Repaso

Definición

Sea A una C^*-álgebra (o sea que $\|x\|^2 = \|x^*x\|\ \forall x \in A$).

1. $A_{sa} := \{a \in A : \ a \text{ es autoadjunto } (a^* = a)\}$.
2. $\mathcal{P}(A) := \{p \in A : \ p \text{ es una proyección } (p^*p = p)\}$.
3. $\mathcal{U}(A) := \{u \in A : \ u \text{ es unitario } (u^*u = 1 = uu^*)\}$.
4. $\mathcal{N}(A) := \{x \in A : \ x \text{ es normal } (x^*x = xx^*)\}$.

Teorema

Sean A una C^*-álgebra y $x \in \mathcal{N}(A)$. Entonces $\|x\| = r(x)$.

Teorema

Sean A una $*$-álgebra sobre $\mathbb{C}$, y $\|\ \|_1$ y $\|\ \|_2$ normas sobre A tales que $(A, \|\ \|_1)$, $(A, \|\ \|_2)$ son C^*-álgebras. Entonces $\|\ \|_1 = \|\ \|_2$.

Lema

Si A es una C^*-álgebra y $a \in A$, entonces
$\|a\| = \sup\{\|ax\| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|xa\| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|xay\| : \|x\|, \|y\| \leq 1\}$.

Corolario

$L : A \to B(A)$ tal que $L_a(x) := ax$ es un homomorfismo isométrico de álgebras de Banach (L se llama representación regular izquierda de A).

Proposición

Si A es una C^*-álgebra, su norma se extiende (de forma única) a una C^*-norma en $\widetilde{A}$, y esta es equivalente a la norma $\|a + \lambda\| = \|a\| + |\lambda|$.

Teorema (Segal)

Si A es una $*$-álgebra de Banach, B es una C^*-álgebra, y $\phi : A \to B$ es un $*$-homomorfismo, entonces $\|\phi\| \leq 1$.

Functorialidad

Categorías:

1. $\mathscr{T}_{lch}$. *Objetos:* espacios localmente compactos de Hausdorff. *Morfismos:* $X \xrightarrow{f} Y$ funciones continuas $\underline{\mathscr{propias}}$ (f es propia si $f^{-1}(K)$ es compacto cuando K es compacto).
2. $\mathscr{B}_c$. *Objetos:* álgebras de Banach conmutativas. *Morfismos:* $A \xrightarrow{\phi} B$: homomorfismos continuos tales que $h_b(\phi(A)) \neq 0$, $\forall h_b \in \widehat{B}$.
3. $\mathscr{C}_c^*$. subcategoría plena de $\mathscr{B}_c$ cuyos objetos son C^*-álgebras.

Functores

1. Functor $C_0 : \mathscr{T}_{lch} \to \mathscr{C}_c^*$ tal que a cada $f : X \to Y$ corresponde $f_* : C(Y) \to C(X)$ dado $f_*(b) := b \circ f$ (hay que verificar que f_* es un morfismo en $\mathscr{C}_c^*$).
2. Functor $\widehat{\ } : \mathscr{B}_c \to \mathscr{T}_{lch}$ tal que a cada $A \xrightarrow{\phi} B$ corresponde $\hat{B} \xrightarrow{\hat{\phi}} \hat{A}$ dada por $\hat{\phi}(h_b) := h_b \circ \phi$, $\forall h_B \in \hat{B}$ (hay que ver que $\hat{\phi}$ es propia).
3. Functores $\widehat{\ } \circ C_0 : \mathscr{T}_{lch} \to \mathscr{C}_c^*$ y $C_0 \circ \widehat{\ } : \mathscr{B}_c \to \mathscr{C}_c^*$, composiciones de los anteriores.

Proposición

El functor $\widehat{\ } \circ \mathrm{C}_0 : \mathscr{T}_{lch} \to \mathscr{T}_{lch}$ *es isomorfo al functor identidad.*
Más precisamente, $\delta : \mathrm{Id}_{\mathscr{T}_{lch}} \to \widehat{\ } \circ \mathrm{C}_0$ *es un isomorfismo, donde para cada* $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{T}_{lch})$ *es* $\delta_X : \mathrm{Id}(X) = X \to \widehat{\mathrm{C}_0(X)}$ *dado por* $\delta_X(x) := \delta_x$*, con* $\delta_x(a) = a(x)$, $\forall a \in C_0(X)$.

