

1 Repaso y complementos

- Functorialidad
- Multiplicadores

1 Repaso y complementos

- Functorialidad
- Multiplicadores

2 Teorema de Gelfand-Naimark

- El mapa exponencial y espectros.

Definición

Sea A una C^* -álgebra (o sea que $\|x\|^2 = \|x^*x\| \ \forall x \in A$).

Definición

Sea A una C^* -álgebra (o sea que $\|x\|^2 = \|x^*x\| \ \forall x \in A$).

① $A_{sa} := \{a \in A : a \text{ es autoadjunto } (a^* = a)\}.$

Definición

Sea A una C^* -álgebra (o sea que $\|x\|^2 = \|x^*x\| \ \forall x \in A$).

- 1 $A_{sa} := \{a \in A : a \text{ es autoadjunto } (a^* = a)\}.$
- 2 $\mathcal{P}(A) := \{p \in A : p \text{ es una proyección } (p^*p = p)\}.$

Definición

Sea A una C^* -álgebra (o sea que $\|x\|^2 = \|x^*x\| \ \forall x \in A$).

- 1 $A_{sa} := \{a \in A : a \text{ es autoadjunto } (a^* = a)\}.$
- 2 $\mathcal{P}(A) := \{p \in A : p \text{ es una proyección } (p^*p = p)\}.$
- 3 $\mathcal{U}(A) := \{u \in A : u \text{ es unitario } (u^*u = 1 = uu^*)\}.$

Definición

Sea A una C^* -álgebra (o sea que $\|x\|^2 = \|x^*x\| \ \forall x \in A$).

- 1 $A_{sa} := \{a \in A : a \text{ es autoadjunto } (a^* = a)\}.$
- 2 $\mathcal{P}(A) := \{p \in A : p \text{ es una proyección } (p^*p = p)\}.$
- 3 $\mathcal{U}(A) := \{u \in A : u \text{ es unitario } (u^*u = 1 = uu^*)\}.$
- 4 $\mathcal{N}(A) := \{x \in A : x \text{ es normal } (x^*x = xx^*)\}.$

Definición

Sea A una C^* -álgebra (o sea que $\|x\|^2 = \|x^*x\| \ \forall x \in A$).

- ① $A_{sa} := \{a \in A : a \text{ es autoadjunto } (a^* = a)\}.$
- ② $\mathcal{P}(A) := \{p \in A : p \text{ es una proyección } (p^*p = p)\}.$
- ③ $\mathcal{U}(A) := \{u \in A : u \text{ es unitario } (u^*u = 1 = uu^*)\}.$
- ④ $\mathcal{N}(A) := \{x \in A : x \text{ es normal } (x^*x = xx^*)\}.$

Teorema

Sean A una C^* -álgebra y $x \in \mathcal{N}(A)$. Entonces $\|x\| = r(x)$.

Definición

Sea A una C^* -álgebra (o sea que $\|x\|^2 = \|x^*x\| \ \forall x \in A$).

- ❶ $A_{sa} := \{a \in A : a \text{ es autoadjunto } (a^* = a)\}.$
- ❷ $\mathcal{P}(A) := \{p \in A : p \text{ es una proyección } (p^*p = p)\}.$
- ❸ $\mathcal{U}(A) := \{u \in A : u \text{ es unitario } (u^*u = 1 = uu^*)\}.$
- ❹ $\mathcal{N}(A) := \{x \in A : x \text{ es normal } (x^*x = xx^*)\}.$

Teorema

Sean A una C^* -álgebra y $x \in \mathcal{N}(A)$. Entonces $\|x\| = r(x)$.

Teorema

Sean A una $*$ -álgebra sobre $\mathbb{C}$, y $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ normas sobre A tales que $(A, \|\cdot\|_1)$, $(A, \|\cdot\|_2)$ son C^* -álgebras. Entonces $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$.

Lema

Si A es una C^ -álgebra y $a \in A$, entonces*

Lema

Si A es una C^ -álgebra y $a \in A$, entonces*

Lema

Si A es una C^ -álgebra y $a \in A$, entonces*

$$\|a\| = \sup\{\|ax\| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|xa\| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|xay\| : \|x\|, \|y\| \leq 1\}.$$

Lema

Si A es una C^ -álgebra y $a \in A$, entonces*

$$\|a\| = \sup\{\|ax\| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|xa\| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|xay\| : \|x\|, \|y\| \leq 1\}.$$

Corolario

$L : A \rightarrow B(A)$ tal que $L_a(x) := ax$ es un homomorfismo isométrico de álgebras de Banach (L se llama representación regular izquierda de A).

Lema

Si A es una C^ -álgebra y $a \in A$, entonces*

$$\|a\| = \sup\{\|ax\| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|xa\| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|xay\| : \|x\|, \|y\| \leq 1\}.$$

Corolario

$L : A \rightarrow B(A)$ tal que $L_a(x) := ax$ es un homomorfismo isométrico de álgebras de Banach (L se llama representación regular izquierda de A).

Proposición

Si A es una C^ -álgebra, su norma se extiende (de forma única) a una C^* -norma en $\tilde{A}$, y esta es equivalente a la norma $\|a + \lambda\| = \|a\| + |\lambda|$.*

Lema

Si A es una C^ -álgebra y $a \in A$, entonces*

$$\|a\| = \sup\{\|ax\| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|xa\| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|xay\| : \|x\|, \|y\| \leq 1\}.$$

Corolario

$L : A \rightarrow B(A)$ tal que $L_a(x) := ax$ es un homomorfismo isométrico de álgebras de Banach (L se llama representación regular izquierda de A).

Proposición

Si A es una C^ -álgebra, su norma se extiende (de forma única) a una C^* -norma en $\tilde{A}$, y esta es equivalente a la norma $\|a + \lambda\| = \|a\| + |\lambda|$.*

Lema

Si A es una C^ -álgebra y $a \in A$, entonces*

$$\|a\| = \sup\{\|ax\| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|xa\| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|xay\| : \|x\|, \|y\| \leq 1\}.$$

Corolario

$L : A \rightarrow B(A)$ tal que $L_a(x) := ax$ es un homomorfismo isométrico de álgebras de Banach (L se llama representación regular izquierda de A).

Proposición

Si A es una C^ -álgebra, su norma se extiende (de forma única) a una C^* -norma en $\tilde{A}$, y esta es equivalente a la norma $\|a + \lambda\| = \|a\| + |\lambda|$.*

Teorema (Segal)

Si A es una $$ -álgebra de Banach, B es una C^* -álgebra, y $\phi : A \rightarrow B$ es un $*$ -homomorfismo, entonces $\|\phi\| \leq 1$.*

Categorías:

Categorías:

1 $\mathcal{T}_{ch}$.

Categorías:

1 $\mathcal{T}_{ch}$.

Categorías:

① $\mathcal{T}_{Ich}$. Objetos:

Categorías:

- 1 $\mathcal{T}_{lch}$. *Objetos:* espacios localmente compactos de Hausdorff.

Categorías:

① $\mathcal{T}_{lch}$. *Objetos*: espacios localmente compactos de Hausdorff.

Morfismos:

Categorías:

① $\mathcal{T}_{ch}$. *Objetos*: espacios localmente compactos de Hausdorff.

Morfismos: $X \xrightarrow{f} Y$ funciones continuas *propias*

Categorías:

① $\mathcal{T}_{ch}$. *Objetos*: espacios localmente compactos de Hausdorff.

Morfismos: $X \xrightarrow{f} Y$ funciones continuas propias (f es propia si $f^{-1}(K)$ es compacto cuando K es compacto).

Categorías:

- 1 $\mathcal{T}_{\text{ch}}$. *Objetos*: espacios localmente compactos de Hausdorff.
Morfismos: $X \xrightarrow{f} Y$ funciones continuas propias (f es propia si $f^{-1}(K)$ es compacto cuando K es compacto).
- 2 $\mathcal{B}_c$.

Categorías:

- 1 $\mathcal{T}_{ch}$. *Objetos*: espacios localmente compactos de Hausdorff.
Morfismos: $X \xrightarrow{f} Y$ funciones continuas propias (f es propia si $f^{-1}(K)$ es compacto cuando K es compacto).
- 2 $\mathcal{B}_c$.

Categorías:

① $\mathcal{T}_{ch}$. *Objetos*: espacios localmente compactos de Hausdorff.

Morfismos: $X \xrightarrow{f} Y$ funciones continuas propias (f es propia si $f^{-1}(K)$ es compacto cuando K es compacto).

② $\mathcal{B}_c$. *Objetos*:

Categorías:

① $\mathcal{T}_{ch}$. *Objetos*: espacios localmente compactos de Hausdorff.

Morfismos: $X \xrightarrow{f} Y$ funciones continuas propias (f es propia si $f^{-1}(K)$ es compacto cuando K es compacto).

② $\mathcal{B}_c$. *Objetos*: álgebras de Banach conmutativas.

Categorías:

- 1 $\mathcal{T}_{ch}$. *Objetos*: espacios localmente compactos de Hausdorff.
Morfismos: $X \xrightarrow{f} Y$ funciones continuas propias (f es propia si $f^{-1}(K)$ es compacto cuando K es compacto).
- 2 $\mathcal{B}_c$. *Objetos*: álgebras de Banach conmutativas. *Morfismos*:

Categorías:

- ① $\mathcal{T}_{lch}$. *Objetos*: espacios localmente compactos de Hausdorff.
Morfismos: $X \xrightarrow{f} Y$ funciones continuas propias (f es propia si $f^{-1}(K)$ es compacto cuando K es compacto).
- ② $\mathcal{B}_c$. *Objetos*: álgebras de Banach conmutativas. *Morfismos*: $A \xrightarrow{\phi} B$: homomorfismos continuos tales que $h_b(\phi(A)) \neq 0, \forall h_b \in \widehat{B}$.

Categorías:

- 1 $\mathcal{T}_{lch}$. *Objetos*: espacios localmente compactos de Hausdorff.
Morfismos: $X \xrightarrow{f} Y$ funciones continuas propias (f es propia si $f^{-1}(K)$ es compacto cuando K es compacto).
- 2 $\mathcal{B}_c$. *Objetos*: álgebras de Banach conmutativas. *Morfismos*: $A \xrightarrow{\phi} B$: homomorfismos continuos tales que $h_b(\phi(A)) \neq 0, \forall h_b \in \widehat{B}$.
- 3 $\mathcal{C}_c^*$.

Categorías:

- 1 $\mathcal{T}_{lch}$. *Objetos*: espacios localmente compactos de Hausdorff.
Morfismos: $X \xrightarrow{f} Y$ funciones continuas propias (f es propia si $f^{-1}(K)$ es compacto cuando K es compacto).
- 2 $\mathcal{B}_c$. *Objetos*: álgebras de Banach conmutativas. *Morfismos*: $A \xrightarrow{\phi} B$: homomorfismos continuos tales que $h_b(\phi(A)) \neq 0, \forall h_b \in \widehat{B}$.
- 3 $\mathcal{C}_c^*$.

Categorías:

- ① $\mathcal{T}_{lch}$. *Objetos*: espacios localmente compactos de Hausdorff.
Morfismos: $X \xrightarrow{f} Y$ funciones continuas propias (f es propia si $f^{-1}(K)$ es compacto cuando K es compacto).
- ② $\mathcal{B}_c$. *Objetos*: álgebras de Banach conmutativas. *Morfismos*: $A \xrightarrow{\phi} B$: homomorfismos continuos tales que $h_b(\phi(A)) \neq 0, \forall h_b \in \widehat{B}$.
- ③ $\mathcal{C}_c^*$. subcategoría plena de $\mathcal{B}_c$ cuyos objetos son C^* -álgebras.

Categorías:

- 1 $\mathcal{T}_{lch}$. *Objetos*: espacios localmente compactos de Hausdorff.
Morfismos: $X \xrightarrow{f} Y$ funciones continuas propias (f es propia si $f^{-1}(K)$ es compacto cuando K es compacto).
- 2 $\mathcal{B}_c$. *Objetos*: álgebras de Banach conmutativas. *Morfismos*: $A \xrightarrow{\phi} B$: homomorfismos continuos tales que $h_b(\phi(A)) \neq 0, \forall h_b \in \widehat{B}$.
- 3 $\mathcal{C}_c^*$. subcategoría plena de $\mathcal{B}_c$ cuyos objetos son C^* -álgebras.

Funtores

Categorías:

- 1 $\mathcal{T}_{lch}$. *Objetos*: espacios localmente compactos de Hausdorff.
Morfismos: $X \xrightarrow{f} Y$ funciones continuas propias (f es propia si $f^{-1}(K)$ es compacto cuando K es compacto).
- 2 $\mathcal{B}_c$. *Objetos*: álgebras de Banach conmutativas. *Morfismos*: $A \xrightarrow{\phi} B$: homomorfismos continuos tales que $h_b(\phi(A)) \neq 0, \forall h_b \in \widehat{B}$.
- 3 $\mathcal{C}_c^*$. subcategoría plena de $\mathcal{B}_c$ cuyos objetos son C^* -álgebras.

Funtores

- 1 Functor $\mathcal{C}_0 : \mathcal{T}_{lch} \rightarrow \mathcal{C}_c^*$

Categorías:

- 1 $\mathcal{T}_{lch}$. *Objetos*: espacios localmente compactos de Hausdorff.
Morfismos: $X \xrightarrow{f} Y$ funciones continuas propias (f es propia si $f^{-1}(K)$ es compacto cuando K es compacto).
- 2 $\mathcal{B}_c$. *Objetos*: álgebras de Banach conmutativas. *Morfismos*: $A \xrightarrow{\phi} B$: homomorfismos continuos tales que $h_b(\phi(A)) \neq 0, \forall h_b \in \widehat{B}$.
- 3 $\mathcal{C}_c^*$. subcategoría plena de $\mathcal{B}_c$ cuyos objetos son C^* -álgebras.

Funtores

- 1 Functor $\mathcal{C}_0 : \mathcal{T}_{lch} \rightarrow \mathcal{C}_c^*$

Categorías:

- 1 $\mathcal{T}_{lch}$. *Objetos*: espacios localmente compactos de Hausdorff.
Morfismos: $X \xrightarrow{f} Y$ funciones continuas propias (f es propia si $f^{-1}(K)$ es compacto cuando K es compacto).
- 2 $\mathcal{B}_c$. *Objetos*: álgebras de Banach conmutativas. *Morfismos*: $A \xrightarrow{\phi} B$: homomorfismos continuos tales que $h_b(\phi(A)) \neq 0, \forall h_b \in \widehat{B}$.
- 3 $\mathcal{C}_c^*$. subcategoría plena de $\mathcal{B}_c$ cuyos objetos son C^* -álgebras.

Functores

- 1 Functor $\mathcal{C}_0 : \mathcal{T}_{lch} \rightarrow \mathcal{C}_c^*$ tal que a cada $f : X \rightarrow Y$ corresponde $f_* : C(Y) \rightarrow C(X)$ dado $f_*(b) := b \circ f$ (hay que verificar que f_* es un morfismo en $\mathcal{C}_c^*$).

Categorías:

- 1 $\mathcal{T}_{lch}$. *Objetos*: espacios localmente compactos de Hausdorff.
Morfismos: $X \xrightarrow{f} Y$ funciones continuas propias (f es propia si $f^{-1}(K)$ es compacto cuando K es compacto).
- 2 $\mathcal{B}_c$. *Objetos*: álgebras de Banach conmutativas. *Morfismos*: $A \xrightarrow{\phi} B$: homomorfismos continuos tales que $h_b(\phi(A)) \neq 0, \forall h_b \in \widehat{B}$.
- 3 $\mathcal{C}_c^*$. subcategoría plena de $\mathcal{B}_c$ cuyos objetos son C^* -álgebras.

Funtores

- 1 Functor $\mathcal{C}_0 : \mathcal{T}_{lch} \rightarrow \mathcal{C}_c^*$ tal que a cada $f : X \rightarrow Y$ corresponde $f_* : C(Y) \rightarrow C(X)$ dado $f_*(b) := b \circ f$ (hay que verificar que f_* es un morfismo en $\mathcal{C}_c^*$).
- 2 Functor $\widehat{} : \mathcal{B}_c \rightarrow \mathcal{T}_{lch}$

Categorías:

- 1 $\mathcal{T}_{lch}$. *Objetos*: espacios localmente compactos de Hausdorff.
Morfismos: $X \xrightarrow{f} Y$ funciones continuas propias (f es propia si $f^{-1}(K)$ es compacto cuando K es compacto).
- 2 $\mathcal{B}_c$. *Objetos*: álgebras de Banach conmutativas. *Morfismos*: $A \xrightarrow{\phi} B$: homomorfismos continuos tales que $h_b(\phi(A)) \neq 0, \forall h_b \in \widehat{B}$.
- 3 $\mathcal{C}_c^*$. subcategoría plena de $\mathcal{B}_c$ cuyos objetos son C^* -álgebras.

Funtores

- 1 Functor $\mathcal{C}_0 : \mathcal{T}_{lch} \rightarrow \mathcal{C}_c^*$ tal que a cada $f : X \rightarrow Y$ corresponde $f_* : C(Y) \rightarrow C(X)$ dado $f_*(b) := b \circ f$ (hay que verificar que f_* es un morfismo en $\mathcal{C}_c^*$).
- 2 Functor $\widehat{} : \mathcal{B}_c \rightarrow \mathcal{T}_{lch}$

Categorías:

- 1 $\mathcal{T}_{lch}$. *Objetos*: espacios localmente compactos de Hausdorff. *Morfismos*: $X \xrightarrow{f} Y$ funciones continuas propias (f es propia si $f^{-1}(K)$ es compacto cuando K es compacto).
- 2 $\mathcal{B}_c$. *Objetos*: álgebras de Banach conmutativas. *Morfismos*: $A \xrightarrow{\phi} B$: homomorfismos continuos tales que $h_b(\phi(A)) \neq 0, \forall h_b \in \widehat{B}$.
- 3 $\mathcal{C}_c^*$. subcategoría plena de $\mathcal{B}_c$ cuyos objetos son C^* -álgebras.

Funtores

- 1 Functor $\mathcal{C}_0 : \mathcal{T}_{lch} \rightarrow \mathcal{C}_c^*$ tal que a cada $f : X \rightarrow Y$ corresponde $f_* : C(Y) \rightarrow C(X)$ dado $f_*(b) := b \circ f$ (hay que verificar que f_* es un morfismo en $\mathcal{C}_c^*$).
- 2 Functor $\widehat{} : \mathcal{B}_c \rightarrow \mathcal{T}_{lch}$ tal que a cada $A \xrightarrow{\phi} B$ corresponde $\widehat{B} \xrightarrow{\widehat{\phi}} \widehat{A}$ dada por $\widehat{\phi}(h_b) := h_b \circ \phi, \forall h_b \in \widehat{B}$ (hay que ver que $\widehat{\phi}$ es propia).

Categorías:

- 1 $\mathcal{T}_{lch}$. *Objetos*: espacios localmente compactos de Hausdorff. *Morfismos*: $X \xrightarrow{f} Y$ funciones continuas propias (f es propia si $f^{-1}(K)$ es compacto cuando K es compacto).
- 2 $\mathcal{B}_c$. *Objetos*: álgebras de Banach conmutativas. *Morfismos*: $A \xrightarrow{\phi} B$: homomorfismos continuos tales que $h_b(\phi(A)) \neq 0, \forall h_b \in \widehat{B}$.
- 3 $\mathcal{C}_c^*$. subcategoría plena de $\mathcal{B}_c$ cuyos objetos son C^* -álgebras.

Functores

- 1 Functor $\mathcal{C}_0 : \mathcal{T}_{lch} \rightarrow \mathcal{C}_c^*$ tal que a cada $f : X \rightarrow Y$ corresponde $f_* : C(Y) \rightarrow C(X)$ dado $f_*(b) := b \circ f$ (hay que verificar que f_* es un morfismo en $\mathcal{C}_c^*$).
- 2 Functor $\widehat{} : \mathcal{B}_c \rightarrow \mathcal{T}_{lch}$ tal que a cada $A \xrightarrow{\phi} B$ corresponde $\widehat{B} \xrightarrow{\widehat{\phi}} \widehat{A}$ dada por $\widehat{\phi}(h_b) := h_b \circ \phi, \forall h_b \in \widehat{B}$ (hay que ver que $\widehat{\phi}$ es propia).
- 3 Functores $\widehat{} \circ \mathcal{C}_0 : \mathcal{T}_{lch} \rightarrow \mathcal{C}_c^*$

Categorías:

- 1 $\mathcal{T}_{lch}$. *Objetos*: espacios localmente compactos de Hausdorff. *Morfismos*: $X \xrightarrow{f} Y$ funciones continuas propias (f es propia si $f^{-1}(K)$ es compacto cuando K es compacto).
- 2 $\mathcal{B}_c$. *Objetos*: álgebras de Banach conmutativas. *Morfismos*: $A \xrightarrow{\phi} B$: homomorfismos continuos tales que $h_b(\phi(A)) \neq 0, \forall h_b \in \widehat{B}$.
- 3 $\mathcal{C}_c^*$. subcategoría plena de $\mathcal{B}_c$ cuyos objetos son C^* -álgebras.

