

1 Repaso

2 Dualidad de Gelfand

- Diccionario de la dualidad de Gelfand.
- Subálgebras y elementos invertibles

3 Cálculo funcional continuo

Proposición

- (a) Si $u \in \mathcal{U}(A) := \{v \in A : v \text{ es unitario}\}$, entonces $\sigma(u) \subseteq S^1$.
- (b) Si $a \in A_{sa}$, entonces $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.
- (c) Si $a \in A_{sa}$, entonces $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

Demostración.

- (a) Como $\sigma(u) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \Rightarrow \sigma(u^{-1}) = \sigma(u^*) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) = S^1$.
- (b) $(e^{ia})^* = e^{(ia)^*} = e^{-ia^*} = e^{-ia} = (e^{ia})^{-1}$, entonces $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.
- (c) $e^{ia} - e^{i\lambda} = e^{i\lambda}(e^{i(a-\lambda)} - 1) = e^{i\lambda} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i(a-\lambda))^n}{n!} - 1 \right)$
$$= e^{i\lambda} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n (a-\lambda)^n}{n!} \right) = e^{i\lambda} (a-\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} (a-\lambda)^{n-1}.$$

Entonces si $\lambda \in \sigma(a)$ se tiene $e^{i\lambda} \in \sigma(e^{ia}) \subseteq S^1$, y por lo tanto $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

Proposición

Sean A una C^* -álgebra y $h : A \rightarrow \mathbb{C}$ un homomorfismo de álgebras, entonces $h(a^*) = \overline{h(a)}$, para todo $a \in A$.

Demostración.

Si $a \in A_{sa}$, es $h(a) \in \sigma(a) \subset \mathbb{R}$. Ahora si $b = x + iy$, donde $x, y \in A_{sa}$:

$$\begin{aligned} h(b^*) &= h(x^*) - ih(y^*) = \overline{h(x)} - i\overline{h(y)} \\ &= \overline{h(x) + ih(y)} = \overline{h(b)}. \end{aligned}$$

□

Corolario

Supongamos que $\phi : A \rightarrow C_0(X)$ es un homomorfismo de álgebras de Banach. Entonces ϕ es un homomorfismo de C^* -álgebras.

Demostración.

Si $x \in X$ y $\delta_x : C_0(X) \rightarrow \mathbb{C}$ es la evaluación en x , entonces $\delta_x \circ \phi \in \hat{A}$, y por lo tanto $\delta_x \circ \phi(a^*) = \overline{\delta_x \circ \phi(a)}$; es decir que $\phi(a^*) = \overline{\phi(a)}$.

□

Teorema (Gelfand-Naimark, 1943)

Sea A una C^* -álgebra conmutativa. Entonces la transformada de Gelfand $\mathcal{G} : A \rightarrow C_0(\hat{A})$ es un isomorfismo de C^* -álgebras.

Demostración.

Ya sabemos que \mathcal{G} es un homomorfismo continuo de álgebras, tal que $\mathcal{G}(A)$ separa puntos de \hat{A} y \mathcal{G} no se anula en \hat{A} , y que $\|\hat{a}\|_\infty = r(a)$. Veamos que \mathcal{G} es un homomorfismo de $*$ -álgebras: si $a \in A$, $h \in \hat{A}$:

$$\mathcal{G}(a^*)(h) = h(a^*) = \overline{h(a)} = \overline{\mathcal{G}(a)(h)} = \overline{\mathcal{G}(a)}(h).$$

Entonces $\mathcal{G}(a^*) = \overline{\mathcal{G}(a)}$, de modo que $\mathcal{G}(A)$ es una subálgebra autoadjunta, que separa puntos y no se anula en \hat{A} . Entonces $\overline{\mathcal{G}(A)} = C_0(\hat{A})$ por el Teorema de Stone-Weierstrass. Además \mathcal{G} es una isometría:

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| = r(a^*a) = \|\widehat{a^*a}\|_\infty = \|\hat{a}^*\hat{a}\|_\infty = \|\overline{\hat{a}}, \hat{a}\|_\infty = \|\hat{a}\|_\infty^2.$$

Por lo tanto \mathcal{G} es inyectiva, y $\mathcal{G}(A)$ es cerrada. Pero como también $\mathcal{G}(A)$ es densa en $C_0(\hat{A})$, se concluye que \mathcal{G} es un isomorfismo. □

Proposición (Segal, 1949)

Si $\phi : A \rightarrow B$ es un hm inyectivo de C^* -álgebras, entonces ϕ es isométrico.