Demostración. Si $f : X \to Y$ es un morfismo en $\mathscr{T}_{lch}$, entonces el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta_X"', "\cong"] & Y, \arrow[d, "\cong"', "\delta_Y"] \\
\widehat{C_0(X)} \arrow[r, "\widehat{(f_*)}"'] & \widehat{C_0(Y)}
\end{tikzcd}$$

En efecto, si $x \in X$ y $b \in C_0(Y)$:

$$\widehat{(f_*)} \circ \delta_X(x)|_b = \widehat{(f_*)} \circ \delta_x|_b = \delta_x \circ f_*|_b = \delta_x(b \circ f) = b(f(x))$$
$$= \delta_Y(f(x))|_b = \delta_Y \circ f(x)|_b, \text{ y por lo tanto } \widehat{(f_*)} \circ \delta_X = \delta_Y \circ f.$$

Proposición

La transformada de Gelfand es una transformación natural, más precisamente un morfismo de functores $\mathcal{G} : \mathrm{Id}_{\mathscr{B}_c} \to \mathrm{C}_0 \circ \widehat{\ }$.

Demostración. Sea $\phi : A \to B$ un homomorfismo no degenerado entre las álgebras de Banach conmutativas A y B. Hay que ver que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \mathcal{G}_A \big\downarrow & & \big\downarrow \mathcal{G}_B \\ C_0(\widehat{A}\,) & \xrightarrow[(\hat{\phi})_*]{} & C_0(\widehat{B}\,) \end{array}$$

conmuta. Tomemos $a \in A$ y $h \in \widehat{B}\,$. Entonces:

$$\mathcal{G}_B \circ \phi(a)|_h = \mathcal{G}_B(\phi(a))|_h = \widehat{\phi(a)}(h) = h(\phi(a)) = h \circ \phi(a) = \hat{\phi}(h)(a)$$
$$= \hat{a}\,(\hat{\phi}(h)) = \hat{a} \circ \hat{\phi}(h) = (\hat{\phi})_*(\hat{a}\,)|_h = (\hat{\phi})_*(\mathcal{G}_A(a))|_h = (\hat{\phi})_* \circ \mathcal{G}_A(a)|_h,$$ y por lo tanto $\mathcal{G}_B \circ \phi = (\hat{\phi})_* \circ \mathcal{G}_A$.

Multiplicadores

Definición

Sea A una C^*-álgebra. Se dice que $(L,R) \in \mathrm{B}(A) \times \mathrm{B}(A)$ es un multiplicador de A (o doble centralizador de A) si:

$$\begin{aligned} L(xy) &= L(x)y \quad \textit{para todos}\, x, y \in A, \\ R(xy) &= xR(y) \quad \textit{para todos}\, x, y \in A, \\ xL(y) &= R(x)y \quad \textit{para todos}\, x, y \in A. \end{aligned}$$

Ejemplo

Si $A \lhd B$ y $b \in B$, sean $L_b, R_b : A \to A$ definidos por $L_b(x) = bx$ y $R_b(x) = xb$ para todo $x \in A$. Entonces (L_b, R_b) es un multiplicador de A:

$$L_a(xy) = axy = L_a(x)y \qquad xL_a(y) = xay = R_a(x)y$$

Tenemos una inclusión natural isométrica $\iota : A \hookrightarrow \mathrm{M}(A)$ dada por $\iota(a) := (L_a, R_a)$ (en $\mathrm{M}(A)$ se considera $\|(L,R)\| := \max\{\|L\|, \|R\|\}$).

Sea $\mathrm{M}(A) := \{(L,R) : (L,R) \text{ es un multiplicador de } A\}$. Definimos operaciones $+, \cdot : \mathrm{M}(A) \times \mathrm{M}(A) \to \mathrm{M}(A)$ y $* : \mathrm{M}(A) \to \mathrm{M}(A)$ mediante:

$$(L_1, R_1) + (L_2, R_2) = (L_1 + L_2, R_1 + R_2)$$

$$(L_1, R_1) \cdot (L_2, R_2) = (L_1 L_2, R_2 R_1)$$

$$(L, R)^* = (R^*, L^*), \ \textit{donde } T^* : A \to A \textit{ es } T^*(x) = (T(x^*))^*$$

Teorema

$\mathrm{M}(A)$ *es una C^*-álgebra con unidad con* $\|(S,T)\| := \max\{\|S\|, \|T\|\}$.