Funtores

- 1 Functor $\mathcal{C}_0 : \mathcal{T}_{lch} \rightarrow \mathcal{C}_c^*$ tal que a cada $f : X \rightarrow Y$ corresponde $f_* : C(Y) \rightarrow C(X)$ dado $f_*(b) := b \circ f$ (hay que verificar que f_* es un morfismo en $\mathcal{C}_c^*$).
- 2 Functor $\widehat{} : \mathcal{B}_c \rightarrow \mathcal{T}_{lch}$ tal que a cada $A \xrightarrow{\phi} B$ corresponde $\widehat{B} \xrightarrow{\widehat{\phi}} \widehat{A}$ dada por $\widehat{\phi}(h_b) := h_b \circ \phi, \forall h_b \in \widehat{B}$ (hay que ver que $\widehat{\phi}$ es propia).
- 3 Funtores $\widehat{} \circ \mathcal{C}_0 : \mathcal{T}_{lch} \rightarrow \mathcal{C}_c^*$

Categorías:

- 1 $\mathcal{T}_{lch}$. *Objetos*: espacios localmente compactos de Hausdorff.
Morfismos: $X \xrightarrow{f} Y$ funciones continuas propias (f es propia si $f^{-1}(K)$ es compacto cuando K es compacto).
- 2 $\mathcal{B}_c$. *Objetos*: álgebras de Banach conmutativas. *Morfismos*: $A \xrightarrow{\phi} B$: homomorfismos continuos tales que $h_b(\phi(A)) \neq 0, \forall h_b \in \widehat{B}$.
- 3 $\mathcal{C}_c^*$. subcategoría plena de $\mathcal{B}_c$ cuyos objetos son C^* -álgebras.

Functores

- 1 Functor $\mathcal{C}_0 : \mathcal{T}_{lch} \rightarrow \mathcal{C}_c^*$ tal que a cada $f : X \rightarrow Y$ corresponde $f_* : C(Y) \rightarrow C(X)$ dado $f_*(b) := b \circ f$ (hay que verificar que f_* es un morfismo en $\mathcal{C}_c^*$).
- 2 Functor $\widehat{} : \mathcal{B}_c \rightarrow \mathcal{T}_{lch}$ tal que a cada $A \xrightarrow{\phi} B$ corresponde $\widehat{B} \xrightarrow{\widehat{\phi}} \widehat{A}$ dada por $\widehat{\phi}(h_b) := h_b \circ \phi, \forall h_b \in \widehat{B}$ (hay que ver que $\widehat{\phi}$ es propia).
- 3 Functores $\widehat{} \circ \mathcal{C}_0 : \mathcal{T}_{lch} \rightarrow \mathcal{C}_c^*$ y $\mathcal{C}_0 \circ \widehat{} : \mathcal{B}_c \rightarrow \mathcal{C}_c^*$,

Categorías:

- 1 $\mathcal{T}_{lch}$. *Objetos*: espacios localmente compactos de Hausdorff.
Morfismos: $X \xrightarrow{f} Y$ funciones continuas propias (f es propia si $f^{-1}(K)$ es compacto cuando K es compacto).
- 2 $\mathcal{B}_c$. *Objetos*: álgebras de Banach conmutativas. *Morfismos*: $A \xrightarrow{\phi} B$: homomorfismos continuos tales que $h_b(\phi(A)) \neq 0, \forall h_b \in \widehat{B}$.
- 3 $\mathcal{C}_c^*$. subcategoría plena de $\mathcal{B}_c$ cuyos objetos son C^* -álgebras.

Funtores

- 1 Functor $\mathcal{C}_0 : \mathcal{T}_{lch} \rightarrow \mathcal{C}_c^*$ tal que a cada $f : X \rightarrow Y$ corresponde $f_* : C(Y) \rightarrow C(X)$ dado $f_*(b) := b \circ f$ (hay que verificar que f_* es un morfismo en $\mathcal{C}_c^*$).
- 2 Functor $\widehat{} : \mathcal{B}_c \rightarrow \mathcal{T}_{lch}$ tal que a cada $A \xrightarrow{\phi} B$ corresponde $\widehat{B} \xrightarrow{\widehat{\phi}} \widehat{A}$ dada por $\widehat{\phi}(h_b) := h_b \circ \phi, \forall h_b \in \widehat{B}$ (hay que ver que $\widehat{\phi}$ es propia).
- 3 Funtores $\widehat{} \circ \mathcal{C}_0 : \mathcal{T}_{lch} \rightarrow \mathcal{C}_c^*$ y $\mathcal{C}_0 \circ \widehat{} : \mathcal{B}_c \rightarrow \mathcal{C}_c^*$, composiciones de los anteriores.

Proposición

El functor $\hat{} \circ C_0 : \mathcal{I}_{Ich} \rightarrow \mathcal{I}_{Ich}$ es isomorfo al functor identidad.

Proposición

El functor $\hat{} \circ C_0 : \mathcal{I}_{Ich} \rightarrow \mathcal{I}_{Ich}$ es isomorfo al functor identidad.

Proposición

El functor $\widehat{} \circ C_0 : \mathcal{T}_{Ich} \rightarrow \mathcal{T}_{Ich}$ es isomorfo al functor identidad.

Más precisamente, $\delta : \text{Id}_{\mathcal{T}_{Ich}} \rightarrow \widehat{} \circ C_0$ es un isomorfismo, donde para cada $X \in \text{Ob}(\mathcal{T}_{Ich})$ es $\delta_X : \text{Id}(X) = X \rightarrow \widehat{C_0(X)}$ dado por $\delta_X(x) := \delta_x$, con $\delta_x(a) = a(x)$, $\forall a \in C_0(X)$.

Proposición

El functor $\widehat{} \circ C_0 : \mathcal{T}_{Ich} \rightarrow \mathcal{T}_{Ich}$ es isomorfo al functor identidad.

Más precisamente, $\delta : \text{Id}_{\mathcal{T}_{Ich}} \rightarrow \widehat{} \circ C_0$ es un isomorfismo, donde para cada $X \in \text{Ob}(\mathcal{T}_{Ich})$ es $\delta_X : \text{Id}(X) = X \rightarrow \widehat{C_0(X)}$ dado por $\delta_X(x) := \delta_x$, con $\delta_x(a) = a(x)$, $\forall a \in C_0(X)$.

Demostración.

Proposición

El functor $\widehat{} \circ C_0 : \mathcal{T}_{Ich} \rightarrow \mathcal{T}_{Ich}$ es isomorfo al functor identidad.

Más precisamente, $\delta : \text{Id}_{\mathcal{T}_{Ich}} \rightarrow \widehat{} \circ C_0$ es un isomorfismo, donde para cada $X \in \text{Ob}(\mathcal{T}_{Ich})$ es $\delta_X : \text{Id}(X) = X \rightarrow \widehat{C_0(X)}$ dado por $\delta_X(x) := \delta_x$, con $\delta_x(a) = a(x)$, $\forall a \in C_0(X)$.

Demostración.

Proposición

El functor $\widehat{} \circ C_0 : \mathcal{T}_{Ich} \rightarrow \mathcal{T}_{Ich}$ es isomorfo al functor identidad.

Más precisamente, $\delta : \text{Id}_{\mathcal{T}_{Ich}} \rightarrow \widehat{} \circ C_0$ es un isomorfismo, donde para cada $X \in \text{Ob}(\mathcal{T}_{Ich})$ es $\delta_X : \text{Id}(X) = X \rightarrow \widehat{C_0(X)}$ dado por $\delta_X(x) := \delta_x$, con $\delta_x(a) = a(x)$, $\forall a \in C_0(X)$.

Demostración. Si $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo en $\mathcal{T}_{Ich}$, entonces el diagrama siguiente conmuta:

Proposición

El functor $\widehat{} \circ C_0 : \mathcal{T}_{Ich} \rightarrow \mathcal{T}_{Ich}$ es isomorfo al functor identidad.

Más precisamente, $\delta : \text{Id}_{\mathcal{T}_{Ich}} \rightarrow \widehat{} \circ C_0$ es un isomorfismo, donde para cada $X \in \text{Ob}(\mathcal{T}_{Ich})$ es $\delta_X : \text{Id}(X) = X \rightarrow \widehat{C_0(X)}$ dado por $\delta_X(x) := \delta_x$, con $\delta_x(a) = a(x)$, $\forall a \in C_0(X)$.

Demostración. Si $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo en $\mathcal{T}_{Ich}$, entonces el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y, \\ \delta_X \downarrow \cong & & \cong \downarrow \delta_Y \\ \widehat{C_0(X)} & \xrightarrow[\widehat{(f_*)}]{} & \widehat{C_0(Y)} \end{array}$$

Proposición

El functor $\widehat{} \circ C_0 : \mathcal{T}_{Ich} \rightarrow \mathcal{T}_{Ich}$ es isomorfo al functor identidad.

Más precisamente, $\delta : \text{Id}_{\mathcal{T}_{Ich}} \rightarrow \widehat{} \circ C_0$ es un isomorfismo, donde para cada $X \in \text{Ob}(\mathcal{T}_{Ich})$ es $\delta_X : \text{Id}(X) = X \rightarrow \widehat{C_0(X)}$ dado por $\delta_X(x) := \delta_x$, con $\delta_x(a) = a(x)$, $\forall a \in C_0(X)$.

Demostración. Si $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo en $\mathcal{T}_{Ich}$, entonces el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y, \\ \delta_X \downarrow \cong & & \cong \downarrow \delta_Y \\ \widehat{C_0(X)} & \xrightarrow[\widehat{(f_*)}]{} & \widehat{C_0(Y)} \end{array}$$

En efecto, si $x \in X$ y $b \in C_0(Y)$:

Proposición

El functor $\widehat{} \circ C_0 : \mathcal{T}_{Ich} \rightarrow \mathcal{T}_{Ich}$ es isomorfo al functor identidad.

Más precisamente, $\delta : \text{Id}_{\mathcal{T}_{Ich}} \rightarrow \widehat{} \circ C_0$ es un isomorfismo, donde para cada $X \in \text{Ob}(\mathcal{T}_{Ich})$ es $\delta_X : \text{Id}(X) = X \rightarrow \widehat{C_0(X)}$ dado por $\delta_X(x) := \delta_x$, con $\delta_x(a) = a(x)$, $\forall a \in C_0(X)$.

Demostración. Si $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo en $\mathcal{T}_{Ich}$, entonces el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y, \\ \delta_X \downarrow \cong & & \cong \downarrow \delta_Y \\ \widehat{C_0(X)} & \xrightarrow[\widehat{(f_*)}]{} & \widehat{C_0(Y)} \end{array}$$

En efecto, si $x \in X$ y $b \in C_0(Y)$:

$$\widehat{(f_*)} \circ \delta_X(x)|_b = \widehat{(f_*)} \circ \delta_x|_b$$

Proposición

El functor $\widehat{} \circ C_0 : \mathcal{T}_{Ich} \rightarrow \mathcal{T}_{Ich}$ es isomorfo al functor identidad.

Más precisamente, $\delta : \text{Id}_{\mathcal{T}_{Ich}} \rightarrow \widehat{} \circ C_0$ es un isomorfismo, donde para cada $X \in \text{Ob}(\mathcal{T}_{Ich})$ es $\delta_X : \text{Id}(X) = X \rightarrow \widehat{C_0(X)}$ dado por $\delta_X(x) := \delta_x$, con $\delta_x(a) = a(x)$, $\forall a \in C_0(X)$.

Demostración. Si $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo en $\mathcal{T}_{Ich}$, entonces el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y, \\ \delta_X \downarrow \cong & & \cong \downarrow \delta_Y \\ \widehat{C_0(X)} & \xrightarrow[\widehat{(f_*)}]{} & \widehat{C_0(Y)} \end{array}$$

En efecto, si $x \in X$ y $b \in C_0(Y)$:

$$\widehat{(f_*)} \circ \delta_X(x)|_b = \widehat{(f_*)} \circ \delta_x|_b = \delta_x \circ f_*|_b$$

Proposición

El functor $\widehat{} \circ C_0 : \mathcal{T}_{lch} \rightarrow \mathcal{T}_{lch}$ es isomorfo al functor identidad.

Más precisamente, $\delta : \text{Id}_{\mathcal{T}_{lch}} \rightarrow \widehat{} \circ C_0$ es un isomorfismo, donde para cada $X \in \text{Ob}(\mathcal{T}_{lch})$ es $\delta_X : \text{Id}(X) = X \rightarrow \widehat{C_0(X)}$ dado por $\delta_X(x) := \delta_x$, con $\delta_x(a) = a(x)$, $\forall a \in C_0(X)$.

Demostración. Si $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo en $\mathcal{T}_{lch}$, entonces el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y, \\ \delta_X \downarrow \cong & & \cong \downarrow \delta_Y \\ \widehat{C_0(X)} & \xrightarrow[\widehat{(f_*)}]{} & \widehat{C_0(Y)} \end{array}$$

En efecto, si $x \in X$ y $b \in C_0(Y)$:

$$\widehat{(f_*)} \circ \delta_X(x)|_b = \widehat{(f_*)} \circ \delta_x|_b = \delta_x \circ f_*|_b = \delta_x(b \circ f)$$

Proposición

El functor $\widehat{} \circ C_0 : \mathcal{T}_{Ich} \rightarrow \mathcal{T}_{Ich}$ es isomorfo al functor identidad.

Más precisamente, $\delta : \text{Id}_{\mathcal{T}_{Ich}} \rightarrow \widehat{} \circ C_0$ es un isomorfismo, donde para cada $X \in \text{Ob}(\mathcal{T}_{Ich})$ es $\delta_X : \text{Id}(X) = X \rightarrow \widehat{C_0(X)}$ dado por $\delta_X(x) := \delta_x$, con $\delta_x(a) = a(x)$, $\forall a \in C_0(X)$.

Demostración. Si $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo en $\mathcal{T}_{Ich}$, entonces el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y, \\ \delta_X \downarrow \cong & & \cong \downarrow \delta_Y \\ \widehat{C_0(X)} & \xrightarrow[\widehat{(f_*)}]{} & \widehat{C_0(Y)} \end{array}$$

En efecto, si $x \in X$ y $b \in C_0(Y)$:

$$\widehat{(f_*)} \circ \delta_X(x)|_b = \widehat{(f_*)} \circ \delta_x|_b = \delta_x \circ f_*|_b = \delta_x(b \circ f) = b(f(x))$$

Proposición

El functor $\widehat{} \circ C_0 : \mathcal{T}_{Ich} \rightarrow \mathcal{T}_{Ich}$ es isomorfo al functor identidad.

Más precisamente, $\delta : \text{Id}_{\mathcal{T}_{Ich}} \rightarrow \widehat{} \circ C_0$ es un isomorfismo, donde para cada $X \in \text{Ob}(\mathcal{T}_{Ich})$ es $\delta_X : \text{Id}(X) = X \rightarrow \widehat{C_0(X)}$ dado por $\delta_X(x) := \delta_x$, con $\delta_x(a) = a(x)$, $\forall a \in C_0(X)$.

Demostración. Si $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo en $\mathcal{T}_{Ich}$, entonces el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y, \\ \delta_X \downarrow \cong & & \cong \downarrow \delta_Y \\ \widehat{C_0(X)} & \xrightarrow[\widehat{(f_*)}]{} & \widehat{C_0(Y)} \end{array}$$

En efecto, si $x \in X$ y $b \in C_0(Y)$:

$$\begin{aligned} \widehat{(f_*)} \circ \delta_X(x)|_b &= \widehat{(f_*)} \circ \delta_x|_b = \delta_x \circ f_*|_b = \delta_x(b \circ f) = b(f(x)) \\ &= \delta_Y(f(x))|_b = \delta_Y \circ f(x)|_b, \end{aligned}$$

Proposición

El functor $\widehat{} \circ C_0 : \mathcal{T}_{Ich} \rightarrow \mathcal{T}_{Ich}$ es isomorfo al functor identidad.

Más precisamente, $\delta : \text{Id}_{\mathcal{T}_{Ich}} \rightarrow \widehat{} \circ C_0$ es un isomorfismo, donde para cada $X \in \text{Ob}(\mathcal{T}_{Ich})$ es $\delta_X : \text{Id}(X) = X \rightarrow \widehat{C_0(X)}$ dado por $\delta_X(x) := \delta_x$, con $\delta_x(a) = a(x)$, $\forall a \in C_0(X)$.

Demostración. Si $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo en $\mathcal{T}_{Ich}$, entonces el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y, \\ \delta_X \downarrow \cong & & \cong \downarrow \delta_Y \\ \widehat{C_0(X)} & \xrightarrow[\widehat{(f_*)}]{} & \widehat{C_0(Y)} \end{array}$$

En efecto, si $x \in X$ y $b \in C_0(Y)$:

$$\begin{aligned} \widehat{(f_*)} \circ \delta_X(x)|_b &= \widehat{(f_*)} \circ \delta_x|_b = \delta_x \circ f_*|_b = \delta_x(b \circ f) = b(f(x)) \\ &= \delta_Y(f(x))|_b = \delta_Y \circ f(x)|_b, \text{ y por lo tanto } \widehat{(f_*)} \circ \delta_X = \delta_Y \circ f. \end{aligned}$$

Proposición

La transformada de Gelfand es una transformación natural, más precisamente un morfismo de funtores $\mathcal{G} : \text{Id}_{\mathcal{B}_c} \rightarrow C_0 \circ \hat{}$.

Proposición

La transformada de Gelfand es una transformación natural, más precisamente un morfismo de funtores $\mathcal{G} : \text{Id}_{\mathcal{B}_c} \rightarrow C_0 \circ \hat{}$.

Proposición

La transformada de Gelfand es una transformación natural, más precisamente un morfismo de funtores $\mathcal{G} : \text{Id}_{\mathcal{B}_c} \rightarrow C_0 \circ \hat{}$.

Demostración.

Proposición

La transformada de Gelfand es una transformación natural, más precisamente un morfismo de funtores $\mathcal{G} : \text{Id}_{\mathcal{B}_c} \rightarrow \text{C}_0 \circ \hat{}$.

Demostración.

Proposición

La transformada de Gelfand es una transformación natural, más precisamente un morfismo de funtores $\mathcal{G} : \text{Id}_{\mathcal{B}_c} \rightarrow C_0 \circ \widehat{}$.

Demostración. Sea $\phi : A \rightarrow B$ un homomorfismo no degenerado entre las álgebras de Banach conmutativas A y B . Hay que ver que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \mathcal{G}_A \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}_B \\ C_0(\widehat{A}) & \xrightarrow{(\widehat{\phi})_*} & C_0(\widehat{B}) \end{array}$$

conmuta.

Proposición

La transformada de Gelfand es una transformación natural, más precisamente un morfismo de funtores $\mathcal{G} : \text{Id}_{\mathcal{B}_c} \rightarrow C_0 \circ \widehat{}$.

Demostración. Sea $\phi : A \rightarrow B$ un homomorfismo no degenerado entre las álgebras de Banach conmutativas A y B . Hay que ver que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \mathcal{G}_A \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}_B \\ C_0(\widehat{A}) & \xrightarrow{(\widehat{\phi})_*} & C_0(\widehat{B}) \end{array}$$

conmuta. Tomemos $a \in A$ y $h \in \widehat{B}$.

Proposición

La transformada de Gelfand es una transformación natural, más precisamente un morfismo de funtores $\mathcal{G} : \text{Id}_{\mathcal{B}_c} \rightarrow C_0 \circ \widehat{}$.

Demostración. Sea $\phi : A \rightarrow B$ un homomorfismo no degenerado entre las álgebras de Banach conmutativas A y B . Hay que ver que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \mathcal{G}_A \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}_B \\ C_0(\widehat{A}) & \xrightarrow{(\widehat{\phi})_*} & C_0(\widehat{B}) \end{array}$$

conmuta. Tomemos $a \in A$ y $h \in \widehat{B}$. Entonces:

Proposición

La transformada de Gelfand es una transformación natural, más precisamente un morfismo de funtores $\mathcal{G} : \text{Id}_{\mathcal{B}_c} \rightarrow C_0 \circ \widehat{}$.

Demostración. Sea $\phi : A \rightarrow B$ un homomorfismo no degenerado entre las álgebras de Banach conmutativas A y B . Hay que ver que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \mathcal{G}_A \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}_B \\ C_0(\widehat{A}) & \xrightarrow{(\widehat{\phi})_*} & C_0(\widehat{B}) \end{array}$$

conmuta. Tomemos $a \in A$ y $h \in \widehat{B}$. Entonces:

$$\mathcal{G}_B \circ \phi(a)|_h = \mathcal{G}_B(\phi(a))|_h$$

Proposición

La transformada de Gelfand es una transformación natural, más precisamente un morfismo de funtores $\mathcal{G} : \text{Id}_{\mathcal{B}_c} \rightarrow C_0 \circ \widehat{}$.

Demostración. Sea $\phi : A \rightarrow B$ un homomorfismo no degenerado entre las álgebras de Banach conmutativas A y B . Hay que ver que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \mathcal{G}_A \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}_B \\ C_0(\widehat{A}) & \xrightarrow{(\widehat{\phi})_*} & C_0(\widehat{B}) \end{array}$$

conmuta. Tomemos $a \in A$ y $h \in \widehat{B}$. Entonces:

$$\mathcal{G}_B \circ \phi(a)|_h = \mathcal{G}_B(\phi(a))|_h = \widehat{\phi(a)}(h)$$

Proposición

La transformada de Gelfand es una transformación natural, más precisamente un morfismo de funtores $\mathcal{G} : \text{Id}_{\mathcal{B}_c} \rightarrow C_0 \circ \widehat{}$.