Demostración. Se puede suponer A y B unitales, y $\phi(1) = 1$. Como $\|\phi(x)\|^2 = \|\phi(x^*x)\|$ y x^*x es autoadjunto, basta probar que $\phi|_{A_{sa}}$ es isométrico. Sean $a \in A_{sa}$ y $b := \phi(a)$ ($\Rightarrow \phi(a) \in B_{sa}$). Entonces $\phi(C^*(1, a)) \subseteq C^*(1, b)$, y tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} C^*(1, a) & \xrightarrow[\cong]{\mathcal{G}_A} & C_0(\widehat{C^*(1, a)}) \\ \phi \downarrow & & \downarrow (\hat{\phi})_* \\ C^*(1, b) & \xrightarrow[\cong]{\mathcal{G}_B} & C_0(\widehat{C^*(1, b)}) \end{array} \quad (1)$$

Como ϕ es inyectiva, $(\hat{\phi})_*$ también lo es. Si $\emptyset \neq V \subseteq \widehat{C^*(1, a)}$ abierto con $V \cap \hat{\phi}(\widehat{C^*(1, b)}) = \emptyset$, entonces existe $0 \neq c \in C(\widehat{C^*(1, a)})$ con $\text{sop}(c) \subseteq V$, y entonces $(\hat{\phi})_*(c) = c \circ \hat{\phi} = 0$, lo que contradice la inyectividad de $(\hat{\phi})_*$. Luego $\hat{\phi}(\widehat{C^*(1, b)})$ es denso en $\widehat{C^*(1, a)}$, y por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\|\phi(a)\| &= \|\widehat{\phi(a)}\| \\
&= \sup_{h \in \widehat{C^*(1,b)}} |(\widehat{\phi})_*(\widehat{a})(h)| \\
&= \sup_{h \in \widehat{C^*(1,b)}} |\widehat{a}(\widehat{\phi}(h))| \\
&= \sup_{h' \in \widehat{\phi(C^*(1,b))}} |\widehat{a}(h')| \\
&= \|\widehat{a}\| \\
&= \|a\|.
\end{aligned}$$

Dualidad de Gelfand.

Proposición

La transformada de Gelfand $\mathcal{G} : \text{Id}_{\mathcal{C}_c^*} \rightarrow C_0 \circ \widehat{}$ es un isomorfismo de funtores.

Demostración.

Sea $\phi : A \rightarrow B$ un homomorfismo no degenerado entre las C^* -álgebras conmutativas A y B . Como \mathcal{G} es una transformación natural el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \mathcal{G}_A \downarrow \cong & & \cong \downarrow \mathcal{G}_B \\ C_0(\widehat{A}) & \xrightarrow{(\widehat{\phi})_*} & C_0(\widehat{B}) \end{array}$$

conmuta, y como por el Teorema de Gelfand-Naimark las flechas verticales son isomorfismos, entonces \mathcal{G} es un isomorfismo. \square

Teorema

Los funtores contravariantes $C_0 : \mathcal{T}_{lch} \rightarrow \mathcal{C}_c^*$ y $\hat{} : \mathcal{C}_c^* \rightarrow \mathcal{T}_{lch}$ establecen una dualidad entre las categorías de C^* -álgebras conmutativas y sus homomorfismos no degenerados y la categoría de espacios de Hausdorff localmente compactos y las funciones continuas propias.

Demostración.

Por la Proposición previa la transformada de Gelfand $\mathcal{G} : \text{Id}_{\mathcal{C}_c^*} \rightarrow C_0 \circ \hat{}$ es un isomorfismo. Por otro lado, anteriormente se mostró que existe un isomorfismo $\delta : \text{Id}_{\mathcal{T}_{lch}} \rightarrow \hat{} \circ C_0$. □

Diccionario de la dualidad de Gelfand.