Demostración. Es rutinario verificar que $\mathrm{M}(A)$ es una $*$-álgebra normada, con unidad (Id, Id). Es cerrada $\mathrm{B}(A) \times \mathrm{B}(A)$, y por lo tanto es un álgebra de Banach. Si $(L,R) \in \mathrm{M}(A)$ entonces $\|L\| = \|(L,R)\| = \|R\|$:

$$\|L\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Lx\| = \sup_{\|x\| \le 1} \left\{ \sup_{\|y\| \le 1} \|yLx\| \right\}$$

$$= \sup_{\|y\| \le 1} \left\{ \sup_{\|x\| \le 1} \|R(y)x\| \right\} = \sup_{\|y\| \le 1} \|Ry\| = \|R\|.$$

Veamos que $\mathrm{M}(A)$ satisface la igualdad C^*: $\|(L,R)^*(L,R)\| = \|(L,R)\|^2$. Como $(L,R)^*(L,R) = (R^*, L^*)(L,R) = (R^*L, RL^*)$, basta ver que $\|R^*L\| \ge \|L\|^2$.

Ahora

$$\|R^*L\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|R^*L(x)\| = \sup_{\|x\|,\|y\|\leq 1} \{\|yR^*L(x)\|\}$$

$$= \sup_{\|x\|,\|y\|\leq 1} \{\|L^*(y)L(x)\|\} = \sup_{\|x\|,\|y\|\leq 1} \{\|(L(y^*))^*L(x)\|\}$$

$$\geq \sup_{\|x\|\leq 1} \|L(x)^*L(x)\| = \|L\|^2.$$

Así como $\tilde{A}$ es la menor unitización de un álgebra sin unidad A, el álgebra de multiplicadores $\mathrm{M}(A)$ es la más grande, en un sentido que aclararemos a continuación. Antes necesitamos una definición:

Definición

Se dice que un ideal (autoadjunto) I de una C^*-álgebra B es esencial si para todo $J \lhd B$, $J \neq 0$, se tiene que $I \cap J \neq 0$.
Si $I \lhd B$ es esencial y B tiene unidad, se dice que B es una ***unitización*** *de I.*

Ejemplos

a) *Si X un espacio localmente compacto y de Hausdorff, entonces $C_0(X)$ es un ideal esencial de $C_b(X)$.*

b) *Si X es como en el ejemplo anterior, y U un subconjunto abierto de X, entonces $C_0(U)$ es un ideal esencial de $C_0(X)$ si y sólo si U es denso en X.*

c) *El álgebra $\mathrm{K}(H)$ de operadores compactos en el espacio de Hilbert H es un ideal esencial en $\mathrm{B}(H)$.*

Supongamos que I es un ideal de B, y sea $I^{\perp} := \{b \in B : bx = 0, \forall x \in I\}$. Entonces $I^{\perp}$ es un ideal cerrado de B, y se tiene que $I \cap I^{\perp} = 0$, pues $xx^* = 0 \iff x = 0$. Por lo tanto I es esencial en B si y sólo si $I^{\perp} = 0$, es decir, si y sólo si la condición $bI = 0$ implica $b = 0$.

Teorema

$\mathrm{M}(A)$ *es una* C^**-álgebra con unidad que contiene a* A *como ideal esencial (vía el mapa* $\iota : A \to \mathrm{M}(A)$ *del Ejemplo 1). Si* C *es otra* C^**-álgebra que contiene a* A *como ideal entonces existe un único homomorfismo* $\phi : C \to \mathrm{M}(A)$ *tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[dr] & \mathrm{M}(A). \\ & C \arrow[u, "\phi"'] \end{tikzcd} \tag{1}$$

Además ϕ *es inyectiva si y sólo si* A *es esencial en* C*.*

Demostración.

