iota) = a$, donde $\iota : \sigma(a) \to \mathbb{C}$ es la inclusión. Además τ_a es una isometría con imagen $C^*(1,a)$.

Demostración.

Lema

Sea a un elemento normal de una C^*-álgebra con unidad A. Entonces la evaluación $ev_a : \widehat{C^*(1,a)} \to \sigma(a)$ es un homeomorfismo.

Demostración. Como $C^*(1,a)$ es un álgebra de Banach con unidad, ya sabemos que ev_a es continuo y sobreyectivo, y también es inyectivo por la Proposición anterior. Como $\sigma(a)$ y $\widehat{C^*(1,a)}$ son espacios de Hausdorff compactos, entonces ev_a es un homeomorfismo.

Teorema (Cálculo funcional continuo)

Sea a un elemento normal de una C^*-álgebra con unidad A. Entonces existe un único homomorfismo de C^*-álgebras $\tau_a : C(\sigma(a)) \to A$ tal que $\tau_a(1) = 1$ y $\tau_a(\iota) = a$, donde $\iota : \sigma(a) \to \mathbb{C}$ es la inclusión. Además τ_a es una isometría con imagen $C^*(1,a)$.

Demostración.

Lema

Sea a un elemento normal de una C^*-álgebra con unidad A. Entonces la evaluación $ev_a : \widehat{C^*(1,a)} \to \sigma(a)$ es un homeomorfismo.

Demostración. Como $C^*(1,a)$ es un álgebra de Banach con unidad, ya sabemos que ev_a es continuo y sobreyectivo, y también es inyectivo por la Proposición anterior. Como $\sigma(a)$ y $\widehat{C^*(1,a)}$ son espacios de Hausdorff compactos, entonces ev_a es un homeomorfismo.

Teorema (Cálculo funcional continuo)

Sea a un elemento normal de una C^*-álgebra con unidad A. Entonces existe un único homomorfismo de C^*-álgebras $\tau_a : C(\sigma(a)) \to A$ tal que $\tau_a(1) = 1$ y $\tau_a(\iota) = a$, donde $\iota : \sigma(a) \to \mathbb{C}$ es la inclusión. Además τ_a es una isometría con imagen $C^*(1,a)$.

Demostración. La unicidad de τ_a sigue del Corolario anterior.

En cuanto a la existencia, sea $(\mathrm{ev}_a)_* : C(\sigma(a)) \to C(\widehat{C^*(1,a)})$ el isomorfismo inducido por ev_a, es decir $(\mathrm{ev}_a)_*(f) = f \circ \mathrm{ev}_a$.

En cuanto a la existencia, sea $(\mathrm{ev}_a)_* : C(\sigma(a)) \to C(\widehat{C^*(1,a)})$ el isomorfismo inducido por ev_a, es decir $(\mathrm{ev}_a)_*(f) = f \circ \mathrm{ev}_a$.
Sea $\tau_a : C(\sigma(a)) \to A$ dada por $\tau_a := \mathcal{G}^{-1} \circ (\mathrm{ev}_a)_*$.

En cuanto a la existencia, sea $(\mathrm{ev}_a)_* : C(\sigma(a)) \to C(\widehat{C^*(1,a)})$ el isomorfismo inducido por ev_a, es decir $(\mathrm{ev}_a)_*(f) = f \circ \mathrm{ev}_a$.
Sea $\tau_a : C(\sigma(a)) \to A$ dada por $\tau_a := \mathcal{G}^{-1} \circ (\mathrm{ev}_a)_*$. Es decir que:

En cuanto a la existencia, sea $(\mathrm{ev}_a)_* : C(\sigma(a)) \to C(\widehat{C^*(1,a)})$ el isomorfismo inducido por ev_a, es decir $(\mathrm{ev}_a)_*(f) = f \circ \mathrm{ev}_a$.
Sea $\tau_a : C(\sigma(a)) \to A$ dada por $\tau_a := \mathcal{G}^{-1} \circ (\mathrm{ev}_a)_*$. Es decir que:

$$
\begin{tikzcd}
C(\sigma(a)) \arrow[rr, "(\mathrm{ev}_a)_*", "\cong"'] \arrow[dr, "\cong", "\tau_a"'] & & C(\widehat{C^*(1,a)}), \arrow[dl, "\cong"', "\mathcal{G}^{-1}"] \\
& A \supseteq C^*(1,a) &
\end{tikzcd}
$$