Demostración. Sea $\phi : A \rightarrow B$ un homomorfismo no degenerado entre las álgebras de Banach conmutativas A y B . Hay que ver que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \mathcal{G}_A \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}_B \\ C_0(\widehat{A}) & \xrightarrow{(\widehat{\phi})_*} & C_0(\widehat{B}) \end{array}$$

conmuta. Tomemos $a \in A$ y $h \in \widehat{B}$. Entonces:

$$\mathcal{G}_B \circ \phi(a)|_h = \mathcal{G}_B(\phi(a))|_h = \widehat{\phi(a)}(h) = h(\phi(a))$$

Proposición

La transformada de Gelfand es una transformación natural, más precisamente un morfismo de funtores $\mathcal{G} : \text{Id}_{\mathcal{B}_c} \rightarrow C_0 \circ \widehat{}$.

Demostración. Sea $\phi : A \rightarrow B$ un homomorfismo no degenerado entre las álgebras de Banach conmutativas A y B . Hay que ver que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \mathcal{G}_A \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}_B \\ C_0(\widehat{A}) & \xrightarrow{(\widehat{\phi})_*} & C_0(\widehat{B}) \end{array}$$

conmuta. Tomemos $a \in A$ y $h \in \widehat{B}$. Entonces:

$$\mathcal{G}_B \circ \phi(a)|_h = \mathcal{G}_B(\phi(a))|_h = \widehat{\phi(a)}(h) = h(\phi(a)) = h \circ \phi(a)$$

Proposición

La transformada de Gelfand es una transformación natural, más precisamente un morfismo de funtores $\mathcal{G} : \text{Id}_{\mathcal{B}_c} \rightarrow C_0 \circ \widehat{}$.

Demostración. Sea $\phi : A \rightarrow B$ un homomorfismo no degenerado entre las álgebras de Banach conmutativas A y B . Hay que ver que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \mathcal{G}_A \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}_B \\ C_0(\widehat{A}) & \xrightarrow{(\widehat{\phi})_*} & C_0(\widehat{B}) \end{array}$$

conmuta. Tomemos $a \in A$ y $h \in \widehat{B}$. Entonces:

$$\mathcal{G}_B \circ \phi(a)|_h = \mathcal{G}_B(\phi(a))|_h = \widehat{\phi(a)}(h) = h(\phi(a)) = h \circ \phi(a) = \widehat{\phi}(h)(a)$$

Proposición

La transformada de Gelfand es una transformación natural, más precisamente un morfismo de funtores $\mathcal{G} : \text{Id}_{\mathcal{B}_c} \rightarrow C_0 \circ \widehat{}$.

Demostración. Sea $\phi : A \rightarrow B$ un homomorfismo no degenerado entre las álgebras de Banach conmutativas A y B . Hay que ver que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \mathcal{G}_A \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}_B \\ C_0(\widehat{A}) & \xrightarrow{(\widehat{\phi})_*} & C_0(\widehat{B}) \end{array}$$

conmuta. Tomemos $a \in A$ y $h \in \widehat{B}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_B \circ \phi(a)|_h &= \mathcal{G}_B(\phi(a))|_h = \widehat{\phi(a)}(h) = h(\phi(a)) = h \circ \phi(a) = \widehat{\phi}(h)(a) \\ &= \widehat{a}(\widehat{\phi}(h)) \end{aligned}$$

Proposición

La transformada de Gelfand es una transformación natural, más precisamente un morfismo de funtores $\mathcal{G} : \text{Id}_{\mathcal{B}_c} \rightarrow C_0 \circ \widehat{}$.

Demostración. Sea $\phi : A \rightarrow B$ un homomorfismo no degenerado entre las álgebras de Banach conmutativas A y B . Hay que ver que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \mathcal{G}_A \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}_B \\ C_0(\widehat{A}) & \xrightarrow{(\widehat{\phi})_*} & C_0(\widehat{B}) \end{array}$$

conmuta. Tomemos $a \in A$ y $h \in \widehat{B}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_B \circ \phi(a)|_h &= \mathcal{G}_B(\phi(a))|_h = \widehat{\phi(a)}(h) = h(\phi(a)) = h \circ \phi(a) = \widehat{\phi}(h)(a) \\ &= \widehat{a}(\widehat{\phi}(h)) = \widehat{a} \circ \widehat{\phi}(h) \end{aligned}$$

Proposición

La transformada de Gelfand es una transformación natural, más precisamente un morfismo de funtores $\mathcal{G} : \text{Id}_{\mathcal{B}_c} \rightarrow C_0 \circ \widehat{}$.

Demostración. Sea $\phi : A \rightarrow B$ un homomorfismo no degenerado entre las álgebras de Banach conmutativas A y B . Hay que ver que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \mathcal{G}_A \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}_B \\ C_0(\widehat{A}) & \xrightarrow{(\widehat{\phi})_*} & C_0(\widehat{B}) \end{array}$$

conmuta. Tomemos $a \in A$ y $h \in \widehat{B}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_B \circ \phi(a)|_h &= \mathcal{G}_B(\phi(a))|_h = \widehat{\phi(a)}(h) = h(\phi(a)) = h \circ \phi(a) = \widehat{\phi}(h)(a) \\ &= \widehat{a}(\widehat{\phi}(h)) = \widehat{a} \circ \widehat{\phi}(h) = (\widehat{\phi})_*(\widehat{a})|_h \end{aligned}$$

Proposición

La transformada de Gelfand es una transformación natural, más precisamente un morfismo de funtores $\mathcal{G} : \text{Id}_{\mathcal{B}_c} \rightarrow C_0 \circ \widehat{}$.

Demostración. Sea $\phi : A \rightarrow B$ un homomorfismo no degenerado entre las álgebras de Banach conmutativas A y B . Hay que ver que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \mathcal{G}_A \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}_B \\ C_0(\widehat{A}) & \xrightarrow{(\widehat{\phi})_*} & C_0(\widehat{B}) \end{array}$$

conmuta. Tomemos $a \in A$ y $h \in \widehat{B}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_B \circ \phi(a)|_h &= \mathcal{G}_B(\phi(a))|_h = \widehat{\phi(a)}(h) = h(\phi(a)) = h \circ \phi(a) = \widehat{\phi}(h)(a) \\ &= \widehat{a}(\widehat{\phi}(h)) = \widehat{a} \circ \widehat{\phi}(h) = (\widehat{\phi})_*(\widehat{a})|_h = (\widehat{\phi})_*(\mathcal{G}_A(a))|_h \end{aligned}$$

Proposición

La transformada de Gelfand es una transformación natural, más precisamente un morfismo de funtores $\mathcal{G} : \text{Id}_{\mathcal{B}_c} \rightarrow C_0 \circ \widehat{}$.

Demostración. Sea $\phi : A \rightarrow B$ un homomorfismo no degenerado entre las álgebras de Banach conmutativas A y B . Hay que ver que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \mathcal{G}_A \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}_B \\ C_0(\widehat{A}) & \xrightarrow{(\widehat{\phi})_*} & C_0(\widehat{B}) \end{array}$$

conmuta. Tomemos $a \in A$ y $h \in \widehat{B}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_B \circ \phi(a)|_h &= \mathcal{G}_B(\phi(a))|_h = \widehat{\phi(a)}(h) = h(\phi(a)) = h \circ \phi(a) = \widehat{\phi}(h)(a) \\ &= \widehat{a}(\widehat{\phi}(h)) = \widehat{a} \circ \widehat{\phi}(h) = (\widehat{\phi})_*(\widehat{a})|_h = (\widehat{\phi})_*(\mathcal{G}_A(a))|_h = (\widehat{\phi})_* \circ \mathcal{G}_A(a)|_h, \end{aligned}$$

Proposición

La transformada de Gelfand es una transformación natural, más precisamente un morfismo de funtores $\mathcal{G} : \text{Id}_{\mathcal{B}_c} \rightarrow C_0 \circ \widehat{}$.

Demostración. Sea $\phi : A \rightarrow B$ un homomorfismo no degenerado entre las álgebras de Banach conmutativas A y B . Hay que ver que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \mathcal{G}_A \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}_B \\ C_0(\widehat{A}) & \xrightarrow{(\widehat{\phi})_*} & C_0(\widehat{B}) \end{array}$$

conmuta. Tomemos $a \in A$ y $h \in \widehat{B}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_B \circ \phi(a)|_h &= \mathcal{G}_B(\phi(a))|_h = \widehat{\phi(a)}(h) = h(\phi(a)) = h \circ \phi(a) = \widehat{\phi}(h)(a) \\ &= \widehat{a}(\widehat{\phi}(h)) = \widehat{a} \circ \widehat{\phi}(h) = (\widehat{\phi})_*(\widehat{a})|_h = (\widehat{\phi})_*(\mathcal{G}_A(a))|_h = (\widehat{\phi})_* \circ \mathcal{G}_A(a)|_h, \end{aligned}$$

por lo tanto $\mathcal{G}_B \circ \phi = (\widehat{\phi})_* \circ \mathcal{G}_A$.

Definición

Sea A una C^ -álgebra. Se dice que $(L, R) \in B(A) \times B(A)$ es un multiplicador de A (o doble centralizador de A) si:*

Definición

Sea A una C^ -álgebra. Se dice que $(L, R) \in B(A) \times B(A)$ es un multiplicador de A (o doble centralizador de A) si:*

Definición

Sea A una C^* -álgebra. Se dice que $(L, R) \in B(A) \times B(A)$ es un multiplicador de A (o doble centralizador de A) si:

$$L(xy) = L(x)y \quad \text{para todos } x, y \in A,$$

$$R(xy) = xR(y) \quad \text{para todos } x, y \in A,$$

$$xL(y) = R(x)y \quad \text{para todos } x, y \in A.$$

Definición

Sea A una C^* -álgebra. Se dice que $(L, R) \in B(A) \times B(A)$ es un multiplicador de A (o doble centralizador de A) si:

$$L(xy) = L(x)y \quad \text{para todos } x, y \in A,$$

$$R(xy) = xR(y) \quad \text{para todos } x, y \in A,$$

$$xL(y) = R(x)y \quad \text{para todos } x, y \in A.$$

Ejemplo

Si $A \triangleleft B$ y $b \in B$, sean $L_b, R_b : A \rightarrow A$ definidos por $L_b(x) = bx$ y $R_b(x) = xb$ para todo $x \in A$. Entonces (L_b, R_b) es un multiplicador de A :

Definición

Sea A una C^* -álgebra. Se dice que $(L, R) \in B(A) \times B(A)$ es un multiplicador de A (o doble centralizador de A) si:

$$L(xy) = L(x)y \quad \text{para todos } x, y \in A,$$

$$R(xy) = xR(y) \quad \text{para todos } x, y \in A,$$

$$xL(y) = R(x)y \quad \text{para todos } x, y \in A.$$

Ejemplo

Si $A \triangleleft B$ y $b \in B$, sean $L_b, R_b : A \rightarrow A$ definidos por $L_b(x) = bx$ y $R_b(x) = xb$ para todo $x \in A$. Entonces (L_b, R_b) es un multiplicador de A :

Definición

Sea A una C^* -álgebra. Se dice que $(L, R) \in B(A) \times B(A)$ es un multiplicador de A (o doble centralizador de A) si:

$$L(xy) = L(x)y \quad \text{para todos } x, y \in A,$$

$$R(xy) = xR(y) \quad \text{para todos } x, y \in A,$$

$$xL(y) = R(x)y \quad \text{para todos } x, y \in A.$$

Ejemplo

Si $A \triangleleft B$ y $b \in B$, sean $L_b, R_b : A \rightarrow A$ definidos por $L_b(x) = bx$ y $R_b(x) = xb$ para todo $x \in A$. Entonces (L_b, R_b) es un multiplicador de A :

$$L_a(xy) = axy = L_a(x)y$$

Definición

Sea A una C^* -álgebra. Se dice que $(L, R) \in B(A) \times B(A)$ es un multiplicador de A (o doble centralizador de A) si:

$$L(xy) = L(x)y \quad \text{para todos } x, y \in A,$$

$$R(xy) = xR(y) \quad \text{para todos } x, y \in A,$$

$$xL(y) = R(x)y \quad \text{para todos } x, y \in A.$$

Ejemplo

Si $A \triangleleft B$ y $b \in B$, sean $L_b, R_b : A \rightarrow A$ definidos por $L_b(x) = bx$ y $R_b(x) = xb$ para todo $x \in A$. Entonces (L_b, R_b) es un multiplicador de A :

$$L_a(xy) = axy = L_a(x)y \quad xL_a(y) = xay = R_a(x)y$$

Definición

Sea A una C^* -álgebra. Se dice que $(L, R) \in B(A) \times B(A)$ es un multiplicador de A (o doble centralizador de A) si:

$$L(xy) = L(x)y \quad \text{para todos } x, y \in A,$$

$$R(xy) = xR(y) \quad \text{para todos } x, y \in A,$$

$$xL(y) = R(x)y \quad \text{para todos } x, y \in A.$$

Ejemplo

Si $A \triangleleft B$ y $b \in B$, sean $L_b, R_b : A \rightarrow A$ definidos por $L_b(x) = bx$ y $R_b(x) = xb$ para todo $x \in A$. Entonces (L_b, R_b) es un multiplicador de A :

$$L_a(xy) = axy = L_a(x)y \quad xL_a(y) = xay = R_a(x)y$$

Tenemos una inclusión natural isométrica $\iota : A \hookrightarrow M(A)$ dada por $\iota(a) := (L_a, R_a)$ (en $M(A)$ se considera $\|(L, R)\| := \max\{\|L\|, \|R\|\}$).

Sea $M(A) := \{(L, R) : (L, R) \text{ es un multiplicador de } A\}$. Definimos operaciones $+, \cdot : M(A) \times M(A) \rightarrow M(A)$

Sea $M(A) := \{(L, R) : (L, R) \text{ es un multiplicador de } A\}$. Definimos operaciones $+, \cdot : M(A) \times M(A) \rightarrow M(A)$ y $*$: $M(A) \rightarrow M(A)$ mediante:

Sea $M(A) := \{(L, R) : (L, R) \text{ es un multiplicador de } A\}$. Definimos operaciones $+, \cdot : M(A) \times M(A) \rightarrow M(A)$ y $*$: $M(A) \rightarrow M(A)$ mediante:

$$(L_1, R_1) + (L_2, R_2) = (L_1 + L_2, R_1 + R_2)$$

Sea $M(A) := \{(L, R) : (L, R) \text{ es un multiplicador de } A\}$. Definimos operaciones $+, \cdot : M(A) \times M(A) \rightarrow M(A)$ y $*$: $M(A) \rightarrow M(A)$ mediante:

$$(L_1, R_1) + (L_2, R_2) = (L_1 + L_2, R_1 + R_2)$$

$$(L_1, R_1) \cdot (L_2, R_2) = (L_1 L_2, R_2 R_1)$$

Sea $M(A) := \{(L, R) : (L, R) \text{ es un multiplicador de } A\}$. Definimos operaciones $+, \cdot : M(A) \times M(A) \rightarrow M(A)$ y $*$: $M(A) \rightarrow M(A)$ mediante:

$$(L_1, R_1) + (L_2, R_2) = (L_1 + L_2, R_1 + R_2)$$

$$(L_1, R_1) \cdot (L_2, R_2) = (L_1 L_2, R_2 R_1)$$

$$(L, R)^* = (R^*, L^*), \text{ donde } T^* : A \rightarrow A \text{ es } T^*(x) = (T(x^*))^*$$

Sea $M(A) := \{(L, R) : (L, R) \text{ es un multiplicador de } A\}$. Definimos operaciones $+, \cdot : M(A) \times M(A) \rightarrow M(A)$ y $*$: $M(A) \rightarrow M(A)$ mediante:

$$(L_1, R_1) + (L_2, R_2) = (L_1 + L_2, R_1 + R_2)$$

$$(L_1, R_1) \cdot (L_2, R_2) = (L_1 L_2, R_2 R_1)$$

$$(L, R)^* = (R^*, L^*), \text{ donde } T^* : A \rightarrow A \text{ es } T^*(x) = (T(x^*))^*$$

Teorema

$M(A)$ es una C^* -álgebra con unidad con $\|(S, T)\| := \max\{\|S\|, \|T\|\}$.

Sea $M(A) := \{(L, R) : (L, R) \text{ es un multiplicador de } A\}$. Definimos operaciones $+, \cdot : M(A) \times M(A) \rightarrow M(A)$ y $*$: $M(A) \rightarrow M(A)$ mediante:

$$(L_1, R_1) + (L_2, R_2) = (L_1 + L_2, R_1 + R_2)$$

$$(L_1, R_1) \cdot (L_2, R_2) = (L_1 L_2, R_2 R_1)$$

$$(L, R)^* = (R^*, L^*), \text{ donde } T^* : A \rightarrow A \text{ es } T^*(x) = (T(x^*))^*$$

Teorema

$M(A)$ es una C^* -álgebra con unidad con $\|(S, T)\| := \max\{\|S\|, \|T\|\}$.

Sea $M(A) := \{(L, R) : (L, R) \text{ es un multiplicador de } A\}$. Definimos operaciones $+, \cdot : M(A) \times M(A) \rightarrow M(A)$ y $*$: $M(A) \rightarrow M(A)$ mediante:

$$(L_1, R_1) + (L_2, R_2) = (L_1 + L_2, R_1 + R_2)$$

$$(L_1, R_1) \cdot (L_2, R_2) = (L_1 L_2, R_2 R_1)$$

$$(L, R)^* = (R^*, L^*), \text{ donde } T^* : A \rightarrow A \text{ es } T^*(x) = (T(x^*))^*$$

Teorema

$M(A)$ es una C^* -álgebra con unidad con $\|(S, T)\| := \max\{\|S\|, \|T\|\}$.

Demostración.

Sea $M(A) := \{(L, R) : (L, R) \text{ es un multiplicador de } A\}$. Definimos operaciones $+, \cdot : M(A) \times M(A) \rightarrow M(A)$ y $*$: $M(A) \rightarrow M(A)$ mediante:

$$(L_1, R_1) + (L_2, R_2) = (L_1 + L_2, R_1 + R_2)$$

$$(L_1, R_1) \cdot (L_2, R_2) = (L_1 L_2, R_2 R_1)$$

$$(L, R)^* = (R^*, L^*), \text{ donde } T^* : A \rightarrow A \text{ es } T^*(x) = (T(x^*))^*$$

Teorema

$M(A)$ es una C^* -álgebra con unidad con $\|(S, T)\| := \max\{\|S\|, \|T\|\}$.

Demostración.

Sea $M(A) := \{(L, R) : (L, R) \text{ es un multiplicador de } A\}$. Definimos operaciones $+, \cdot : M(A) \times M(A) \rightarrow M(A)$ y $*$: $M(A) \rightarrow M(A)$ mediante:

$$(L_1, R_1) + (L_2, R_2) = (L_1 + L_2, R_1 + R_2)$$

$$(L_1, R_1) \cdot (L_2, R_2) = (L_1 L_2, R_2 R_1)$$

$$(L, R)^* = (R^*, L^*), \text{ donde } T^* : A \rightarrow A \text{ es } T^*(x) = (T(x^*))^*$$

Teorema

$M(A)$ es una C^* -álgebra con unidad con $\|(S, T)\| := \max\{\|S\|, \|T\|\}$.

Demostración. Es rutinario verificar que $M(A)$ es una $*$ -álgebra normada, con unidad (Id, Id) .

Sea $M(A) := \{(L, R) : (L, R) \text{ es un multiplicador de } A\}$. Definimos operaciones $+, \cdot : M(A) \times M(A) \rightarrow M(A)$ y $*$: $M(A) \rightarrow M(A)$ mediante:

$$(L_1, R_1) + (L_2, R_2) = (L_1 + L_2, R_1 + R_2)$$

$$(L_1, R_1) \cdot (L_2, R_2) = (L_1 L_2, R_2 R_1)$$

$$(L, R)^* = (R^*, L^*), \text{ donde } T^* : A \rightarrow A \text{ es } T^*(x) = (T(x^*))^*$$

Teorema

$M(A)$ es una C^* -álgebra con unidad con $\|(S, T)\| := \max\{\|S\|, \|T\|\}$.

Demostración. Es rutinario verificar que $M(A)$ es una $*$ -álgebra normada, con unidad (Id, Id) . Es cerrada $B(A) \times B(A)$, y por lo tanto es un álgebra de Banach.

Sea $M(A) := \{(L, R) : (L, R) \text{ es un multiplicador de } A\}$. Definimos operaciones $+, \cdot : M(A) \times M(A) \rightarrow M(A)$ y $*$: $M(A) \rightarrow M(A)$ mediante:

$$(L_1, R_1) + (L_2, R_2) = (L_1 + L_2, R_1 + R_2)$$

$$(L_1, R_1) \cdot (L_2, R_2) = (L_1 L_2, R_2 R_1)$$

$$(L, R)^* = (R^*, L^*), \text{ donde } T^* : A \rightarrow A \text{ es } T^*(x) = (T(x^*))^*$$

Teorema

$M(A)$ es una C^* -álgebra con unidad con $\|(S, T)\| := \max\{\|S\|, \|T\|\}$.