1. $(L,R)(L_a,R_a)=(L_{L(a)},R_{L(a)})$, pues $LL_a(x)=L(ax)=L(a)x=L_{L(a)}(x)$. Entonces $LL_a = L_{L(a)}$, y de igual forma se obtiene que $R_aR = R_{L(a)}$.
2. Si $(L,R)(L_a,R_a) = 0\ \forall a \in A$, entonces $L_{L(a)} = 0$ para todo a. Luego $L(a)x = 0\ \forall a, x \in A$. Entonces $L = 0$, y $(L,R) = 0$.
3. Si $A \lhd C$, el morfismo $\phi : C \to \mathrm{M}(A)$ tal que $\phi(c) = (L_c, R_c)$ hace conmutar el diagrama en cuestión. Si $\psi : C \to \mathrm{M}(A)$ es otro tal morfismo, y $\psi(c) = (L,R)$, entonces

   $$(L_{ca}, R_{ca}) = \psi(ca) = \psi(c)\psi(a) = (L,R)(L_a,R_a) = (L_{L(a)}, R_{L(a)}).$$

   Entonces $ca = L(a)$ porque $\iota : A \to \mathrm{M}(A)$ es inyectiva. Luego $L = L_c$ y por lo tanto $R = R_c$. Esto muestra que $\psi = \phi$.
4. Finalmente:

   $$\ker(\phi) = \{c \in C :\ L_c = 0\} = \{c \in C :\ cx = 0,\ \forall x \in A\} = A^\perp,$$

   de modo que ϕ es inyectivo si y sólo si $A^\perp = 0$, es decir, si y sólo si A es un ideal esencial en C.

Ejemplos

a) *Si A tiene unidad, es $A = \mathrm{M}(A)$: si $(L, R) \in \mathrm{M}(A)$ y $a \in A$ se tiene $L(a) = 1L(a) = R(1)a = L_{R(1)}(a)$. Entonces $(L, R) = (L_{R(1)}, R_{R(1)})$.*

b) *Si $\mathrm{K} := \{T \in \mathrm{B}(H) : \ T$ es compacto$\}$, de donde $\mathrm{M}(\mathrm{K}) = \mathrm{B}(H)$.*

c) $\mathrm{M}(C_0(X)) = C_b(X) := \{c : X \to \mathbb{C} : \ c$ *es continua y acotada*$\}$. *Podemos suponer que X no es compacto. Sabemos que $C_0(X)$ es esencial en $C_b(X)$. Por el teorema previo, es inyectivo el homomorfismo*

$$\phi : C_b(X) \to \mathrm{M}(C_0(X)), \ \text{tal que } c \mapsto (L_c, R_c)$$

Si $(L, R) \in \mathrm{M}(C_0(X))$: $\quad R(a)b = aL(b) = L(ba) = L(ab) = L(a)b$. Entonces $(L(a) - R(a))b = 0 \ \forall a, b \in A$, y por tanto es $L = R$. Veamos que ϕ es sobreyectiva. Si $(L, L) \in \mathrm{M}(C_0(X))$ $a, b \in A$:

$$L(a)b = L(ab) = L(ba) = L(b)a.$$

Dados $a, a' \in C_0(X)$ y $x_0 \in X$, con $a(x_0) = a'(x_0)$, sea $b \in C_0(X)$ tal que $b(x_0) = 1$ (b existe según el Lema de Urysohn). Entonces:

$$L(a)(x_0)=L(a)(x_0)b(x_0)=L(b)(x_0)a(x_0)=L(b)(x_0)a'(x_0)=L(a')(x_0).$$

Entonces $L(a)(x_0)$ sólo depende de $a(x_0)$, y $L(a)(x_0) = 0$ si $a(x_0) = 0$. Por el Lema de Urysohn, para cada $x \in X$ y cualquier entorno compacto, digamos V_x, de x, podemos tomar $a_x \in C_c(X)$ tal que $0 \leq a_x \leq 1$ y $a_x(y) = 1$ para todo $y \in V_x$. Sea $c : X \to \mathbb{C}$ dada por $c(x) = L(a_x)(x)$. Ahora:

- $|c(x)| = |L(a_x)(x)| \leq \|L(a_x)\|_\infty \leq \|L\|\|a_x\|_\infty = \|L\|$. Entonces $\|c\|_\infty \leq \|L\| < \infty$.
- Si $y \in V_x$ tenemos que $c(y) = L(a_y)(y) = L(a_x)(y)$. Entonces $c|_{V_x} = L(a_x)|_{V_x}$. Luego c es continua en x. Entonces c es continua.

En consecuencia $c \in C_b(X)$, y si $b \in C_0(X)$:

$$L(b)(x)=L(b)(x)a_x(x)=(L(b)a_x)(x)=(L(a_x)b)(x)=c(x)b(x)=L_c(b)(x),$$

para todo $x \in X$. Entonces $L(b) = L_c(b)$ para todo b, es decir, $L = L_c$. Por lo tanto $\|L\| = \|c\|$, y $\phi : C_b(X) \to \mathrm{M}(C_0(X))$ es un isomorfismo isométrico.