La dualidad entre las categorías \mathcal{C}_c^* y \mathcal{T}_{lch} permite establecer un diccionario entre conceptos topológicos y conceptos C^* -algebraicos:

Topología: X	Álgebra: A = C₀(X)
función propia	homomorfismo
homeomorfismo	automorfismo
compacto	unital
abierto	ideal
abierto denso	ideal esencial
cerrado	cociente
compactificación	unitización
αX	\tilde{A}
βX	$M(A)$
conexo	sin proyecciones no triviales
base numerable	separable
medida regular compleja	funcional lineal positiva

Definición

Si $K \subseteq \mathbb{C}$ es compacto, los agujeros de K son las componentes conexas acotadas de $\mathbb{C} \setminus K$.

Teorema

Sean B un álgebra de Banach con unidad y A una subálgebra de Banach de B tal que $1_B \in A$. Entonces

- (1) $\text{Inv}(A)$ es un subconjunto abierto y cerrado de $A \cap \text{Inv}(B)$.
- (2) Si $a \in A$ entonces $\sigma_B(a) \subseteq \sigma_A(a)$ y $\partial\sigma_A(a) \subseteq \partial\sigma_B(a)$.
- (3) Si $a \in A$ es tal que $\sigma_B(a)$ no tiene agujeros, entonces $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

Demostración.

- (1) Es claro que $\text{Inv}(A)$ es abierto en $A \cap \text{Inv}(B)$. Sea $(a_n) \subseteq \text{Inv}(A)$ tal que $a_n \rightarrow b \in \text{Inv}(B) \cap A$. Como la inversión es continua en $\text{Inv}(B)$, $a_n^{-1} \rightarrow b^{-1}$. Entonces $b^{-1} \in A$. Luego $b \in \text{Inv}(A)$, de donde $\text{Inv}(A)$ es cerrado en $A \cap \text{Inv}(B)$.

- (2) Ya vimos que $\sigma_B(a) \subseteq \sigma_A(a)$. Supongamos que $\lambda_0 \in \partial\sigma_A(a) \subseteq \sigma_A(a)$ y sea $(\lambda_n) \subseteq \rho_A(a)$ tal que $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$. Luego $(a - \lambda_n) \rightarrow (a - \lambda_0)$. Además $(a - \lambda_n) \in \text{Inv}(A)$, y por la parte (1) se sabe que $a - \lambda_0 \notin \text{Inv}(B)$. Entonces $\lambda_0 \in \sigma_B(a)$, y como $(a - \lambda_n) \in \text{Inv}(B)$ converge a $a - \lambda_0$, se concluye que $\lambda_0 \in \partial\sigma_B(a)$. Entonces $\partial\sigma_A(a) \subseteq \partial\sigma_B(a)$.
- (3) Probar que $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$ es equivalente a probar que $\rho_A(a) = \rho_B(a)$. Recordar que $\rho(x) = S_x^{-1}(\text{Inv}(B))$, donde $S_x(\lambda) = x - \lambda$. Como $\text{Inv}(A)$ es abierto y cerrado en $\text{Inv}(B) \cap A$, entonces $\rho_A(a) = S_a^{-1}(\text{Inv}(A))$ es abierto y cerrado en $S_a^{-1}(\text{Inv}(B) \cap A) = \rho_B(a) \cap \mathbb{C} = \rho_B(a)$. Como $\rho_B(a)$ es conexo y $\rho_A(a) \neq \emptyset$ tenemos que $\rho_B(a) = \rho_A(a)$.

Teorema (Permanencia espectral)

Sean B una C^* -álgebra con unidad, A una C^* -subálgebra de B tal que $1_B \in A$ y $a \in A$. Entonces $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

Demostración.

La parte (3) del teorema anterior implica que $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ si $a \in A_{sa}$. Para el caso general basta ver que $\text{Inv}(A) = A \cap \text{Inv}(B)$ (porque esto implica que $\rho_A(a) = \rho_B(a)$). Para esto hay que probar que si $a \in A \cap \text{Inv}(B)$, entonces $a \in \text{Inv}(A)$. Para un tal a se tiene que $a^* \in \text{Inv}(B)$: $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$. Por lo tanto aa^* y $a^*a \in \text{Inv}(B) \cap A$. Entonces existen $b, c \in B$ tales que $(aa^*)b = 1$ y $c(a^*a) = 1$. Luego $a(a^*b) = 1$ y $(ca^*)a = 1$. Entonces el inverso de a en B es $a^*b = ca^*$. Por otro lado, como $aa^* \in \text{Inv}(B) \cap B_{sa}$, entonces $0 \notin \sigma_B(aa^*) = \sigma_A(aa^*)$. Entonces $b = (aa^*)^{-1} \in A$. Por lo tanto $a^*b \in A$. Entonces el inverso de a en B pertenece a A , es decir $a \in \text{Inv}(A)$. En conclusión es $\text{Inv}(A) = A \cap \text{Inv}(B)$. □