Demostración. Es rutinario verificar que $M(A)$ es una $*$ -álgebra normada, con unidad (Id, Id) . Es cerrada $B(A) \times B(A)$, y por lo tanto es un álgebra de Banach. Si $(L, R) \in M(A)$ entonces $\|L\| = \|(L, R)\| = \|R\|$:

Sea $M(A) := \{(L, R) : (L, R) \text{ es un multiplicador de } A\}$. Definimos operaciones $+, \cdot : M(A) \times M(A) \rightarrow M(A)$ y $*$: $M(A) \rightarrow M(A)$ mediante:

$$(L_1, R_1) + (L_2, R_2) = (L_1 + L_2, R_1 + R_2)$$

$$(L_1, R_1) \cdot (L_2, R_2) = (L_1 L_2, R_2 R_1)$$

$$(L, R)^* = (R^*, L^*), \text{ donde } T^* : A \rightarrow A \text{ es } T^*(x) = (T(x^*))^*$$

Teorema

$M(A)$ es una C^* -álgebra con unidad con $\|(S, T)\| := \max\{\|S\|, \|T\|\}$.

Demostración. Es rutinario verificar que $M(A)$ es una $*$ -álgebra normada, con unidad (Id, Id) . Es cerrada $B(A) \times B(A)$, y por lo tanto es un álgebra de Banach. Si $(L, R) \in M(A)$ entonces $\|L\| = \|(L, R)\| = \|R\|$:

$$\|L\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Lx\|$$

Sea $M(A) := \{(L, R) : (L, R) \text{ es un multiplicador de } A\}$. Definimos operaciones $+, \cdot : M(A) \times M(A) \rightarrow M(A)$ y $*$: $M(A) \rightarrow M(A)$ mediante:

$$(L_1, R_1) + (L_2, R_2) = (L_1 + L_2, R_1 + R_2)$$

$$(L_1, R_1) \cdot (L_2, R_2) = (L_1 L_2, R_2 R_1)$$

$$(L, R)^* = (R^*, L^*), \text{ donde } T^* : A \rightarrow A \text{ es } T^*(x) = (T(x^*))^*$$

Teorema

$M(A)$ es una C^* -álgebra con unidad con $\|(S, T)\| := \max\{\|S\|, \|T\|\}$.

Demostración. Es rutinario verificar que $M(A)$ es una $*$ -álgebra normada, con unidad (Id, Id) . Es cerrada $B(A) \times B(A)$, y por lo tanto es un álgebra de Banach. Si $(L, R) \in M(A)$ entonces $\|L\| = \|(L, R)\| = \|R\|$:

$$\|L\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Lx\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \left\{ \sup_{\|y\| \leq 1} \|yLx\| \right\}$$

Sea $M(A) := \{(L, R) : (L, R) \text{ es un multiplicador de } A\}$. Definimos operaciones $+, \cdot : M(A) \times M(A) \rightarrow M(A)$ y $*$: $M(A) \rightarrow M(A)$ mediante:

$$(L_1, R_1) + (L_2, R_2) = (L_1 + L_2, R_1 + R_2)$$

$$(L_1, R_1) \cdot (L_2, R_2) = (L_1 L_2, R_2 R_1)$$

$$(L, R)^* = (R^*, L^*), \text{ donde } T^* : A \rightarrow A \text{ es } T^*(x) = (T(x^*))^*$$

Teorema

$M(A)$ es una C^* -álgebra con unidad con $\|(S, T)\| := \max\{\|S\|, \|T\|\}$.

Demostración. Es rutinario verificar que $M(A)$ es una $*$ -álgebra normada, con unidad (Id, Id) . Es cerrada $B(A) \times B(A)$, y por lo tanto es un álgebra de Banach. Si $(L, R) \in M(A)$ entonces $\|L\| = \|(L, R)\| = \|R\|$:

$$\begin{aligned} \|L\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Lx\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \left\{ \sup_{\|y\| \leq 1} \|yLx\| \right\} \\ &= \sup_{\|y\| \leq 1} \left\{ \sup_{\|x\| \leq 1} \|R(y)x\| \right\} \end{aligned}$$

Sea $M(A) := \{(L, R) : (L, R) \text{ es un multiplicador de } A\}$. Definimos operaciones $+, \cdot : M(A) \times M(A) \rightarrow M(A)$ y $*$: $M(A) \rightarrow M(A)$ mediante:

$$(L_1, R_1) + (L_2, R_2) = (L_1 + L_2, R_1 + R_2)$$

$$(L_1, R_1) \cdot (L_2, R_2) = (L_1 L_2, R_2 R_1)$$

$$(L, R)^* = (R^*, L^*), \text{ donde } T^* : A \rightarrow A \text{ es } T^*(x) = (T(x^*))^*$$

Teorema

$M(A)$ es una C^* -álgebra con unidad con $\|(S, T)\| := \max\{\|S\|, \|T\|\}$.

Demostración. Es rutinario verificar que $M(A)$ es una $*$ -álgebra normada, con unidad (Id, Id) . Es cerrada $B(A) \times B(A)$, y por lo tanto es un álgebra de Banach. Si $(L, R) \in M(A)$ entonces $\|L\| = \|(L, R)\| = \|R\|$:

$$\begin{aligned} \|L\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Lx\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \left\{ \sup_{\|y\| \leq 1} \|yLx\| \right\} \\ &= \sup_{\|y\| \leq 1} \left\{ \sup_{\|x\| \leq 1} \|R(y)x\| \right\} = \sup_{\|y\| \leq 1} \|Ry\| \end{aligned}$$

Sea $M(A) := \{(L, R) : (L, R) \text{ es un multiplicador de } A\}$. Definimos operaciones $+, \cdot : M(A) \times M(A) \rightarrow M(A)$ y $*$: $M(A) \rightarrow M(A)$ mediante:

$$(L_1, R_1) + (L_2, R_2) = (L_1 + L_2, R_1 + R_2)$$

$$(L_1, R_1) \cdot (L_2, R_2) = (L_1 L_2, R_2 R_1)$$

$$(L, R)^* = (R^*, L^*), \text{ donde } T^* : A \rightarrow A \text{ es } T^*(x) = (T(x^*))^*$$

Teorema

$M(A)$ es una C^* -álgebra con unidad con $\|(S, T)\| := \max\{\|S\|, \|T\|\}$.

Demostración. Es rutinario verificar que $M(A)$ es una $*$ -álgebra normada, con unidad (Id, Id) . Es cerrada $B(A) \times B(A)$, y por lo tanto es un álgebra de Banach. Si $(L, R) \in M(A)$ entonces $\|L\| = \|(L, R)\| = \|R\|$:

$$\begin{aligned} \|L\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Lx\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \left\{ \sup_{\|y\| \leq 1} \|yLx\| \right\} \\ &= \sup_{\|y\| \leq 1} \left\{ \sup_{\|x\| \leq 1} \|R(y)x\| \right\} = \sup_{\|y\| \leq 1} \|Ry\| = \|R\|. \end{aligned}$$

Veamos que $M(A)$ satisface la igualdad C^* : $\|(L, R)^*(L, R)\| = \|(L, R)\|^2$.

Sea $M(A) := \{(L, R) : (L, R) \text{ es un multiplicador de } A\}$. Definimos operaciones $+, \cdot : M(A) \times M(A) \rightarrow M(A)$ y $*$: $M(A) \rightarrow M(A)$ mediante:

$$(L_1, R_1) + (L_2, R_2) = (L_1 + L_2, R_1 + R_2)$$

$$(L_1, R_1) \cdot (L_2, R_2) = (L_1 L_2, R_2 R_1)$$

$$(L, R)^* = (R^*, L^*), \text{ donde } T^* : A \rightarrow A \text{ es } T^*(x) = (T(x^*))^*$$

Teorema

$M(A)$ es una C^* -álgebra con unidad con $\|(S, T)\| := \max\{\|S\|, \|T\|\}$.

Demostración. Es rutinario verificar que $M(A)$ es una $*$ -álgebra normada, con unidad (Id, Id) . Es cerrada $B(A) \times B(A)$, y por lo tanto es un álgebra de Banach. Si $(L, R) \in M(A)$ entonces $\|L\| = \|(L, R)\| = \|R\|$:

$$\begin{aligned} \|L\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Lx\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \left\{ \sup_{\|y\| \leq 1} \|yLx\| \right\} \\ &= \sup_{\|y\| \leq 1} \left\{ \sup_{\|x\| \leq 1} \|R(y)x\| \right\} = \sup_{\|y\| \leq 1} \|Ry\| = \|R\|. \end{aligned}$$

Veamos que $M(A)$ satisface la igualdad C^* : $\|(L, R)^*(L, R)\| = \|(L, R)\|^2$. Como $(L, R)^*(L, R) = (R^*, L^*)(L, R)$

Sea $M(A) := \{(L, R) : (L, R) \text{ es un multiplicador de } A\}$. Definimos operaciones $+, \cdot : M(A) \times M(A) \rightarrow M(A)$ y $*$: $M(A) \rightarrow M(A)$ mediante:

$$(L_1, R_1) + (L_2, R_2) = (L_1 + L_2, R_1 + R_2)$$

$$(L_1, R_1) \cdot (L_2, R_2) = (L_1 L_2, R_2 R_1)$$

$$(L, R)^* = (R^*, L^*), \text{ donde } T^* : A \rightarrow A \text{ es } T^*(x) = (T(x^*))^*$$

Teorema

$M(A)$ es una C^* -álgebra con unidad con $\|(S, T)\| := \max\{\|S\|, \|T\|\}$.

Demostración. Es rutinario verificar que $M(A)$ es una $*$ -álgebra normada, con unidad (Id, Id) . Es cerrada $B(A) \times B(A)$, y por lo tanto es un álgebra de Banach. Si $(L, R) \in M(A)$ entonces $\|L\| = \|(L, R)\| = \|R\|$:

$$\begin{aligned} \|L\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Lx\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \left\{ \sup_{\|y\| \leq 1} \|yLx\| \right\} \\ &= \sup_{\|y\| \leq 1} \left\{ \sup_{\|x\| \leq 1} \|R(y)x\| \right\} = \sup_{\|y\| \leq 1} \|Ry\| = \|R\|. \end{aligned}$$

Veamos que $M(A)$ satisface la igualdad C^* : $\|(L, R)^*(L, R)\| = \|(L, R)\|^2$. Como $(L, R)^*(L, R) = (R^*, L^*)(L, R) = (R^*L, RL^*)$,

Sea $M(A) := \{(L, R) : (L, R) \text{ es un multiplicador de } A\}$. Definimos operaciones $+, \cdot : M(A) \times M(A) \rightarrow M(A)$ y $*$: $M(A) \rightarrow M(A)$ mediante:

$$(L_1, R_1) + (L_2, R_2) = (L_1 + L_2, R_1 + R_2)$$

$$(L_1, R_1) \cdot (L_2, R_2) = (L_1 L_2, R_2 R_1)$$

$$(L, R)^* = (R^*, L^*), \text{ donde } T^* : A \rightarrow A \text{ es } T^*(x) = (T(x^*))^*$$

Teorema

$M(A)$ es una C^* -álgebra con unidad con $\|(S, T)\| := \max\{\|S\|, \|T\|\}$.

Demostración. Es rutinario verificar que $M(A)$ es una $*$ -álgebra normada, con unidad (Id, Id) . Es cerrada $B(A) \times B(A)$, y por lo tanto es un álgebra de Banach. Si $(L, R) \in M(A)$ entonces $\|L\| = \|(L, R)\| = \|R\|$:

$$\begin{aligned} \|L\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Lx\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \left\{ \sup_{\|y\| \leq 1} \|yLx\| \right\} \\ &= \sup_{\|y\| \leq 1} \left\{ \sup_{\|x\| \leq 1} \|R(y)x\| \right\} = \sup_{\|y\| \leq 1} \|Ry\| = \|R\|. \end{aligned}$$

Veamos que $M(A)$ satisface la igualdad C^* : $\|(L, R)^*(L, R)\| = \|(L, R)\|^2$. Como $(L, R)^*(L, R) = (R^*, L^*)(L, R) = (R^*L, RL^*)$, basta ver que $\|R^*L\| \geq \|L\|^2$.

Ahora

$$\|R^*L\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|R^*L(x)\|$$

Ahora

$$\|R^*L\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|R^*L(x)\| = \sup_{\|x\|,\|y\|\leq 1} \{\|yR^*L(x)\|\}$$

Ahora

$$\begin{aligned}\|R^*L\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|R^*L(x)\| = \sup_{\|x\|, \|y\|\leq 1} \{\|yR^*L(x)\|\} \\ &= \sup_{\|x\|, \|y\|\leq 1} \{\|L^*(y)L(x)\|\}\end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}\|R^*L\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|R^*L(x)\| = \sup_{\|x\|, \|y\|\leq 1} \{\|yR^*L(x)\|\} \\ &= \sup_{\|x\|, \|y\|\leq 1} \{\|L^*(y)L(x)\|\} = \sup_{\|x\|, \|y\|\leq 1} \{\|(L(y^*))^*L(x)\|\}\end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}\|R^*L\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|R^*L(x)\| = \sup_{\|x\|, \|y\|\leq 1} \{\|yR^*L(x)\|\} \\ &= \sup_{\|x\|, \|y\|\leq 1} \{\|L^*(y)L(x)\|\} = \sup_{\|x\|, \|y\|\leq 1} \{\|(L(y^*))^*L(x)\|\} \\ &\geq \sup_{\|x\|\leq 1} \|L(x)^*L(x)\|\end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}\|R^*L\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|R^*L(x)\| = \sup_{\|x\|, \|y\|\leq 1} \{\|yR^*L(x)\|\} \\ &= \sup_{\|x\|, \|y\|\leq 1} \{\|L^*(y)L(x)\|\} = \sup_{\|x\|, \|y\|\leq 1} \{\|(L(y^*))^*L(x)\|\} \\ &\geq \sup_{\|x\|\leq 1} \|L(x)^*L(x)\| = \|L\|^2.\end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}\|R^*L\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|R^*L(x)\| = \sup_{\|x\|, \|y\|\leq 1} \{\|yR^*L(x)\|\} \\ &= \sup_{\|x\|, \|y\|\leq 1} \{\|L^*(y)L(x)\|\} = \sup_{\|x\|, \|y\|\leq 1} \{\|(L(y^*))^*L(x)\|\} \\ &\geq \sup_{\|x\|\leq 1} \|L(x)^*L(x)\| = \|L\|^2.\end{aligned}$$

Así como $\tilde{A}$ es la menor unitización de un álgebra sin unidad A , el álgebra de multiplicadores $M(A)$ es la más grande, en un sentido que aclararemos a continuación. Antes necesitamos una definición:

Ahora

$$\begin{aligned}\|R^*L\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|R^*L(x)\| = \sup_{\|x\|, \|y\|\leq 1} \{\|yR^*L(x)\|\} \\ &= \sup_{\|x\|, \|y\|\leq 1} \{\|L^*(y)L(x)\|\} = \sup_{\|x\|, \|y\|\leq 1} \{\|(L(y^*))^*L(x)\|\} \\ &\geq \sup_{\|x\|\leq 1} \|L(x)^*L(x)\| = \|L\|^2.\end{aligned}$$

Así como $\tilde{A}$ es la menor unitización de un álgebra sin unidad A , el álgebra de multiplicadores $M(A)$ es la más grande, en un sentido que aclararemos a continuación. Antes necesitamos una definición:

Definición

Se dice que un ideal (autoadjunto) I de una C^ -álgebra B es esencial si para todo $J \triangleleft B$, $J \neq 0$, se tiene que $I \cap J \neq 0$.*

Ahora

$$\begin{aligned}\|R^*L\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|R^*L(x)\| = \sup_{\|x\|, \|y\|\leq 1} \{\|yR^*L(x)\|\} \\ &= \sup_{\|x\|, \|y\|\leq 1} \{\|L^*(y)L(x)\|\} = \sup_{\|x\|, \|y\|\leq 1} \{\|(L(y^*))^*L(x)\|\} \\ &\geq \sup_{\|x\|\leq 1} \|L(x)^*L(x)\| = \|L\|^2.\end{aligned}$$

Así como $\tilde{A}$ es la menor unitización de un álgebra sin unidad A , el álgebra de multiplicadores $M(A)$ es la más grande, en un sentido que aclararemos a continuación. Antes necesitamos una definición:

Definición

Se dice que un ideal (autoadjunto) I de una C^ -álgebra B es esencial si para todo $J \triangleleft B$, $J \neq 0$, se tiene que $I \cap J \neq 0$.*

Ahora

$$\begin{aligned}\|R^*L\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|R^*L(x)\| = \sup_{\|x\|,\|y\|\leq 1} \{\|yR^*L(x)\|\} \\ &= \sup_{\|x\|,\|y\|\leq 1} \{\|L^*(y)L(x)\|\} = \sup_{\|x\|,\|y\|\leq 1} \{\|(L(y^*))^*L(x)\|\} \\ &\geq \sup_{\|x\|\leq 1} \|L(x)^*L(x)\| = \|L\|^2.\end{aligned}$$

Así como $\tilde{A}$ es la menor unitización de un álgebra sin unidad A , el álgebra de multiplicadores $M(A)$ es la más grande, en un sentido que aclararemos a continuación. Antes necesitamos una definición:

Definición

Se dice que un ideal (autoadjunto) I de una C^ -álgebra B es esencial si para todo $J \triangleleft B$, $J \neq 0$, se tiene que $I \cap J \neq 0$.*

Si $I \triangleleft B$ es esencial y B tiene unidad, se dice que B es una unitización de I .

Ejemplos

Ejemplos

- a) *Si X un espacio localmente compacto y de Hausdorff, entonces $C_0(X)$ es un ideal esencial de $C_b(X)$.*

Ejemplos

- a) Si X un espacio localmente compacto y de Hausdorff, entonces $C_0(X)$ es un ideal esencial de $C_b(X)$.
- b) Si X es como en el ejemplo anterior, y U un subconjunto abierto de X , entonces $C_0(U)$ es un ideal esencial de $C_0(X)$ si y sólo si U es denso en X .

Ejemplos

- a) Si X un espacio localmente compacto y de Hausdorff, entonces $C_0(X)$ es un ideal esencial de $C_b(X)$.
- b) Si X es como en el ejemplo anterior, y U un subconjunto abierto de X , entonces $C_0(U)$ es un ideal esencial de $C_0(X)$ si y sólo si U es denso en X .
- c) El álgebra $K(H)$ de operadores compactos en el espacio de Hilbert H es un ideal esencial en $B(H)$.

Ejemplos

- a) Si X un espacio localmente compacto y de Hausdorff, entonces $C_0(X)$ es un ideal esencial de $C_b(X)$.
- b) Si X es como en el ejemplo anterior, y U un subconjunto abierto de X , entonces $C_0(U)$ es un ideal esencial de $C_0(X)$ si y sólo si U es denso en X .
- c) El álgebra $K(H)$ de operadores compactos en el espacio de Hilbert H es un ideal esencial en $B(H)$.

Ejemplos

- a) Si X un espacio localmente compacto y de Hausdorff, entonces $C_0(X)$ es un ideal esencial de $C_b(X)$.
- b) Si X es como en el ejemplo anterior, y U un subconjunto abierto de X , entonces $C_0(U)$ es un ideal esencial de $C_0(X)$ si y sólo si U es denso en X .
- c) El álgebra $K(H)$ de operadores compactos en el espacio de Hilbert H es un ideal esencial en $B(H)$.

Supongamos que I es un ideal de B , y sea $I^\perp := \{b \in B : bx = 0, \forall x \in I\}$. Entonces $I^\perp$ es un ideal cerrado de B , y se tiene que $I \cap I^\perp = 0$, pues $xx^* = 0 \iff x = 0$. Por lo tanto I es esencial en B si y sólo si $I^\perp = 0$, es decir, si y sólo si la condición $bI = 0$ implica $b = 0$.

Teorema

$M(A)$ es una C^* -álgebra con unidad que contiene a A como ideal esencial (vía el mapa $\iota : A \rightarrow M(A)$ del Ejemplo 1). Si C es otra C^* -álgebra que contiene a A como ideal entonces existe un único homomorfismo $\phi : C \rightarrow M(A)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\iota} & M(A) \\ & \searrow & \uparrow \phi \\ & & C \end{array} \quad (1)$$

Además ϕ es inyectiva si y sólo si A es esencial en C .

Demostración.

Demostración.

Demostración.

$$\textcircled{1} \quad (L, R)(L_a, R_a) = (L_{L(a)}, R_{L(a)}),$$

Demostración.

$$\textcircled{1} \quad (L, R)(L_a, R_a) = (L_{L(a)}, R_{L(a)}),$$

Demostración.

① $(L, R)(L_a, R_a) = (L_{L(a)}, R_{L(a)}),$ pues $LL_a(x) = L(ax)$

Demostración.

① $(L, R)(L_a, R_a) = (L_{L(a)}, R_{L(a)}),$ pues $LL_a(x) = L(ax) = L(a)x =$

Demostración.

① $(L, R)(L_a, R_a) = (L_{L(a)}, R_{L(a)}),$ pues $LL_a(x) = L(ax) = L(a)x = L_{L(a)}(x).$

Demostración.