Teorema de Gelfand-Naimark

Definición

Sea A un álgebra de Banach con unidad. Se define el mapa exponencial

$$\exp : A \to A : \qquad a \mapsto e^a := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

$$Se\ tiene\ \|e^a\| \le e^{\|a\|} : \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|a^n\|}{n!} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|a\|^n}{n!} = e^{\|a\|}.$$

Teorema

Sean A y B álgebras de Banach con unidad, y $a \in A$. Entonces:

(1) *Si $\phi : A \to B$ es un homomorfismo unital, entonces $\phi(e^a) = e^{\phi(a)}$.*

(2) *Si A es una $*$-álgebra de Banach, entonces $(e^a)^* = e^{(a^*)}$.*

(3) *Si $f : \mathbb{C} \to A$, $f(z) = e^{za}$, entonces $f(0) = 1$ y $f'(z) = af(z)\ \forall z \in \mathbb{C}$.*

(4) *Si $g : \mathbb{R} \to A/\ \ g(0) = 1$ y $g'(t) = ag(t)$, entonces $g(t) = e^{ta}\ \forall t$.*

(5) *Si $ab = ba$, entonces $e^a e^b = e^{a+b} = e^b e^a$.*

(6) *e^a es invertible, y $(e^a)^{-1} = e^{-a}$.*

Demostración.

(1) $\phi(e^a) = \phi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\phi(a^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\phi(a)^n = e^{\phi(a)}$.

(2) Demostración análoga a la anterior.

(3) Como en el caso $A = \mathbb{C}$, y con idéntica demostración, la derivada de una serie de potencias con coeficientes en A coincide con la serie de las derivadas de sus términos, de donde se deduce esta parte.

(4) Sean f como en (3) y h tal que $h(t) = f(t)g(-t)$. Se tiene

$$\begin{aligned} h'(t) = f'(t)g(-t) - f(t)g'(-t) &= af(t)g(-t) - f(t)ag(-t) \\ &= af(t)g(-t) - af(t)g(-t) = 0. \end{aligned}$$

Entonces $1 = h(0) = h(t) = e^{-ta}g(t) = 1\ \forall t$. Tomando $g = f$: $e^{-ta}e^{ta} = 1\ \forall t$, de donde e^{ta} es invertible y $(e^{ta})^{-1} = e^{-ta}$. Esto prueba (6), y también (4), ya que $e^{-ta}g(t) = 1$ equivale a $g(t) = e^{ta}$.

(5) Como a y b conmutan, e^{ta} y b también conmutam. Luego si $g : \mathbb{R} \to A$ es tal que $g(t) = e^{ta}e^{tb}$, entonces $g(0) = 1$ y $g'(t) = ae^{ta}e^{tb} + e^{ta}be^{tb} = (a+b)g(t)$. Usando (4) se obtiene $g(t) = e^{t(a+b)}$, y en particular $e^a e^b = e^{a+b}$.

Proposición

Sea A una C^*-álgebra con unidad.

(a) *Si $u \in \mathcal{U}(A) := \{v \in A : \ v \text{ es unitario}\}$, entonces $\sigma(u) \subset S^1$.*

(b) *Si $a \in A_{sa}$, entonces $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.*

(c) *Si $a \in A_{sa}$, entonces $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.*

Demostración.

(a) Como $\sigma(u) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \Rightarrow \sigma(u^{-1}) = \sigma(u^*) \subseteq \bar{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) = S^1$.

(b) $(e^{ia})^* = e^{(ia)^*} = e^{-ia^*} = e^{-ia} = (e^{ia})^{-1}$, entonces $e^{ia} \in \mathcal{U}(A)$.

(c) $e^{ia} - e^{i\lambda} = e^{i\lambda}(e^{i(a-\lambda)} - 1) = e^{i\lambda}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i(a-\lambda))^n}{n!} - 1\right)$

$$= e^{i\lambda}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n(a-\lambda)^n}{n!}\right) = e^{i\lambda}(a-\lambda)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!}(a-\lambda)^{n-1}.$$

Entonces si $\lambda \in \sigma(a)$ se tiene $e^{i\lambda} \in \sigma(e^{ia}) \subseteq S^1$, y por lo tanto $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

□