Proposición

Sean A una C^* -álgebra unital y $a \in A$ tal que $A = C^*(1, a)$. Si $\phi, \psi : A \rightarrow B$ son homomorfismos unitales de C^* -álgebras, y $\phi(a) = \psi(a)$, entonces $\phi = \psi$.

Demostración. La hipótesis implica $\phi(a^*) = \phi(a)^* = \psi(a)^* = \psi(a^*)$. Sea $A_0 := \{p(a, a^*) : p \in \mathbb{C}\{X, Y\}\}$ (aquí $\mathbb{C}\{X, Y\}$ representa el álgebra de polinomios en dos variables no conmutativas X e Y). Entonces $\overline{A_0} = A$, y $\phi|_{A_0} = \psi|_{A_0}$, y por lo tanto $\phi = \psi$ porque ambos son continuos.

Corolario

Sean $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto, y $\iota \in C(K)$ la inclusión de K en \mathbb{C} : $\iota(z) = z \forall z \in K$. Si $\phi, \psi : C(K) \rightarrow B$ son homomorfismos unitales de C^* -álgebras, y $\phi(\iota) = \psi(\iota)$, entonces $\phi = \psi$.

Demostración. Basta notar que $C^*(1, \iota) = C(K)$ por el teorema de Stone-Weierstrass, y aplicar la Proposición previa.

Lema

Sea a un elemento normal de una C^* -álgebra con unidad A . Entonces la evaluación $ev_a : \widehat{C^*(1, a)} \rightarrow \sigma(a)$ es un homeomorfismo.

Demostración. Como $C^*(1, a)$ es un álgebra de Banach con unidad, ya sabemos que ev_a es continuo y sobreyectivo, y también es inyectivo por la Proposición anterior. Como $\sigma(a)$ y $\widehat{C^*(1, a)}$ son espacios de Hausdorff compactos, entonces ev_a es un homeomorfismo.

Teorema (Cálculo funcional continuo)

Sea a un elemento normal de una C^* -álgebra con unidad A . Entonces existe un único homomorfismo de C^* -álgebras $\tau_a : C(\sigma(a)) \rightarrow A$ tal que $\tau_a(1) = 1$ y $\tau_a(\iota) = a$, donde $\iota : \sigma(a) \rightarrow \mathbb{C}$ es la inclusión. Además τ_a es una isometría con imagen $C^*(1, a)$.

Demostración. La unicidad de τ_a sigue del Corolario anterior.

En cuanto a la existencia, sea $(\text{ev}_a)_* : C(\sigma(a)) \rightarrow C(\widehat{C^*(1, a)})$ el isomorfismo inducido por ev_a , es decir $(\text{ev}_a)_*(f) = f \circ \text{ev}_a$.

Sea $\tau_a : C(\sigma(a)) \rightarrow A$ dada por $\tau_a := \mathcal{G}^{-1} \circ (\text{ev}_a)_*$. Es decir que:

$$\begin{array}{ccc}
 C(\sigma(a)) & \xrightarrow[\cong]{(\text{ev}_a)_*} & C(\widehat{C^*(1, a)}), \\
 & \searrow \cong \tau_a & \swarrow \cong \mathcal{G}^{-1} \\
 & A \supseteq C^*(1, a) &
 \end{array}$$

Entonces τ_a es un homomorfismo unital inyectivo de C^* -álgebras, (y por lo tanto isométrico), cuya imagen es $C^*(1, a)$. Además

$$\text{ev}_{a_*}(\iota) = \iota \circ \text{ev}_a = \widehat{a},$$

y por lo tanto $\tau_a(\iota) = \mathcal{G}^{-1}(\widehat{a}) = a$.

Definición

El homomorfismo τ_a dado por el teorema previo se llama cálculo funcional (continuo) sobre el elemento normal a . En lugar de $\tau_a(f)$ se escribe en general $f(a)$.