- ① $(L, R)(L_a, R_a) = (L_{L(a)}, R_{L(a)})$, pues $LL_a(x) = L(ax) = L(a)x = L_{L(a)}(x)$.
Entonces $LL_a = L_{L(a)}$, y de igual forma se obtiene que $R_aR = R_{L(a)}$.

Demostración.

- 1 $(L, R)(L_a, R_a) = (L_{L(a)}, R_{L(a)})$, pues $LL_a(x) = L(ax) = L(a)x = L_{L(a)}(x)$.
Entonces $LL_a = L_{L(a)}$, y de igual forma se obtiene que $R_aR = R_{L(a)}$.
- 2 Si $(L, R)(L_a, R_a) = 0 \ \forall a \in A$, entonces $L_{L(a)} = 0$ para todo a .

Demostración.

- 1 $(L, R)(L_a, R_a) = (L_{L(a)}, R_{L(a)})$, pues $LL_a(x) = L(ax) = L(a)x = L_{L(a)}(x)$.
Entonces $LL_a = L_{L(a)}$, y de igual forma se obtiene que $R_aR = R_{L(a)}$.
- 2 Si $(L, R)(L_a, R_a) = 0 \ \forall a \in A$, entonces $L_{L(a)} = 0$ para todo a .

Demostración.

- 1 $(L, R)(L_a, R_a) = (L_{L(a)}, R_{L(a)})$, pues $LL_a(x) = L(ax) = L(a)x = L_{L(a)}(x)$.
Entonces $LL_a = L_{L(a)}$, y de igual forma se obtiene que $R_aR = R_{L(a)}$.
- 2 Si $(L, R)(L_a, R_a) = 0 \ \forall a \in A$, entonces $L_{L(a)} = 0$ para todo a . Luego $L(a)x = 0 \ \forall a, x \in A$.

Demostración.

- ① $(L, R)(L_a, R_a) = (L_{L(a)}, R_{L(a)})$, pues $LL_a(x) = L(ax) = L(a)x = L_{L(a)}(x)$.
Entonces $LL_a = L_{L(a)}$, y de igual forma se obtiene que $R_aR = R_{L(a)}$.
- ② Si $(L, R)(L_a, R_a) = 0 \ \forall a \in A$, entonces $L_{L(a)} = 0$ para todo a . Luego $L(a)x = 0 \ \forall a, x \in A$. Entonces $L = 0$, y $(L, R) = 0$.

Demostración.

- 1 $(L, R)(L_a, R_a) = (L_{L(a)}, R_{L(a)})$, pues $LL_a(x) = L(ax) = L(a)x = L_{L(a)}(x)$. Entonces $LL_a = L_{L(a)}$, y de igual forma se obtiene que $R_aR = R_{L(a)}$.
- 2 Si $(L, R)(L_a, R_a) = 0 \ \forall a \in A$, entonces $L_{L(a)} = 0$ para todo a . Luego $L(a)x = 0 \ \forall a, x \in A$. Entonces $L = 0$, y $(L, R) = 0$.
- 3 Si $A \triangleleft C$, el morfismo $\phi : C \rightarrow M(A)$ tal que $\phi(c) = (L_c, R_c)$ hace conmutar el diagrama en cuestión.

Demostración.

- 1 $(L, R)(L_a, R_a) = (L_{L(a)}, R_{L(a)})$, pues $LL_a(x) = L(ax) = L(a)x = L_{L(a)}(x)$. Entonces $LL_a = L_{L(a)}$, y de igual forma se obtiene que $R_aR = R_{L(a)}$.
- 2 Si $(L, R)(L_a, R_a) = 0 \ \forall a \in A$, entonces $L_{L(a)} = 0$ para todo a . Luego $L(a)x = 0 \ \forall a, x \in A$. Entonces $L = 0$, y $(L, R) = 0$.
- 3 Si $A \triangleleft C$, el morfismo $\phi : C \rightarrow M(A)$ tal que $\phi(c) = (L_c, R_c)$ hace conmutar el diagrama en cuestión.

Demostración.

- 1 $(L, R)(L_a, R_a) = (L_{L(a)}, R_{L(a)})$, pues $LL_a(x) = L(ax) = L(a)x = L_{L(a)}(x)$. Entonces $LL_a = L_{L(a)}$, y de igual forma se obtiene que $R_aR = R_{L(a)}$.
- 2 Si $(L, R)(L_a, R_a) = 0 \ \forall a \in A$, entonces $L_{L(a)} = 0$ para todo a . Luego $L(a)x = 0 \ \forall a, x \in A$. Entonces $L = 0$, y $(L, R) = 0$.
- 3 Si $A \triangleleft C$, el morfismo $\phi : C \rightarrow M(A)$ tal que $\phi(c) = (L_c, R_c)$ hace conmutar el diagrama en cuestión. Si $\psi : C \rightarrow M(A)$ es otro tal morfismo, y $\psi(c) = (L, R)$,

Demostración.

- 1 $(L, R)(L_a, R_a) = (L_{L(a)}, R_{L(a)})$, pues $LL_a(x) = L(ax) = L(a)x = L_{L(a)}(x)$. Entonces $LL_a = L_{L(a)}$, y de igual forma se obtiene que $R_aR = R_{L(a)}$.
- 2 Si $(L, R)(L_a, R_a) = 0 \ \forall a \in A$, entonces $L_{L(a)} = 0$ para todo a . Luego $L(a)x = 0 \ \forall a, x \in A$. Entonces $L = 0$, y $(L, R) = 0$.
- 3 Si $A \triangleleft C$, el morfismo $\phi : C \rightarrow M(A)$ tal que $\phi(c) = (L_c, R_c)$ hace conmutar el diagrama en cuestión. Si $\psi : C \rightarrow M(A)$ es otro tal morfismo, y $\psi(c) = (L, R)$, entonces

$$(L_{ca}, R_{ca}) = \psi(ca)$$

Demostración.

- 1 $(L, R)(L_a, R_a) = (L_{L(a)}, R_{L(a)})$, pues $LL_a(x) = L(ax) = L(a)x = L_{L(a)}(x)$. Entonces $LL_a = L_{L(a)}$, y de igual forma se obtiene que $R_aR = R_{L(a)}$.
- 2 Si $(L, R)(L_a, R_a) = 0 \ \forall a \in A$, entonces $L_{L(a)} = 0$ para todo a . Luego $L(a)x = 0 \ \forall a, x \in A$. Entonces $L = 0$, y $(L, R) = 0$.
- 3 Si $A \triangleleft C$, el morfismo $\phi : C \rightarrow M(A)$ tal que $\phi(c) = (L_c, R_c)$ hace conmutar el diagrama en cuestión. Si $\psi : C \rightarrow M(A)$ es otro tal morfismo, y $\psi(c) = (L, R)$, entonces

$$(L_{ca}, R_{ca}) = \psi(ca) = \psi(c)\psi(a)$$

Demostración.

- 1 $(L, R)(L_a, R_a) = (L_{L(a)}, R_{L(a)})$, pues $LL_a(x) = L(ax) = L(a)x = L_{L(a)}(x)$. Entonces $LL_a = L_{L(a)}$, y de igual forma se obtiene que $R_aR = R_{L(a)}$.
- 2 Si $(L, R)(L_a, R_a) = 0 \ \forall a \in A$, entonces $L_{L(a)} = 0$ para todo a . Luego $L(a)x = 0 \ \forall a, x \in A$. Entonces $L = 0$, y $(L, R) = 0$.
- 3 Si $A \triangleleft C$, el morfismo $\phi : C \rightarrow M(A)$ tal que $\phi(c) = (L_c, R_c)$ hace conmutar el diagrama en cuestión. Si $\psi : C \rightarrow M(A)$ es otro tal morfismo, y $\psi(c) = (L, R)$, entonces

$$(L_{ca}, R_{ca}) = \psi(ca) = \psi(c)\psi(a) = (L, R)(L_a, R_a)$$

Demostración.

- 1 $(L, R)(L_a, R_a) = (L_{L(a)}, R_{L(a)})$, pues $LL_a(x) = L(ax) = L(a)x = L_{L(a)}(x)$. Entonces $LL_a = L_{L(a)}$, y de igual forma se obtiene que $R_aR = R_{L(a)}$.
- 2 Si $(L, R)(L_a, R_a) = 0 \ \forall a \in A$, entonces $L_{L(a)} = 0$ para todo a . Luego $L(a)x = 0 \ \forall a, x \in A$. Entonces $L = 0$, y $(L, R) = 0$.
- 3 Si $A \triangleleft C$, el morfismo $\phi : C \rightarrow M(A)$ tal que $\phi(c) = (L_c, R_c)$ hace conmutar el diagrama en cuestión. Si $\psi : C \rightarrow M(A)$ es otro tal morfismo, y $\psi(c) = (L, R)$, entonces

$$(L_{ca}, R_{ca}) = \psi(ca) = \psi(c)\psi(a) = (L, R)(L_a, R_a) = (L_{L(a)}, R_{L(a)}).$$

Demostración.

- 1 $(L, R)(L_a, R_a) = (L_{L(a)}, R_{L(a)})$, pues $LL_a(x) = L(ax) = L(a)x = L_{L(a)}(x)$. Entonces $LL_a = L_{L(a)}$, y de igual forma se obtiene que $R_aR = R_{L(a)}$.
- 2 Si $(L, R)(L_a, R_a) = 0 \ \forall a \in A$, entonces $L_{L(a)} = 0$ para todo a . Luego $L(a)x = 0 \ \forall a, x \in A$. Entonces $L = 0$, y $(L, R) = 0$.
- 3 Si $A \triangleleft C$, el morfismo $\phi : C \rightarrow M(A)$ tal que $\phi(c) = (L_c, R_c)$ hace conmutar el diagrama en cuestión. Si $\psi : C \rightarrow M(A)$ es otro tal morfismo, y $\psi(c) = (L, R)$, entonces

$$(L_{ca}, R_{ca}) = \psi(ca) = \psi(c)\psi(a) = (L, R)(L_a, R_a) = (L_{L(a)}, R_{L(a)}).$$

Entonces $ca = L(a)$ porque $\iota : A \rightarrow M(A)$ es inyectiva.

Demostración.

- 1 $(L, R)(L_a, R_a) = (L_{L(a)}, R_{L(a)})$, pues $LL_a(x) = L(ax) = L(a)x = L_{L(a)}(x)$. Entonces $LL_a = L_{L(a)}$, y de igual forma se obtiene que $R_aR = R_{L(a)}$.
- 2 Si $(L, R)(L_a, R_a) = 0 \ \forall a \in A$, entonces $L_{L(a)} = 0$ para todo a . Luego $L(a)x = 0 \ \forall a, x \in A$. Entonces $L = 0$, y $(L, R) = 0$.
- 3 Si $A \triangleleft C$, el morfismo $\phi : C \rightarrow M(A)$ tal que $\phi(c) = (L_c, R_c)$ hace conmutar el diagrama en cuestión. Si $\psi : C \rightarrow M(A)$ es otro tal morfismo, y $\psi(c) = (L, R)$, entonces

$$(L_{ca}, R_{ca}) = \psi(ca) = \psi(c)\psi(a) = (L, R)(L_a, R_a) = (L_{L(a)}, R_{L(a)}).$$

Entonces $ca = L(a)$ porque $\iota : A \rightarrow M(A)$ es inyectiva. Luego $L = L_c$ y por lo tanto $R = R_c$.

Demostración.

- 1 $(L, R)(L_a, R_a) = (L_{L(a)}, R_{L(a)})$, pues $LL_a(x) = L(ax) = L(a)x = L_{L(a)}(x)$. Entonces $LL_a = L_{L(a)}$, y de igual forma se obtiene que $R_aR = R_{L(a)}$.
- 2 Si $(L, R)(L_a, R_a) = 0 \ \forall a \in A$, entonces $L_{L(a)} = 0$ para todo a . Luego $L(a)x = 0 \ \forall a, x \in A$. Entonces $L = 0$, y $(L, R) = 0$.
- 3 Si $A \triangleleft C$, el morfismo $\phi : C \rightarrow M(A)$ tal que $\phi(c) = (L_c, R_c)$ hace conmutar el diagrama en cuestión. Si $\psi : C \rightarrow M(A)$ es otro tal morfismo, y $\psi(c) = (L, R)$, entonces

$$(L_{ca}, R_{ca}) = \psi(ca) = \psi(c)\psi(a) = (L, R)(L_a, R_a) = (L_{L(a)}, R_{L(a)}).$$

Entonces $ca = L(a)$ porque $\iota : A \rightarrow M(A)$ es inyectiva. Luego $L = L_c$ y por lo tanto $R = R_c$. Esto muestra que $\psi = \phi$.

- 4 Finalmente:

$$\ker(\phi) = \{c \in C : L_c = 0\} = \{c \in C : cx = 0, \forall x \in A\} = A^\perp,$$

Demostración.

- 1 $(L, R)(L_a, R_a) = (L_{L(a)}, R_{L(a)})$, pues $LL_a(x) = L(ax) = L(a)x = L_{L(a)}(x)$. Entonces $LL_a = L_{L(a)}$, y de igual forma se obtiene que $R_aR = R_{L(a)}$.
- 2 Si $(L, R)(L_a, R_a) = 0 \ \forall a \in A$, entonces $L_{L(a)} = 0$ para todo a . Luego $L(a)x = 0 \ \forall a, x \in A$. Entonces $L = 0$, y $(L, R) = 0$.
- 3 Si $A \triangleleft C$, el morfismo $\phi : C \rightarrow M(A)$ tal que $\phi(c) = (L_c, R_c)$ hace conmutar el diagrama en cuestión. Si $\psi : C \rightarrow M(A)$ es otro tal morfismo, y $\psi(c) = (L, R)$, entonces

$$(L_{ca}, R_{ca}) = \psi(ca) = \psi(c)\psi(a) = (L, R)(L_a, R_a) = (L_{L(a)}, R_{L(a)}).$$

Entonces $ca = L(a)$ porque $\iota : A \rightarrow M(A)$ es inyectiva. Luego $L = L_c$ y por lo tanto $R = R_c$. Esto muestra que $\psi = \phi$.

- 4 Finalmente:

$$\ker(\phi) = \{c \in C : L_c = 0\} = \{c \in C : cx = 0, \forall x \in A\} = A^\perp,$$

Demostración.

- ❶ $(L, R)(L_a, R_a) = (L_{L(a)}, R_{L(a)})$, pues $LL_a(x) = L(ax) = L(a)x = L_{L(a)}(x)$. Entonces $LL_a = L_{L(a)}$, y de igual forma se obtiene que $R_aR = R_{L(a)}$.
- ❷ Si $(L, R)(L_a, R_a) = 0 \ \forall a \in A$, entonces $L_{L(a)} = 0$ para todo a . Luego $L(a)x = 0 \ \forall a, x \in A$. Entonces $L = 0$, y $(L, R) = 0$.
- ❸ Si $A \triangleleft C$, el morfismo $\phi : C \rightarrow M(A)$ tal que $\phi(c) = (L_c, R_c)$ hace conmutar el diagrama en cuestión. Si $\psi : C \rightarrow M(A)$ es otro tal morfismo, y $\psi(c) = (L, R)$, entonces

$$(L_{ca}, R_{ca}) = \psi(ca) = \psi(c)\psi(a) = (L, R)(L_a, R_a) = (L_{L(a)}, R_{L(a)}).$$

Entonces $ca = L(a)$ porque $\iota : A \rightarrow M(A)$ es inyectiva. Luego $L = L_c$ y por lo tanto $R = R_c$. Esto muestra que $\psi = \phi$.

- ❹ Finalmente:

$$\ker(\phi) = \{c \in C : L_c = 0\} = \{c \in C : cx = 0, \forall x \in A\} = A^\perp,$$

de modo que ϕ es inyectivo si y sólo si $A^\perp = 0$, es decir, si y sólo si A es un ideal esencial en C .

Demostración.

- ❶ $(L, R)(L_a, R_a) = (L_{L(a)}, R_{L(a)})$, pues $LL_a(x) = L(ax) = L(a)x = L_{L(a)}(x)$. Entonces $LL_a = L_{L(a)}$, y de igual forma se obtiene que $R_aR = R_{L(a)}$.
- ❷ Si $(L, R)(L_a, R_a) = 0 \ \forall a \in A$, entonces $L_{L(a)} = 0$ para todo a . Luego $L(a)x = 0 \ \forall a, x \in A$. Entonces $L = 0$, y $(L, R) = 0$.
- ❸ Si $A \triangleleft C$, el morfismo $\phi : C \rightarrow M(A)$ tal que $\phi(c) = (L_c, R_c)$ hace conmutar el diagrama en cuestión. Si $\psi : C \rightarrow M(A)$ es otro tal morfismo, y $\psi(c) = (L, R)$, entonces

$$(L_{ca}, R_{ca}) = \psi(ca) = \psi(c)\psi(a) = (L, R)(L_a, R_a) = (L_{L(a)}, R_{L(a)}).$$

Entonces $ca = L(a)$ porque $\iota : A \rightarrow M(A)$ es inyectiva. Luego $L = L_c$ y por lo tanto $R = R_c$. Esto muestra que $\psi = \phi$.

- ❹ Finalmente:

$$\ker(\phi) = \{c \in C : L_c = 0\} = \{c \in C : cx = 0, \forall x \in A\} = A^\perp,$$

de modo que ϕ es inyectivo si y sólo si $A^\perp = 0$, es decir, si y sólo si A es un ideal esencial en C .

Ejemplos

Ejemplos

Ejemplos

a) Si A tiene unidad, es $A = M(A)$:

Ejemplos

a) Si A tiene unidad, es $A = M(A)$:

Ejemplos

a) Si A tiene unidad, es $A = M(A)$: si $(L, R) \in M(A)$ y $a \in A$ se tiene

Ejemplos

- a) Si A tiene unidad, es $A = M(A)$: si $(L, R) \in M(A)$ y $a \in A$ se tiene $L(a) = 1L(a)$

Ejemplos

- a) Si A tiene unidad, es $A = M(A)$: si $(L, R) \in M(A)$ y $a \in A$ se tiene $L(a) = 1L(a) = R(1)a$

Ejemplos

- a) Si A tiene unidad, es $A = M(A)$: si $(L, R) \in M(A)$ y $a \in A$ se tiene $L(a) = 1L(a) = R(1)a = L_{R(1)}(a)$.

Ejemplos

- a) Si A tiene unidad, es $A = M(A)$: si $(L, R) \in M(A)$ y $a \in A$ se tiene $L(a) = 1L(a) = R(1)a = L_{R(1)}(a)$. Entonces $(L, R) = (L_{R(1)}, R_{R(1)})$.

Ejemplos

- a) Si A tiene unidad, es $A = M(A)$: si $(L, R) \in M(A)$ y $a \in A$ se tiene $L(a) = 1L(a) = R(1)a = L_{R(1)}(a)$. Entonces $(L, R) = (L_{R(1)}, R_{R(1)})$.
- b) Si $K := \{T \in B(H) : T \text{ es compacto}\}$, de donde $M(K) = B(H)$.

Ejemplos

- a) Si A tiene unidad, es $A = M(A)$: si $(L, R) \in M(A)$ y $a \in A$ se tiene $L(a) = 1L(a) = R(1)a = L_{R(1)}(a)$. Entonces $(L, R) = (L_{R(1)}, R_{R(1)})$.
- b) Si $K := \{T \in B(H) : T \text{ es compacto}\}$, de donde $M(K) = B(H)$.
- c) $M(C_0(X)) = C_b(X) := \{c : X \rightarrow \mathbb{C} : c \text{ es continua y acotada}\}$.

Ejemplos

- a) Si A tiene unidad, es $A = M(A)$: si $(L, R) \in M(A)$ y $a \in A$ se tiene $L(a) = 1L(a) = R(1)a = L_{R(1)}(a)$. Entonces $(L, R) = (L_{R(1)}, R_{R(1)})$.
- b) Si $K := \{T \in B(H) : T \text{ es compacto}\}$, de donde $M(K) = B(H)$.
- c) $M(C_0(X)) = C_b(X) := \{c : X \rightarrow \mathbb{C} : c \text{ es continua y acotada}\}$.

Ejemplos

- a) Si A tiene unidad, es $A = M(A)$: si $(L, R) \in M(A)$ y $a \in A$ se tiene $L(a) = 1L(a) = R(1)a = L_{R(1)}(a)$. Entonces $(L, R) = (L_{R(1)}, R_{R(1)})$.
- b) Si $K := \{T \in B(H) : T \text{ es compacto}\}$, de donde $M(K) = B(H)$.
- c) $M(C_0(X)) = C_b(X) := \{c : X \rightarrow \mathbb{C} : c \text{ es continua y acotada}\}$. Podemos suponer que X no es compacto.

Ejemplos

- a) Si A tiene unidad, es $A = M(A)$: si $(L, R) \in M(A)$ y $a \in A$ se tiene $L(a) = 1L(a) = R(1)a = L_{R(1)}(a)$. Entonces $(L, R) = (L_{R(1)}, R_{R(1)})$.
- b) Si $K := \{T \in B(H) : T \text{ es compacto}\}$, de donde $M(K) = B(H)$.
- c) $M(C_0(X)) = C_b(X) := \{c : X \rightarrow \mathbb{C} : c \text{ es continua y acotada}\}$. Podemos suponer que X no es compacto. Sabemos que $C_0(X)$ es esencial en $C_b(X)$.