En cuanto a la existencia, sea $(\mathrm{ev}_a)_* : C(\sigma(a)) \to C(\widehat{C^*(1,a)})$ el isomorfismo inducido por ev_a, es decir $(\mathrm{ev}_a)_*(f) = f \circ \mathrm{ev}_a$.
Sea $\tau_a : C(\sigma(a)) \to A$ dada por $\tau_a := \mathcal{G}^{-1} \circ (\mathrm{ev}_a)_*$. Es decir que:

$$\begin{tikzcd}
C(\sigma(a)) \arrow[rr, "(\mathrm{ev}_a)_*", "\cong"'] \arrow[dr, "\cong", "\tau_a"'] & & C(\widehat{C^*(1,a)}), \arrow[dl, "\cong"', "\mathcal{G}^{-1}"] \\
& A \supseteq C^*(1,a) &
\end{tikzcd}$$

Entonces τ_a es un homomorfismo unital inyectivo de C^*-álgebras, (y por lo tanto isométrico), cuya imagen es $C^*(1,a)$.

En cuanto a la existencia, sea $(\mathrm{ev}_a)_* : C(\sigma(a)) \to C(\widehat{C^*(1,a)})$ el isomorfismo inducido por ev_a, es decir $(\mathrm{ev}_a)_*(f) = f \circ \mathrm{ev}_a$.
Sea $\tau_a : C(\sigma(a)) \to A$ dada por $\tau_a := \mathcal{G}^{-1} \circ (\mathrm{ev}_a)_*$. Es decir que:

$$\begin{tikzcd}
C(\sigma(a)) \arrow[rr, "(\mathrm{ev}_a)_*", "\cong"'] \arrow[dr, "\cong", "\tau_a"'] & & C(\widehat{C^*(1,a)}), \arrow[dl, "\cong"', "\mathcal{G}^{-1}"] \\
& A \supseteq C^*(1,a) &
\end{tikzcd}$$

Entonces τ_a es un homomorfismo unital inyectivo de C^*-álgebras, (y por lo tanto isométrico), cuya imagen es $C^*(1,a)$. Además

$$\mathrm{ev}_{a_*}(\iota) = \iota \circ \mathrm{ev}_a$$

En cuanto a la existencia, sea $(\mathrm{ev}_a)_* : C(\sigma(a)) \to C(\widehat{C^*(1,a)})$ el isomorfismo inducido por ev_a, es decir $(\mathrm{ev}_a)_*(f) = f \circ \mathrm{ev}_a$.
Sea $\tau_a : C(\sigma(a)) \to A$ dada por $\tau_a := \mathcal{G}^{-1} \circ (\mathrm{ev}_a)_*$. Es decir que:

$$\begin{tikzcd}
C(\sigma(a)) \arrow[rr, "(\mathrm{ev}_a)_*", "\cong"'] \arrow[dr, "\cong", "\tau_a"'] & & C(\widehat{C^*(1,a)}), \arrow[dl, "\cong"', "\mathcal{G}^{-1}"] \\
& A \supseteq C^*(1,a) &
\end{tikzcd}$$

Entonces τ_a es un homomorfismo unital inyectivo de C^*-álgebras, (y por lo tanto isométrico), cuya imagen es $C^*(1,a)$. Además

$$\mathrm{ev}_{a_*}(\iota) = \iota \circ \mathrm{ev}_a = \widehat{a},$$

y por lo tanto $\tau_a(\iota) = \mathcal{G}^{-1}(\widehat{a}) = a$.

Definición

El homomorfismo τ_a dado por el teorema previo se llama cálculo funcional (continuo) sobre el elemento normal a. En lugar de $\tau_a(f)$ se escribe en general $f(a)$.