Ejemplos

- a) Si A tiene unidad, es $A = M(A)$: si $(L, R) \in M(A)$ y $a \in A$ se tiene $L(a) = 1L(a) = R(1)a = L_{R(1)}(a)$. Entonces $(L, R) = (L_{R(1)}, R_{R(1)})$.
- b) Si $K := \{T \in B(H) : T \text{ es compacto}\}$, de donde $M(K) = B(H)$.
- c) $M(C_0(X)) = C_b(X) := \{c : X \rightarrow \mathbb{C} : c \text{ es continua y acotada}\}$. Podemos suponer que X no es compacto. Sabemos que $C_0(X)$ es esencial en $C_b(X)$. Por el teorema previo, es inyectivo el homomorfismo

Ejemplos

- a) Si A tiene unidad, es $A = M(A)$: si $(L, R) \in M(A)$ y $a \in A$ se tiene $L(a) = 1L(a) = R(1)a = L_{R(1)}(a)$. Entonces $(L, R) = (L_{R(1)}, R_{R(1)})$.
- b) Si $K := \{T \in B(H) : T \text{ es compacto}\}$, de donde $M(K) = B(H)$.
- c) $M(C_0(X)) = C_b(X) := \{c : X \rightarrow \mathbb{C} : c \text{ es continua y acotada}\}$. Podemos suponer que X no es compacto. Sabemos que $C_0(X)$ es esencial en $C_b(X)$. Por el teorema previo, es inyectivo el homomorfismo

$$\phi : C_b(X) \rightarrow M(C_0(X)), \text{ tal que } c \mapsto (L_c, R_c)$$

Ejemplos

- a) Si A tiene unidad, es $A = M(A)$: si $(L, R) \in M(A)$ y $a \in A$ se tiene $L(a) = 1L(a) = R(1)a = L_{R(1)}(a)$. Entonces $(L, R) = (L_{R(1)}, R_{R(1)})$.
- b) Si $K := \{T \in B(H) : T \text{ es compacto}\}$, de donde $M(K) = B(H)$.
- c) $M(C_0(X)) = C_b(X) := \{c : X \rightarrow \mathbb{C} : c \text{ es continua y acotada}\}$. Podemos suponer que X no es compacto. Sabemos que $C_0(X)$ es esencial en $C_b(X)$. Por el teorema previo, es inyectivo el homomorfismo

$$\phi : C_b(X) \rightarrow M(C_0(X)), \text{ tal que } c \mapsto (L_c, R_c)$$

$$\text{Si } (L, R) \in M(C_0(X)): \quad R(a)b = aL(b) = L(ba) = L(ab) = L(a)b.$$

Ejemplos

- a) Si A tiene unidad, es $A = M(A)$: si $(L, R) \in M(A)$ y $a \in A$ se tiene $L(a) = 1L(a) = R(1)a = L_{R(1)}(a)$. Entonces $(L, R) = (L_{R(1)}, R_{R(1)})$.
- b) Si $K := \{T \in B(H) : T \text{ es compacto}\}$, de donde $M(K) = B(H)$.
- c) $M(C_0(X)) = C_b(X) := \{c : X \rightarrow \mathbb{C} : c \text{ es continua y acotada}\}$. Podemos suponer que X no es compacto. Sabemos que $C_0(X)$ es esencial en $C_b(X)$. Por el teorema previo, es inyectivo el homomorfismo

$$\phi : C_b(X) \rightarrow M(C_0(X)), \text{ tal que } c \mapsto (L_c, R_c)$$

Si $(L, R) \in M(C_0(X))$: $R(a)b = aL(b) = L(ba) = L(ab) = L(a)b$.
Entonces $(L(a) - R(a))b = 0 \ \forall a, b \in A$, y por tanto es $L = R$.

Ejemplos

- a) Si A tiene unidad, es $A = M(A)$: si $(L, R) \in M(A)$ y $a \in A$ se tiene $L(a) = 1L(a) = R(1)a = L_{R(1)}(a)$. Entonces $(L, R) = (L_{R(1)}, R_{R(1)})$.
- b) Si $K := \{T \in B(H) : T \text{ es compacto}\}$, de donde $M(K) = B(H)$.
- c) $M(C_0(X)) = C_b(X) := \{c : X \rightarrow \mathbb{C} : c \text{ es continua y acotada}\}$. Podemos suponer que X no es compacto. Sabemos que $C_0(X)$ es esencial en $C_b(X)$. Por el teorema previo, es inyectivo el homomorfismo

$$\phi : C_b(X) \rightarrow M(C_0(X)), \text{ tal que } c \mapsto (L_c, R_c)$$

Si $(L, R) \in M(C_0(X))$: $R(a)b = aL(b) = L(ba) = L(ab) = L(a)b$.
Entonces $(L(a) - R(a))b = 0 \ \forall a, b \in A$, y por tanto es $L = R$.
Veamos que ϕ es sobreyectiva. Si $(L, L) \in M(C_0(X))$ $a, b \in A$:

Ejemplos

- a) Si A tiene unidad, es $A = M(A)$: si $(L, R) \in M(A)$ y $a \in A$ se tiene $L(a) = 1L(a) = R(1)a = L_{R(1)}(a)$. Entonces $(L, R) = (L_{R(1)}, R_{R(1)})$.
- b) Si $K := \{T \in B(H) : T \text{ es compacto}\}$, de donde $M(K) = B(H)$.
- c) $M(C_0(X)) = C_b(X) := \{c : X \rightarrow \mathbb{C} : c \text{ es continua y acotada}\}$. Podemos suponer que X no es compacto. Sabemos que $C_0(X)$ es esencial en $C_b(X)$. Por el teorema previo, es inyectivo el homomorfismo

$$\phi : C_b(X) \rightarrow M(C_0(X)), \text{ tal que } c \mapsto (L_c, R_c)$$

Si $(L, R) \in M(C_0(X))$: $R(a)b = aL(b) = L(ba) = L(ab) = L(a)b$.
Entonces $(L(a) - R(a))b = 0 \ \forall a, b \in A$, y por tanto es $L = R$.
Veamos que ϕ es sobreyectiva. Si $(L, L) \in M(C_0(X))$ $a, b \in A$:

$$L(a)b = L(ab)$$

Ejemplos

- a) Si A tiene unidad, es $A = M(A)$: si $(L, R) \in M(A)$ y $a \in A$ se tiene $L(a) = 1L(a) = R(1)a = L_{R(1)}(a)$. Entonces $(L, R) = (L_{R(1)}, R_{R(1)})$.
- b) Si $K := \{T \in B(H) : T \text{ es compacto}\}$, de donde $M(K) = B(H)$.
- c) $M(C_0(X)) = C_b(X) := \{c : X \rightarrow \mathbb{C} : c \text{ es continua y acotada}\}$. Podemos suponer que X no es compacto. Sabemos que $C_0(X)$ es esencial en $C_b(X)$. Por el teorema previo, es inyectivo el homomorfismo

$$\phi : C_b(X) \rightarrow M(C_0(X)), \text{ tal que } c \mapsto (L_c, R_c)$$

Si $(L, R) \in M(C_0(X))$: $R(a)b = aL(b) = L(ba) = L(ab) = L(a)b$.
Entonces $(L(a) - R(a))b = 0 \ \forall a, b \in A$, y por tanto es $L = R$.
Veamos que ϕ es sobreyectiva. Si $(L, L) \in M(C_0(X))$ $a, b \in A$:

$$L(a)b = L(ab) = L(ba)$$

Ejemplos

- a) Si A tiene unidad, es $A = M(A)$: si $(L, R) \in M(A)$ y $a \in A$ se tiene $L(a) = 1L(a) = R(1)a = L_{R(1)}(a)$. Entonces $(L, R) = (L_{R(1)}, R_{R(1)})$.
- b) Si $K := \{T \in B(H) : T \text{ es compacto}\}$, de donde $M(K) = B(H)$.
- c) $M(C_0(X)) = C_b(X) := \{c : X \rightarrow \mathbb{C} : c \text{ es continua y acotada}\}$. Podemos suponer que X no es compacto. Sabemos que $C_0(X)$ es esencial en $C_b(X)$. Por el teorema previo, es inyectivo el homomorfismo

$$\phi : C_b(X) \rightarrow M(C_0(X)), \text{ tal que } c \mapsto (L_c, R_c)$$

Si $(L, R) \in M(C_0(X))$: $R(a)b = aL(b) = L(ba) = L(ab) = L(a)b$.
Entonces $(L(a) - R(a))b = 0 \ \forall a, b \in A$, y por tanto es $L = R$.
Veamos que ϕ es sobreyectiva. Si $(L, L) \in M(C_0(X))$ $a, b \in A$:

$$L(a)b = L(ab) = L(ba) = L(b)a.$$

Ejemplos

- a) Si A tiene unidad, es $A = M(A)$: si $(L, R) \in M(A)$ y $a \in A$ se tiene $L(a) = 1L(a) = R(1)a = L_{R(1)}(a)$. Entonces $(L, R) = (L_{R(1)}, R_{R(1)})$.
- b) Si $K := \{T \in B(H) : T \text{ es compacto}\}$, de donde $M(K) = B(H)$.
- c) $M(C_0(X)) = C_b(X) := \{c : X \rightarrow \mathbb{C} : c \text{ es continua y acotada}\}$. Podemos suponer que X no es compacto. Sabemos que $C_0(X)$ es esencial en $C_b(X)$. Por el teorema previo, es inyectivo el homomorfismo

$$\phi : C_b(X) \rightarrow M(C_0(X)), \text{ tal que } c \mapsto (L_c, R_c)$$

Si $(L, R) \in M(C_0(X))$: $R(a)b = aL(b) = L(ba) = L(ab) = L(a)b$.
Entonces $(L(a) - R(a))b = 0 \ \forall a, b \in A$, y por tanto es $L = R$.
Veamos que ϕ es sobreyectiva. Si $(L, L) \in M(C_0(X))$ $a, b \in A$:

$$L(a)b = L(ab) = L(ba) = L(b)a.$$

Dados $a, a' \in C_0(X)$ y $x_0 \in X$, con $a(x_0) = a'(x_0)$,

Ejemplos

- a) Si A tiene unidad, es $A = M(A)$: si $(L, R) \in M(A)$ y $a \in A$ se tiene $L(a) = 1L(a) = R(1)a = L_{R(1)}(a)$. Entonces $(L, R) = (L_{R(1)}, R_{R(1)})$.
- b) Si $K := \{T \in B(H) : T \text{ es compacto}\}$, de donde $M(K) = B(H)$.
- c) $M(C_0(X)) = C_b(X) := \{c : X \rightarrow \mathbb{C} : c \text{ es continua y acotada}\}$. Podemos suponer que X no es compacto. Sabemos que $C_0(X)$ es esencial en $C_b(X)$. Por el teorema previo, es inyectivo el homomorfismo

$$\phi : C_b(X) \rightarrow M(C_0(X)), \text{ tal que } c \mapsto (L_c, R_c)$$

Si $(L, R) \in M(C_0(X))$: $R(a)b = aL(b) = L(ba) = L(ab) = L(a)b$.
Entonces $(L(a) - R(a))b = 0 \ \forall a, b \in A$, y por tanto es $L = R$.
Veamos que ϕ es sobreyectiva. Si $(L, L) \in M(C_0(X))$ $a, b \in A$:

$$L(a)b = L(ab) = L(ba) = L(b)a.$$

Dados $a, a' \in C_0(X)$ y $x_0 \in X$, con $a(x_0) = a'(x_0)$, sea $b \in C_0(X)$ tal que $b(x_0) = 1$ (b existe según el Lema de Urysohn).

Ejemplos

- a) Si A tiene unidad, es $A = M(A)$: si $(L, R) \in M(A)$ y $a \in A$ se tiene $L(a) = 1L(a) = R(1)a = L_{R(1)}(a)$. Entonces $(L, R) = (L_{R(1)}, R_{R(1)})$.
- b) Si $K := \{T \in B(H) : T \text{ es compacto}\}$, de donde $M(K) = B(H)$.
- c) $M(C_0(X)) = C_b(X) := \{c : X \rightarrow \mathbb{C} : c \text{ es continua y acotada}\}$. Podemos suponer que X no es compacto. Sabemos que $C_0(X)$ es esencial en $C_b(X)$. Por el teorema previo, es inyectivo el homomorfismo

$$\phi : C_b(X) \rightarrow M(C_0(X)), \text{ tal que } c \mapsto (L_c, R_c)$$

Si $(L, R) \in M(C_0(X))$: $R(a)b = aL(b) = L(ba) = L(ab) = L(a)b$.
Entonces $(L(a) - R(a))b = 0 \ \forall a, b \in A$, y por tanto es $L = R$.
Veamos que ϕ es sobreyectiva. Si $(L, L) \in M(C_0(X))$ $a, b \in A$:

$$L(a)b = L(ab) = L(ba) = L(b)a.$$

Dados $a, a' \in C_0(X)$ y $x_0 \in X$, con $a(x_0) = a'(x_0)$, sea $b \in C_0(X)$ tal que $b(x_0) = 1$ (b existe según el Lema de Urysohn). Entonces:

$$L(a)(x_0) = L(a)(x_0)b(x_0)$$

$$L(a)(x_0) = L(a)(x_0)b(x_0) = L(b)(x_0)a(x_0)$$

$$L(a)(x_0) = L(a)(x_0)b(x_0) = L(b)(x_0)a(x_0) = L(b)(x_0)a'(x_0)$$

$$L(a)(x_0) = L(a)(x_0)b(x_0) = L(b)(x_0)a(x_0) = L(b)(x_0)a'(x_0) = L(a')(x_0).$$

$$L(a)(x_0) = L(a)(x_0)b(x_0) = L(b)(x_0)a(x_0) = L(b)(x_0)a'(x_0) = L(a')(x_0).$$

Entonces $L(a)(x_0)$ sólo depende de $a(x_0)$, y $L(a)(x_0) = 0$ si $a(x_0) = 0$. Por el Lema de Urysohn, para cada $x \in X$ y cualquier entorno compacto, digamos V_x , de x , podemos tomar $a_x \in C_c(X)$ tal que $0 \leq a_x \leq 1$ y $a_x(y) = 1$ para todo $y \in V_x$. Sea $c : X \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $c(x) = L(a_x)(x)$. Ahora:

- $|c(x)| = |L(a_x)(x)| \leq \|L(a_x)\|_\infty \leq \|L\| \|a_x\|_\infty = \|L\|$. Entonces $\|c\|_\infty \leq \|L\| < \infty$.

$$L(a)(x_0) = L(a)(x_0)b(x_0) = L(b)(x_0)a(x_0) = L(b)(x_0)a'(x_0) = L(a')(x_0).$$

Entonces $L(a)(x_0)$ sólo depende de $a(x_0)$, y $L(a)(x_0) = 0$ si $a(x_0) = 0$. Por el Lema de Urysohn, para cada $x \in X$ y cualquier entorno compacto, digamos V_x , de x , podemos tomar $a_x \in C_c(X)$ tal que $0 \leq a_x \leq 1$ y $a_x(y) = 1$ para todo $y \in V_x$. Sea $c : X \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $c(x) = L(a_x)(x)$. Ahora:

- $|c(x)| = |L(a_x)(x)| \leq \|L(a_x)\|_\infty \leq \|L\| \|a_x\|_\infty = \|L\|$. Entonces $\|c\|_\infty \leq \|L\| < \infty$.
- Si $y \in V_x$ tenemos que $c(y) = L(a_y)(y) = L(a_x)(y)$. Entonces $c|_{V_x} = L(a_x)|_{V_x}$. Luego c es continua en x . Entonces c es continua.

$$L(a)(x_0) = L(a)(x_0)b(x_0) = L(b)(x_0)a(x_0) = L(b)(x_0)a'(x_0) = L(a')(x_0).$$

Entonces $L(a)(x_0)$ sólo depende de $a(x_0)$, y $L(a)(x_0) = 0$ si $a(x_0) = 0$. Por el Lema de Urysohn, para cada $x \in X$ y cualquier entorno compacto, digamos V_x , de x , podemos tomar $a_x \in C_c(X)$ tal que $0 \leq a_x \leq 1$ y $a_x(y) = 1$ para todo $y \in V_x$. Sea $c : X \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $c(x) = L(a_x)(x)$. Ahora:

- $|c(x)| = |L(a_x)(x)| \leq \|L(a_x)\|_\infty \leq \|L\| \|a_x\|_\infty = \|L\|$. Entonces $\|c\|_\infty \leq \|L\| < \infty$.
- Si $y \in V_x$ tenemos que $c(y) = L(a_y)(y) = L(a_x)(y)$. Entonces $c|_{V_x} = L(a_x)|_{V_x}$. Luego c es continua en x . Entonces c es continua.

$$L(a)(x_0) = L(a)(x_0)b(x_0) = L(b)(x_0)a(x_0) = L(b)(x_0)a'(x_0) = L(a')(x_0).$$

Entonces $L(a)(x_0)$ sólo depende de $a(x_0)$, y $L(a)(x_0) = 0$ si $a(x_0) = 0$. Por el Lema de Urysohn, para cada $x \in X$ y cualquier entorno compacto, digamos V_x , de x , podemos tomar $a_x \in C_c(X)$ tal que $0 \leq a_x \leq 1$ y $a_x(y) = 1$ para todo $y \in V_x$. Sea $c : X \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $c(x) = L(a_x)(x)$. Ahora:

- $|c(x)| = |L(a_x)(x)| \leq \|L(a_x)\|_\infty \leq \|L\| \|a_x\|_\infty = \|L\|$. Entonces $\|c\|_\infty \leq \|L\| < \infty$.
- Si $y \in V_x$ tenemos que $c(y) = L(a_y)(y) = L(a_x)(y)$. Entonces $c|_{V_x} = L(a_x)|_{V_x}$. Luego c es continua en x . Entonces c es continua.

En consecuencia $c \in C_b(X)$,

$$L(a)(x_0) = L(a)(x_0)b(x_0) = L(b)(x_0)a(x_0) = L(b)(x_0)a'(x_0) = L(a')(x_0).$$

Entonces $L(a)(x_0)$ sólo depende de $a(x_0)$, y $L(a)(x_0) = 0$ si $a(x_0) = 0$. Por el Lema de Urysohn, para cada $x \in X$ y cualquier entorno compacto, digamos V_x , de x , podemos tomar $a_x \in C_c(X)$ tal que $0 \leq a_x \leq 1$ y $a_x(y) = 1$ para todo $y \in V_x$. Sea $c : X \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $c(x) = L(a_x)(x)$. Ahora:

- $|c(x)| = |L(a_x)(x)| \leq \|L(a_x)\|_\infty \leq \|L\| \|a_x\|_\infty = \|L\|$. Entonces $\|c\|_\infty \leq \|L\| < \infty$.
- Si $y \in V_x$ tenemos que $c(y) = L(a_y)(y) = L(a_x)(y)$. Entonces $c|_{V_x} = L(a_x)|_{V_x}$. Luego c es continua en x . Entonces c es continua.

En consecuencia $c \in C_b(X)$, y si $b \in C_0(X)$:

$$L(a)(x_0) = L(a)(x_0)b(x_0) = L(b)(x_0)a(x_0) = L(b)(x_0)a'(x_0) = L(a')(x_0).$$

Entonces $L(a)(x_0)$ sólo depende de $a(x_0)$, y $L(a)(x_0) = 0$ si $a(x_0) = 0$. Por el Lema de Urysohn, para cada $x \in X$ y cualquier entorno compacto, digamos V_x , de x , podemos tomar $a_x \in C_c(X)$ tal que $0 \leq a_x \leq 1$ y $a_x(y) = 1$ para todo $y \in V_x$. Sea $c : X \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $c(x) = L(a_x)(x)$.

Ahora:

- $|c(x)| = |L(a_x)(x)| \leq \|L(a_x)\|_\infty \leq \|L\| \|a_x\|_\infty = \|L\|$. Entonces $\|c\|_\infty \leq \|L\| < \infty$.
- Si $y \in V_x$ tenemos que $c(y) = L(a_y)(y) = L(a_x)(y)$. Entonces $c|_{V_x} = L(a_x)|_{V_x}$. Luego c es continua en x . Entonces c es continua.

En consecuencia $c \in C_b(X)$, y si $b \in C_0(X)$:

$$L(b)(x)$$

$$L(a)(x_0) = L(a)(x_0)b(x_0) = L(b)(x_0)a(x_0) = L(b)(x_0)a'(x_0) = L(a')(x_0).$$

Entonces $L(a)(x_0)$ sólo depende de $a(x_0)$, y $L(a)(x_0) = 0$ si $a(x_0) = 0$. Por el Lema de Urysohn, para cada $x \in X$ y cualquier entorno compacto, digamos V_x , de x , podemos tomar $a_x \in C_c(X)$ tal que $0 \leq a_x \leq 1$ y $a_x(y) = 1$ para todo $y \in V_x$. Sea $c : X \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $c(x) = L(a_x)(x)$. Ahora:

- $|c(x)| = |L(a_x)(x)| \leq \|L(a_x)\|_\infty \leq \|L\| \|a_x\|_\infty = \|L\|$. Entonces $\|c\|_\infty \leq \|L\| < \infty$.
- Si $y \in V_x$ tenemos que $c(y) = L(a_y)(y) = L(a_x)(y)$. Entonces $c|_{V_x} = L(a_x)|_{V_x}$. Luego c es continua en x . Entonces c es continua.

En consecuencia $c \in C_b(X)$, y si $b \in C_0(X)$:

$$L(b)(x) = L(b)(x)a_x(x)$$

$$L(a)(x_0) = L(a)(x_0)b(x_0) = L(b)(x_0)a(x_0) = L(b)(x_0)a'(x_0) = L(a')(x_0).$$

Entonces $L(a)(x_0)$ sólo depende de $a(x_0)$, y $L(a)(x_0) = 0$ si $a(x_0) = 0$. Por el Lema de Urysohn, para cada $x \in X$ y cualquier entorno compacto, digamos V_x , de x , podemos tomar $a_x \in C_c(X)$ tal que $0 \leq a_x \leq 1$ y $a_x(y) = 1$ para todo $y \in V_x$. Sea $c : X \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $c(x) = L(a_x)(x)$. Ahora:

- $|c(x)| = |L(a_x)(x)| \leq \|L(a_x)\|_\infty \leq \|L\| \|a_x\|_\infty = \|L\|$. Entonces $\|c\|_\infty \leq \|L\| < \infty$.
- Si $y \in V_x$ tenemos que $c(y) = L(a_y)(y) = L(a_x)(y)$. Entonces $c|_{V_x} = L(a_x)|_{V_x}$. Luego c es continua en x . Entonces c es continua.

En consecuencia $c \in C_b(X)$, y si $b \in C_0(X)$:

$$L(b)(x) = L(b)(x)a_x(x) = (L(b)a_x)(x)$$

$$L(a)(x_0) = L(a)(x_0)b(x_0) = L(b)(x_0)a(x_0) = L(b)(x_0)a'(x_0) = L(a')(x_0).$$

Entonces $L(a)(x_0)$ sólo depende de $a(x_0)$, y $L(a)(x_0) = 0$ si $a(x_0) = 0$. Por el Lema de Urysohn, para cada $x \in X$ y cualquier entorno compacto, digamos V_x , de x , podemos tomar $a_x \in C_c(X)$ tal que $0 \leq a_x \leq 1$ y $a_x(y) = 1$ para todo $y \in V_x$. Sea $c : X \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $c(x) = L(a_x)(x)$. Ahora:

- $|c(x)| = |L(a_x)(x)| \leq \|L(a_x)\|_\infty \leq \|L\| \|a_x\|_\infty = \|L\|$. Entonces $\|c\|_\infty \leq \|L\| < \infty$.
- Si $y \in V_x$ tenemos que $c(y) = L(a_y)(y) = L(a_x)(y)$. Entonces $c|_{V_x} = L(a_x)|_{V_x}$. Luego c es continua en x . Entonces c es continua.

En consecuencia $c \in C_b(X)$, y si $b \in C_0(X)$:

$$L(b)(x) = L(b)(x)a_x(x) = (L(b)a_x)(x) = (L(a_x)b)(x)$$

$$L(a)(x_0) = L(a)(x_0)b(x_0) = L(b)(x_0)a(x_0) = L(b)(x_0)a'(x_0) = L(a')(x_0).$$

Entonces $L(a)(x_0)$ sólo depende de $a(x_0)$, y $L(a)(x_0) = 0$ si $a(x_0) = 0$. Por el Lema de Urysohn, para cada $x \in X$ y cualquier entorno compacto, digamos V_x , de x , podemos tomar $a_x \in C_c(X)$ tal que $0 \leq a_x \leq 1$ y $a_x(y) = 1$ para todo $y \in V_x$. Sea $c : X \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $c(x) = L(a_x)(x)$. Ahora:

- $|c(x)| = |L(a_x)(x)| \leq \|L(a_x)\|_\infty \leq \|L\| \|a_x\|_\infty = \|L\|$. Entonces $\|c\|_\infty \leq \|L\| < \infty$.
- Si $y \in V_x$ tenemos que $c(y) = L(a_y)(y) = L(a_x)(y)$. Entonces $c|_{V_x} = L(a_x)|_{V_x}$. Luego c es continua en x . Entonces c es continua.

En consecuencia $c \in C_b(X)$, y si $b \in C_0(X)$:

$$L(b)(x) = L(b)(x)a_x(x) = (L(b)a_x)(x) = (L(a_x)b)(x) = c(x)b(x)$$

$$L(a)(x_0) = L(a)(x_0)b(x_0) = L(b)(x_0)a(x_0) = L(b)(x_0)a'(x_0) = L(a')(x_0).$$

Entonces $L(a)(x_0)$ sólo depende de $a(x_0)$, y $L(a)(x_0) = 0$ si $a(x_0) = 0$. Por el Lema de Urysohn, para cada $x \in X$ y cualquier entorno compacto, digamos V_x , de x , podemos tomar $a_x \in C_c(X)$ tal que $0 \leq a_x \leq 1$ y $a_x(y) = 1$ para todo $y \in V_x$. Sea $c : X \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $c(x) = L(a_x)(x)$.

Ahora:

- $|c(x)| = |L(a_x)(x)| \leq \|L(a_x)\|_\infty \leq \|L\| \|a_x\|_\infty = \|L\|$. Entonces $\|c\|_\infty \leq \|L\| < \infty$.
- Si $y \in V_x$ tenemos que $c(y) = L(a_y)(y) = L(a_x)(y)$. Entonces $c|_{V_x} = L(a_x)|_{V_x}$. Luego c es continua en x . Entonces c es continua.

En consecuencia $c \in C_b(X)$, y si $b \in C_0(X)$:

$$L(b)(x) = L(b)(x)a_x(x) = (L(b)a_x)(x) = (L(a_x)b)(x) = c(x)b(x) = L_c(b)(x),$$

$$L(a)(x_0) = L(a)(x_0)b(x_0) = L(b)(x_0)a(x_0) = L(b)(x_0)a'(x_0) = L(a')(x_0).$$

Entonces $L(a)(x_0)$ sólo depende de $a(x_0)$, y $L(a)(x_0) = 0$ si $a(x_0) = 0$. Por el Lema de Urysohn, para cada $x \in X$ y cualquier entorno compacto, digamos V_x , de x , podemos tomar $a_x \in C_c(X)$ tal que $0 \leq a_x \leq 1$ y $a_x(y) = 1$ para todo $y \in V_x$. Sea $c : X \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $c(x) = L(a_x)(x)$. Ahora:

- $|c(x)| = |L(a_x)(x)| \leq \|L(a_x)\|_\infty \leq \|L\| \|a_x\|_\infty = \|L\|$. Entonces $\|c\|_\infty \leq \|L\| < \infty$.
- Si $y \in V_x$ tenemos que $c(y) = L(a_y)(y) = L(a_x)(y)$. Entonces $c|_{V_x} = L(a_x)|_{V_x}$. Luego c es continua en x . Entonces c es continua.

En consecuencia $c \in C_b(X)$, y si $b \in C_0(X)$:

$$L(b)(x) = L(b)(x)a_x(x) = (L(b)a_x)(x) = (L(a_x)b)(x) = c(x)b(x) = L_c(b)(x),$$

para todo $x \in X$.

$$L(a)(x_0) = L(a)(x_0)b(x_0) = L(b)(x_0)a(x_0) = L(b)(x_0)a'(x_0) = L(a')(x_0).$$

Entonces $L(a)(x_0)$ sólo depende de $a(x_0)$, y $L(a)(x_0) = 0$ si $a(x_0) = 0$. Por el Lema de Urysohn, para cada $x \in X$ y cualquier entorno compacto, digamos V_x , de x , podemos tomar $a_x \in C_c(X)$ tal que $0 \leq a_x \leq 1$ y $a_x(y) = 1$ para todo $y \in V_x$. Sea $c : X \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $c(x) = L(a_x)(x)$. Ahora:

- $|c(x)| = |L(a_x)(x)| \leq \|L(a_x)\|_\infty \leq \|L\| \|a_x\|_\infty = \|L\|$. Entonces $\|c\|_\infty \leq \|L\| < \infty$.
- Si $y \in V_x$ tenemos que $c(y) = L(a_y)(y) = L(a_x)(y)$. Entonces $c|_{V_x} = L(a_x)|_{V_x}$. Luego c es continua en x . Entonces c es continua.

En consecuencia $c \in C_b(X)$, y si $b \in C_0(X)$:

$$L(b)(x) = L(b)(x)a_x(x) = (L(b)a_x)(x) = (L(a_x)b)(x) = c(x)b(x) = L_c(b)(x),$$

para todo $x \in X$. Entonces $L(b) = L_c(b)$ para todo b , es decir, $L = L_c$.

$$L(a)(x_0) = L(a)(x_0)b(x_0) = L(b)(x_0)a(x_0) = L(b)(x_0)a'(x_0) = L(a')(x_0).$$

Entonces $L(a)(x_0)$ sólo depende de $a(x_0)$, y $L(a)(x_0) = 0$ si $a(x_0) = 0$. Por el Lema de Urysohn, para cada $x \in X$ y cualquier entorno compacto, digamos V_x , de x , podemos tomar $a_x \in C_c(X)$ tal que $0 \leq a_x \leq 1$ y $a_x(y) = 1$ para todo $y \in V_x$. Sea $c : X \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $c(x) = L(a_x)(x)$. Ahora:

- $|c(x)| = |L(a_x)(x)| \leq \|L(a_x)\|_\infty \leq \|L\| \|a_x\|_\infty = \|L\|$. Entonces $\|c\|_\infty \leq \|L\| < \infty$.
- Si $y \in V_x$ tenemos que $c(y) = L(a_y)(y) = L(a_x)(y)$. Entonces $c|_{V_x} = L(a_x)|_{V_x}$. Luego c es continua en x . Entonces c es continua.

En consecuencia $c \in C_b(X)$, y si $b \in C_0(X)$:

$$L(b)(x) = L(b)(x)a_x(x) = (L(b)a_x)(x) = (L(a_x)b)(x) = c(x)b(x) = L_c(b)(x),$$

para todo $x \in X$. Entonces $L(b) = L_c(b)$ para todo b , es decir, $L = L_c$. Por lo tanto $\|L\| = \|c\|$,

$$L(a)(x_0) = L(a)(x_0)b(x_0) = L(b)(x_0)a(x_0) = L(b)(x_0)a'(x_0) = L(a')(x_0).$$

Entonces $L(a)(x_0)$ sólo depende de $a(x_0)$, y $L(a)(x_0) = 0$ si $a(x_0) = 0$. Por el Lema de Urysohn, para cada $x \in X$ y cualquier entorno compacto, digamos V_x , de x , podemos tomar $a_x \in C_c(X)$ tal que $0 \leq a_x \leq 1$ y $a_x(y) = 1$ para todo $y \in V_x$. Sea $c : X \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $c(x) = L(a_x)(x)$. Ahora:

- $|c(x)| = |L(a_x)(x)| \leq \|L(a_x)\|_\infty \leq \|L\| \|a_x\|_\infty = \|L\|$. Entonces $\|c\|_\infty \leq \|L\| < \infty$.
- Si $y \in V_x$ tenemos que $c(y) = L(a_y)(y) = L(a_x)(y)$. Entonces $c|_{V_x} = L(a_x)|_{V_x}$. Luego c es continua en x . Entonces c es continua.

En consecuencia $c \in C_b(X)$, y si $b \in C_0(X)$:

$$L(b)(x) = L(b)(x)a_x(x) = (L(b)a_x)(x) = (L(a_x)b)(x) = c(x)b(x) = L_c(b)(x),$$

para todo $x \in X$. Entonces $L(b) = L_c(b)$ para todo b , es decir, $L = L_c$. Por lo tanto $\|L\| = \|c\|$, y $\phi : C_b(X) \rightarrow M(C_0(X))$ es un isomorfismo isométrico.

Teorema de Gelfand-Naimark

Definición

Sea A un álgebra de Banach con unidad. Se define el mapa exponencial

$$\exp : A \rightarrow A : \quad a \mapsto e^a := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

Teorema de Gelfand-Naimark

Definición

Sea A un álgebra de Banach con unidad. Se define el mapa exponencial

$$\exp : A \rightarrow A : \quad a \mapsto e^a := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

Teorema de Gelfand-Naimark

Definición

Sea A un álgebra de Banach con unidad. Se define el mapa exponencial

$$\exp : A \rightarrow A : \quad a \mapsto e^a := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

Se tiene $\|e^a\| \leq e^{\|a\|}$:

Teorema de Gelfand-Naimark

Definición

Sea A un álgebra de Banach con unidad. Se define el mapa exponencial

$$\exp : A \rightarrow A : \quad a \mapsto e^a := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

$$\text{Se tiene } \|e^a\| \leq e^{\|a\|} : \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|a^n\|}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|a\|^n}{n!} = e^{\|a\|}.$$

Teorema de Gelfand-Naimark

Definición

Sea A un álgebra de Banach con unidad. Se define el mapa exponencial

$$\exp : A \rightarrow A : \quad a \mapsto e^a := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

$$\text{Se tiene } \|e^a\| \leq e^{\|a\|} : \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|a^n\|}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|a\|^n}{n!} = e^{\|a\|}.$$

Teorema

Sean A y B álgebras de Banach con unidad, y $a \in A$. Entonces:

Teorema de Gelfand-Naimark

Definición

Sea A un álgebra de Banach con unidad. Se define el mapa exponencial

$$\exp : A \rightarrow A : \quad a \mapsto e^a := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

$$\text{Se tiene } \|e^a\| \leq e^{\|a\|} : \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|a^n\|}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|a\|^n}{n!} = e^{\|a\|}.$$

Teorema

Sean A y B álgebras de Banach con unidad, y $a \in A$. Entonces:

(1) Si $\phi : A \rightarrow B$ es un homomorfismo unital, entonces $\phi(e^a) = e^{\phi(a)}$.

Teorema de Gelfand-Naimark

Definición

Sea A un álgebra de Banach con unidad. Se define el mapa exponencial

$$\exp : A \rightarrow A : \quad a \mapsto e^a := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

$$\text{Se tiene } \|e^a\| \leq e^{\|a\|} : \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|a^n\|}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|a\|^n}{n!} = e^{\|a\|}.$$

Teorema

Sean A y B álgebras de Banach con unidad, y $a \in A$. Entonces:

- (1) Si $\phi : A \rightarrow B$ es un homomorfismo unital, entonces $\phi(e^a) = e^{\phi(a)}$.
- (2) Si A es una $*$ -álgebra de Banach, entonces $(e^a)^* = e^{(a^*)}$.

Teorema de Gelfand-Naimark

Definición

Sea A un álgebra de Banach con unidad. Se define el mapa exponencial

$$\exp : A \rightarrow A : \quad a \mapsto e^a := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

Se tiene $\|e^a\| \leq e^{\|a\|} : \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|a^n\|}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|a\|^n}{n!} = e^{\|a\|}.$

Teorema

Sean A y B álgebras de Banach con unidad, y $a \in A$. Entonces:

- (1) Si $\phi : A \rightarrow B$ es un homomorfismo unital, entonces $\phi(e^a) = e^{\phi(a)}$.
- (2) Si A es una $*$ -álgebra de Banach, entonces $(e^a)^* = e^{(a^*)}$.
- (3) Si $f : \mathbb{C} \rightarrow A$, $f(z) = e^{za}$, entonces $f(0) = 1$ y $f'(z) = af(z) \forall z \in \mathbb{C}$.

Teorema de Gelfand-Naimark

Definición

Sea A un álgebra de Banach con unidad. Se define el mapa exponencial

$$\exp : A \rightarrow A : \quad a \mapsto e^a := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

$$\text{Se tiene } \|e^a\| \leq e^{\|a\|} : \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|a^n\|}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|a\|^n}{n!} = e^{\|a\|}.$$

Teorema

Sean A y B álgebras de Banach con unidad, y $a \in A$. Entonces:

- (1) Si $\phi : A \rightarrow B$ es un homomorfismo unital, entonces $\phi(e^a) = e^{\phi(a)}$.
- (2) Si A es una $*$ -álgebra de Banach, entonces $(e^a)^* = e^{(a^*)}$.
- (3) Si $f : \mathbb{C} \rightarrow A$, $f(z) = e^{za}$, entonces $f(0) = 1$ y $f'(z) = af(z) \forall z \in \mathbb{C}$.
- (4) Si $g : \mathbb{R} \rightarrow A$ / $g(0) = 1$ y $g'(t) = ag(t)$, entonces $g(t) = e^{ta} \forall t$.

Teorema de Gelfand-Naimark

Definición

Sea A un álgebra de Banach con unidad. Se define el mapa exponencial

$$\exp : A \rightarrow A : \quad a \mapsto e^a := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

$$\text{Se tiene } \|e^a\| \leq e^{\|a\|} : \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|a^n\|}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|a\|^n}{n!} = e^{\|a\|}.$$

Teorema

Sean A y B álgebras de Banach con unidad, y $a \in A$. Entonces:

- (1) Si $\phi : A \rightarrow B$ es un homomorfismo unital, entonces $\phi(e^a) = e^{\phi(a)}$.
- (2) Si A es una $*$ -álgebra de Banach, entonces $(e^a)^* = e^{(a^*)}$.
- (3) Si $f : \mathbb{C} \rightarrow A$, $f(z) = e^{za}$, entonces $f(0) = 1$ y $f'(z) = af(z) \forall z \in \mathbb{C}$.
- (4) Si $g : \mathbb{R} \rightarrow A$, $g(0) = 1$ y $g'(t) = ag(t)$, entonces $g(t) = e^{ta} \forall t$.
- (5) Si $ab = ba$, entonces $e^a e^b = e^{a+b} = e^b e^a$.

Teorema de Gelfand-Naimark

Definición

Sea A un álgebra de Banach con unidad. Se define el mapa exponencial

$$\exp : A \rightarrow A : \quad a \mapsto e^a := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

$$\text{Se tiene } \|e^a\| \leq e^{\|a\|} : \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|a^n\|}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|a\|^n}{n!} = e^{\|a\|}.$$

Teorema

Sean A y B álgebras de Banach con unidad, y $a \in A$. Entonces:

- (1) Si $\phi : A \rightarrow B$ es un homomorfismo unital, entonces $\phi(e^a) = e^{\phi(a)}$.
- (2) Si A es una $*$ -álgebra de Banach, entonces $(e^a)^* = e^{(a^*)}$.
- (3) Si $f : \mathbb{C} \rightarrow A$, $f(z) = e^{za}$, entonces $f(0) = 1$ y $f'(z) = af(z) \forall z \in \mathbb{C}$.
- (4) Si $g : \mathbb{R} \rightarrow A$, $g(0) = 1$ y $g'(t) = ag(t)$, entonces $g(t) = e^{ta} \forall t$.
- (5) Si $ab = ba$, entonces $e^a e^b = e^{a+b} = e^b e^a$.
- (6) e^a es invertible, y $(e^a)^{-1} = e^{-a}$.

Demostración.

Demostración.

Demostración.

$$(1) \quad \phi(e^a) = \phi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right)$$

Demostración.

$$(1) \quad \phi(e^a) = \phi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right)$$

Demostración.

$$(1) \quad \phi(e^a) = \phi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a^n)$$

Demostración.

$$(1) \quad \phi(e^a) = \phi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a)^n$$

Demostración.

(1) $\phi(e^a) = \phi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a)^n = e^{\phi(a)}.$

(2) Demostración análoga a la anterior.

Demostración.

- (1) $\phi(e^a) = \phi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a)^n = e^{\phi(a)}.$
- (2) Demostración análoga a la anterior.
- (3) Como en el caso $A = \mathbb{C}$, y con idéntica demostración, la derivada de una serie de potencias con coeficientes en A coincide con la serie de las derivadas de sus términos, de donde se deduce esta parte.

Demostración.

- (1) $\phi(e^a) = \phi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a)^n = e^{\phi(a)}.$
- (2) Demostración análoga a la anterior.
- (3) Como en el caso $A = \mathbb{C}$, y con idéntica demostración, la derivada de una serie de potencias con coeficientes en A coincide con la serie de las derivadas de sus términos, de donde se deduce esta parte.
- (4) Sean f como en (3) y h tal que $h(t) = f(t)g(-t).$

Demostración.

- (1) $\phi(e^a) = \phi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a)^n = e^{\phi(a)}.$
- (2) Demostración análoga a la anterior.
- (3) Como en el caso $A = \mathbb{C}$, y con idéntica demostración, la derivada de una serie de potencias con coeficientes en A coincide con la serie de las derivadas de sus términos, de donde se deduce esta parte.
- (4) Sean f como en (3) y h tal que $h(t) = f(t)g(-t).$

Demostración.

- (1) $\phi(e^a) = \phi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a)^n = e^{\phi(a)}.$
- (2) Demostración análoga a la anterior.
- (3) Como en el caso $A = \mathbb{C}$, y con idéntica demostración, la derivada de una serie de potencias con coeficientes en A coincide con la serie de las derivadas de sus términos, de donde se deduce esta parte.
- (4) Sean f como en (3) y h tal que $h(t) = f(t)g(-t)$. Se tiene

Demostración.

- (1) $\phi(e^a) = \phi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a)^n = e^{\phi(a)}.$
- (2) Demostración análoga a la anterior.
- (3) Como en el caso $A = \mathbb{C}$, y con idéntica demostración, la derivada de una serie de potencias con coeficientes en A coincide con la serie de las derivadas de sus términos, de donde se deduce esta parte.
- (4) Sean f como en (3) y h tal que $h(t) = f(t)g(-t)$. Se tiene

$$h'(t) = f'(t)g(-t) - f(t)g'(-t)$$

Demostración.

- (1) $\phi(e^a) = \phi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a)^n = e^{\phi(a)}.$
- (2) Demostración análoga a la anterior.
- (3) Como en el caso $A = \mathbb{C}$, y con idéntica demostración, la derivada de una serie de potencias con coeficientes en A coincide con la serie de las derivadas de sus términos, de donde se deduce esta parte.
- (4) Sean f como en (3) y h tal que $h(t) = f(t)g(-t)$. Se tiene

$$h'(t) = f'(t)g(-t) - f(t)g'(-t) = af(t)g(-t) - f(t)ag(-t)$$

Demostración.

- (1) $\phi(e^a) = \phi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a)^n = e^{\phi(a)}.$
- (2) Demostración análoga a la anterior.
- (3) Como en el caso $A = \mathbb{C}$, y con idéntica demostración, la derivada de una serie de potencias con coeficientes en A coincide con la serie de las derivadas de sus términos, de donde se deduce esta parte.
- (4) Sean f como en (3) y h tal que $h(t) = f(t)g(-t)$. Se tiene

$$\begin{aligned} h'(t) &= f'(t)g(-t) - f(t)g'(-t) = af(t)g(-t) - f(t)ag(-t) \\ &= af(t)g(-t) - af(t)g(-t) = 0. \end{aligned}$$

Demostración.

- (1) $\phi(e^a) = \phi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a)^n = e^{\phi(a)}.$
- (2) Demostración análoga a la anterior.
- (3) Como en el caso $A = \mathbb{C}$, y con idéntica demostración, la derivada de una serie de potencias con coeficientes en A coincide con la serie de las derivadas de sus términos, de donde se deduce esta parte.
- (4) Sean f como en (3) y h tal que $h(t) = f(t)g(-t)$. Se tiene

$$\begin{aligned} h'(t) &= f'(t)g(-t) - f(t)g'(-t) = af(t)g(-t) - f(t)ag(-t) \\ &= af(t)g(-t) - af(t)g(-t) = 0. \end{aligned}$$

Entonces $1 = h(0) = h(t) = e^{-ta}g(t) = 1 \ \forall t$.

Demostración.

- (1) $\phi(e^a) = \phi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a)^n = e^{\phi(a)}.$
- (2) Demostración análoga a la anterior.
- (3) Como en el caso $A = \mathbb{C}$, y con idéntica demostración, la derivada de una serie de potencias con coeficientes en A coincide con la serie de las derivadas de sus términos, de donde se deduce esta parte.
- (4) Sean f como en (3) y h tal que $h(t) = f(t)g(-t)$. Se tiene

$$\begin{aligned} h'(t) &= f'(t)g(-t) - f(t)g'(-t) = af(t)g(-t) - f(t)ag(-t) \\ &= af(t)g(-t) - af(t)g(-t) = 0. \end{aligned}$$

Entonces $1 = h(0) = h(t) = e^{-ta}g(t) = 1 \ \forall t$. Tomando $g = f$:
 $e^{-ta}e^{ta} = 1 \ \forall t,$

Demostración.

- (1) $\phi(e^a) = \phi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a)^n = e^{\phi(a)}.$
- (2) Demostración análoga a la anterior.
- (3) Como en el caso $A = \mathbb{C}$, y con idéntica demostración, la derivada de una serie de potencias con coeficientes en A coincide con la serie de las derivadas de sus términos, de donde se deduce esta parte.
- (4) Sean f como en (3) y h tal que $h(t) = f(t)g(-t)$. Se tiene

$$\begin{aligned} h'(t) &= f'(t)g(-t) - f(t)g'(-t) = af(t)g(-t) - f(t)ag(-t) \\ &= af(t)g(-t) - af(t)g(-t) = 0. \end{aligned}$$

Entonces $1 = h(0) = h(t) = e^{-ta}g(t) = 1 \forall t$. Tomando $g = f$:
 $e^{-ta}e^{ta} = 1 \forall t$, de donde e^{ta} es invertible y $(e^{ta})^{-1} = e^{-ta}$.

Demostración.

- (1) $\phi(e^a) = \phi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a)^n = e^{\phi(a)}.$
- (2) Demostración análoga a la anterior.
- (3) Como en el caso $A = \mathbb{C}$, y con idéntica demostración, la derivada de una serie de potencias con coeficientes en A coincide con la serie de las derivadas de sus términos, de donde se deduce esta parte.
- (4) Sean f como en (3) y h tal que $h(t) = f(t)g(-t)$. Se tiene

$$\begin{aligned} h'(t) &= f'(t)g(-t) - f(t)g'(-t) = af(t)g(-t) - f(t)ag(-t) \\ &= af(t)g(-t) - af(t)g(-t) = 0. \end{aligned}$$

Entonces $1 = h(0) = h(t) = e^{-ta}g(t) = 1 \ \forall t$. Tomando $g = f$: $e^{-ta}e^{ta} = 1 \ \forall t$, de donde e^{ta} es invertible y $(e^{ta})^{-1} = e^{-ta}$. Esto prueba (6),

Demostración.

- (1) $\phi(e^a) = \phi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a)^n = e^{\phi(a)}.$
- (2) Demostración análoga a la anterior.
- (3) Como en el caso $A = \mathbb{C}$, y con idéntica demostración, la derivada de una serie de potencias con coeficientes en A coincide con la serie de las derivadas de sus términos, de donde se deduce esta parte.
- (4) Sean f como en (3) y h tal que $h(t) = f(t)g(-t)$. Se tiene

$$\begin{aligned} h'(t) &= f'(t)g(-t) - f(t)g'(-t) = af(t)g(-t) - f(t)ag(-t) \\ &= af(t)g(-t) - af(t)g(-t) = 0. \end{aligned}$$

Entonces $1 = h(0) = h(t) = e^{-ta}g(t) = 1 \ \forall t$. Tomando $g = f$: $e^{-ta}e^{ta} = 1 \ \forall t$, de donde e^{ta} es invertible y $(e^{ta})^{-1} = e^{-ta}$. Esto prueba (6), y también (4), ya que $e^{-ta}g(t) = 1$ equivale a $g(t) = e^{ta}$.

Demostración.

- (1) $\phi(e^a) = \phi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a)^n = e^{\phi(a)}.$
- (2) Demostración análoga a la anterior.
- (3) Como en el caso $A = \mathbb{C}$, y con idéntica demostración, la derivada de una serie de potencias con coeficientes en A coincide con la serie de las derivadas de sus términos, de donde se deduce esta parte.
- (4) Sean f como en (3) y h tal que $h(t) = f(t)g(-t)$. Se tiene

$$\begin{aligned} h'(t) &= f'(t)g(-t) - f(t)g'(-t) = af(t)g(-t) - f(t)ag(-t) \\ &= af(t)g(-t) - af(t)g(-t) = 0. \end{aligned}$$

Entonces $1 = h(0) = h(t) = e^{-ta}g(t) = 1 \forall t$. Tomando $g = f$: $e^{-ta}e^{ta} = 1 \forall t$, de donde e^{ta} es invertible y $(e^{ta})^{-1} = e^{-ta}$. Esto prueba (6), y también (4), ya que $e^{-ta}g(t) = 1$ equivale a $g(t) = e^{ta}$.

- (5) Como a y b conmutan, e^{ta} y b también conmutan.

Demostración.

- (1) $\phi(e^a) = \phi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a)^n = e^{\phi(a)}.$
- (2) Demostración análoga a la anterior.
- (3) Como en el caso $A = \mathbb{C}$, y con idéntica demostración, la derivada de una serie de potencias con coeficientes en A coincide con la serie de las derivadas de sus términos, de donde se deduce esta parte.
- (4) Sean f como en (3) y h tal que $h(t) = f(t)g(-t)$. Se tiene

$$\begin{aligned} h'(t) &= f'(t)g(-t) - f(t)g'(-t) = af(t)g(-t) - f(t)ag(-t) \\ &= af(t)g(-t) - af(t)g(-t) = 0. \end{aligned}$$

Entonces $1 = h(0) = h(t) = e^{-ta}g(t) = 1 \ \forall t$. Tomando $g = f$: $e^{-ta}e^{ta} = 1 \ \forall t$, de donde e^{ta} es invertible y $(e^{ta})^{-1} = e^{-ta}$. Esto prueba (6), y también (4), ya que $e^{-ta}g(t) = 1$ equivale a $g(t) = e^{ta}$.

- (5) Como a y b conmutan, e^{ta} y b también conmutan.

Demostración.

- (1) $\phi(e^a) = \phi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a)^n = e^{\phi(a)}.$
- (2) Demostración análoga a la anterior.
- (3) Como en el caso $A = \mathbb{C}$, y con idéntica demostración, la derivada de una serie de potencias con coeficientes en A coincide con la serie de las derivadas de sus términos, de donde se deduce esta parte.
- (4) Sean f como en (3) y h tal que $h(t) = f(t)g(-t)$. Se tiene

$$\begin{aligned} h'(t) &= f'(t)g(-t) - f(t)g'(-t) = af(t)g(-t) - f(t)ag(-t) \\ &= af(t)g(-t) - af(t)g(-t) = 0. \end{aligned}$$

Entonces $1 = h(0) = h(t) = e^{-ta}g(t) = 1 \forall t$. Tomando $g = f$: $e^{-ta}e^{ta} = 1 \forall t$, de donde e^{ta} es invertible y $(e^{ta})^{-1} = e^{-ta}$. Esto prueba (6), y también (4), ya que $e^{-ta}g(t) = 1$ equivale a $g(t) = e^{ta}$.

- (5) Como a y b conmutan, e^{ta} y b también conmutan. Luego si $g: \mathbb{R} \rightarrow A$ es tal que $g(t) = e^{ta}e^{tb}$,

Demostración.

- (1) $\phi(e^a) = \phi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a)^n = e^{\phi(a)}.$
- (2) Demostración análoga a la anterior.
- (3) Como en el caso $A = \mathbb{C}$, y con idéntica demostración, la derivada de una serie de potencias con coeficientes en A coincide con la serie de las derivadas de sus términos, de donde se deduce esta parte.
- (4) Sean f como en (3) y h tal que $h(t) = f(t)g(-t)$. Se tiene

$$\begin{aligned} h'(t) &= f'(t)g(-t) - f(t)g'(-t) = af(t)g(-t) - f(t)ag(-t) \\ &= af(t)g(-t) - af(t)g(-t) = 0. \end{aligned}$$

Entonces $1 = h(0) = h(t) = e^{-ta}g(t) = 1 \ \forall t$. Tomando $g = f$: $e^{-ta}e^{ta} = 1 \ \forall t$, de donde e^{ta} es invertible y $(e^{ta})^{-1} = e^{-ta}$. Esto prueba (6), y también (4), ya que $e^{-ta}g(t) = 1$ equivale a $g(t) = e^{ta}$.

- (5) Como a y b conmutan, e^{ta} y b también conmutan. Luego si $g: \mathbb{R} \rightarrow A$ es tal que $g(t) = e^{ta}e^{tb}$, entonces $g(0) = 1$ y $g'(t) = ae^{ta}e^{tb} + e^{ta}be^{tb} = (a+b)g(t)$.

Demostración.

- (1) $\phi(e^a) = \phi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(a)^n = e^{\phi(a)}.$
- (2) Demostración análoga a la anterior.
- (3) Como en el caso $A = \mathbb{C}$, y con idéntica demostración, la derivada de una serie de potencias con coeficientes en A coincide con la serie de las derivadas de sus términos, de donde se deduce esta parte.
- (4) Sean f como en (3) y h tal que $h(t) = f(t)g(-t)$. Se tiene

$$\begin{aligned} h'(t) &= f'(t)g(-t) - f(t)g'(-t) = af(t)g(-t) - f(t)ag(-t) \\ &= af(t)g(-t) - af(t)g(-t) = 0. \end{aligned}$$

Entonces $1 = h(0) = h(t) = e^{-ta}g(t) = 1 \ \forall t$. Tomando $g = f$: $e^{-ta}e^{ta} = 1 \ \forall t$, de donde e^{ta} es invertible y $(e^{ta})^{-1} = e^{-ta}$. Esto prueba (6), y también (4), ya que $e^{-ta}g(t) = 1$ equivale a $g(t) = e^{ta}$.

- (5) Como a y b conmutan, e^{ta} y b también conmutan. Luego si $g: \mathbb{R} \rightarrow A$ es tal que $g(t) = e^{ta}e^{tb}$, entonces $g(0) = 1$ y $g'(t) = ae^{ta}e^{tb} + e^{ta}be^{tb} = (a+b)g(t)$. Usando (4) se obtiene $g(t) = e^{t(a+b)}$, y en particular $e^ae^b = e^{a+b}$.

Proposición

Sea A una C^ -álgebra con unidad.*

Proposición

Sea A una C^ -álgebra con unidad.*

Proposición

Sea A una C^* -álgebra con unidad.

(a) Si $u \in \mathcal{U}(A) := \{v \in A : v \text{ es unitario}\}$, entonces $\sigma(u) \subset S^1$.

Proposición

Sea A una C^* -álgebra con unidad.

- (a) Si $u \in \mathcal{U}(A) := \{v \in A : v \text{ es unitario}\}$, entonces $\sigma(u) \subset S^1$.
- (b) Si $a \in A_{sa}$, entonces $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.

Proposición

Sea A una C^* -álgebra con unidad.

- (a) Si $u \in \mathcal{U}(A) := \{v \in A : v \text{ es unitario}\}$, entonces $\sigma(u) \subset S^1$.
- (b) Si $a \in A_{sa}$, entonces $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.
- (c) Si $a \in A_{sa}$, entonces $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

Proposición

Sea A una C^* -álgebra con unidad.

- (a) Si $u \in \mathcal{U}(A) := \{v \in A : v \text{ es unitario}\}$, entonces $\sigma(u) \subset S^1$.
- (b) Si $a \in A_{sa}$, entonces $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.
- (c) Si $a \in A_{sa}$, entonces $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

Proposición

Sea A una C^* -álgebra con unidad.

- (a) Si $u \in \mathcal{U}(A) := \{v \in A : v \text{ es unitario}\}$, entonces $\sigma(u) \subset S^1$.
- (b) Si $a \in A_{sa}$, entonces $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.
- (c) Si $a \in A_{sa}$, entonces $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

Demostración.

Proposición

Sea A una C^* -álgebra con unidad.

- (a) Si $u \in \mathcal{U}(A) := \{v \in A : v \text{ es unitario}\}$, entonces $\sigma(u) \subset S^1$.
- (b) Si $a \in A_{sa}$, entonces $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.
- (c) Si $a \in A_{sa}$, entonces $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

Demostración.

- (a) Como $\sigma(u) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \Rightarrow$

Proposición

Sea A una C^* -álgebra con unidad.

- (a) Si $u \in \mathcal{U}(A) := \{v \in A : v \text{ es unitario}\}$, entonces $\sigma(u) \subset S^1$.
- (b) Si $a \in A_{sa}$, entonces $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.
- (c) Si $a \in A_{sa}$, entonces $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

Demostración.

- (a) Como $\sigma(u) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \Rightarrow$

Proposición

Sea A una C^* -álgebra con unidad.

- (a) Si $u \in \mathcal{U}(A) := \{v \in A : v \text{ es unitario}\}$, entonces $\sigma(u) \subset S^1$.
- (b) Si $a \in A_{sa}$, entonces $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.
- (c) Si $a \in A_{sa}$, entonces $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

Demostración.

- (a) Como $\sigma(u) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \Rightarrow \sigma(u^{-1}) = \sigma(u^*) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) = S^1$.
- (b) $(e^{ia})^* = e^{(ia)^*} = e^{-ia^*} = e^{-ia} = (e^{ia})^{-1}$, entonces $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.

Proposición

Sea A una C^* -álgebra con unidad.

- (a) Si $u \in \mathcal{U}(A) := \{v \in A : v \text{ es unitario}\}$, entonces $\sigma(u) \subset S^1$.
- (b) Si $a \in A_{sa}$, entonces $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.
- (c) Si $a \in A_{sa}$, entonces $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

Demostración.

- (a) Como $\sigma(u) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \Rightarrow \sigma(u^{-1}) = \sigma(u^*) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) = S^1$.
- (b) $(e^{ia})^* = e^{(ia)^*} = e^{-ia^*} = e^{-ia} = (e^{ia})^{-1}$, entonces $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.
- (c) $e^{ia} - e^{i\lambda} = e^{i\lambda}(e^{i(a-\lambda)} - 1)$

Proposición

Sea A una C^* -álgebra con unidad.

- (a) Si $u \in \mathcal{U}(A) := \{v \in A : v \text{ es unitario}\}$, entonces $\sigma(u) \subset S^1$.
- (b) Si $a \in A_{sa}$, entonces $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.
- (c) Si $a \in A_{sa}$, entonces $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

Demostración.

- (a) Como $\sigma(u) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \Rightarrow \sigma(u^{-1}) = \sigma(u^*) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) = S^1$.
- (b) $(e^{ia})^* = e^{(ia)^*} = e^{-ia^*} = e^{-ia} = (e^{ia})^{-1}$, entonces $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.
- (c) $e^{ia} - e^{i\lambda} = e^{i\lambda}(e^{i(a-\lambda)} - 1)$

Proposición

Sea A una C^* -álgebra con unidad.

- (a) Si $u \in \mathcal{U}(A) := \{v \in A : v \text{ es unitario}\}$, entonces $\sigma(u) \subset S^1$.
- (b) Si $a \in A_{sa}$, entonces $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.
- (c) Si $a \in A_{sa}$, entonces $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

Demostración.

- (a) Como $\sigma(u) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \Rightarrow \sigma(u^{-1}) = \sigma(u^*) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) = S^1$.
- (b) $(e^{ia})^* = e^{(ia)^*} = e^{-ia^*} = e^{-ia} = (e^{ia})^{-1}$, entonces $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.
- (c) $e^{ia} - e^{i\lambda} = e^{i\lambda}(e^{i(a-\lambda)} - 1) = e^{i\lambda} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i(a-\lambda))^n}{n!} - 1 \right)$

Proposición

Sea A una C^* -álgebra con unidad.

- (a) Si $u \in \mathcal{U}(A) := \{v \in A : v \text{ es unitario}\}$, entonces $\sigma(u) \subset S^1$.
- (b) Si $a \in A_{sa}$, entonces $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.
- (c) Si $a \in A_{sa}$, entonces $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

Demostración.

- (a) Como $\sigma(u) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \Rightarrow \sigma(u^{-1}) = \sigma(u^*) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) = S^1$.
- (b) $(e^{ia})^* = e^{(ia)^*} = e^{-ia^*} = e^{-ia} = (e^{ia})^{-1}$, entonces $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.
- (c)
$$e^{ia} - e^{i\lambda} = e^{i\lambda}(e^{i(a-\lambda)} - 1) = e^{i\lambda} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i(a-\lambda))^n}{n!} - 1 \right)$$
$$= e^{i\lambda} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n (a-\lambda)^n}{n!} \right)$$

Proposición

Sea A una C^* -álgebra con unidad.

- (a) Si $u \in \mathcal{U}(A) := \{v \in A : v \text{ es unitario}\}$, entonces $\sigma(u) \subset S^1$.
- (b) Si $a \in A_{sa}$, entonces $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.
- (c) Si $a \in A_{sa}$, entonces $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

Demostración.

- (a) Como $\sigma(u) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \Rightarrow \sigma(u^{-1}) = \sigma(u^*) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) = S^1$.
- (b) $(e^{ia})^* = e^{(ia)^*} = e^{-ia^*} = e^{-ia} = (e^{ia})^{-1}$, entonces $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.
- (c)
$$e^{ia} - e^{i\lambda} = e^{i\lambda}(e^{i(a-\lambda)} - 1) = e^{i\lambda} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i(a-\lambda))^n}{n!} - 1 \right)$$
$$= e^{i\lambda} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n (a-\lambda)^n}{n!} \right) = e^{i\lambda} (a-\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} (a-\lambda)^{n-1}.$$

Proposición

Sea A una C^* -álgebra con unidad.

- (a) Si $u \in \mathcal{U}(A) := \{v \in A : v \text{ es unitario}\}$, entonces $\sigma(u) \subset S^1$.
- (b) Si $a \in A_{sa}$, entonces $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.
- (c) Si $a \in A_{sa}$, entonces $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

Demostración.

- (a) Como $\sigma(u) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \Rightarrow \sigma(u^{-1}) = \sigma(u^*) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) = S^1$.
- (b) $(e^{ia})^* = e^{(ia)^*} = e^{-ia^*} = e^{-ia} = (e^{ia})^{-1}$, entonces $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.
- (c)
$$e^{ia} - e^{i\lambda} = e^{i\lambda}(e^{i(a-\lambda)} - 1) = e^{i\lambda} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i(a-\lambda))^n}{n!} - 1 \right)$$
$$= e^{i\lambda} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n(a-\lambda)^n}{n!} \right) = e^{i\lambda}(a-\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!}(a-\lambda)^{n-1}.$$

Entonces si $\lambda \in \sigma(a)$ se tiene $e^{i\lambda} \in \sigma(e^{ia}) \subseteq S^1$, y por lo tanto $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

