

- 1 Repaso y complementos
 - Álgebras de funciones
 - Functorialidad, I

- 2 C^* -álgebras

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa con unidad y $a \in A$ tal que A está generada por 1 y a , es decir: $A = \overline{\{p(a) : p \in \mathbb{C}[X]\}}$. Entonces:

- 1 $ev_a : \widehat{A} \rightarrow \sigma(a)$ dada $ev_a(h) = h(a)$ es un homeomorfismo.
- 2 $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ es conexo.

Ejemplo (El álgebra del disco)

La inclusión $a : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}$ genera a $A(\mathbb{D})$, y $\sigma(a) = \bar{\mathbb{D}}$, de donde $\widehat{A(\mathbb{D})} = \bar{\mathbb{D}}$.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach con unidad y a un elemento invertible de A . Si a y a^{-1} generan A como álgebra de Banach, es decir, $A = \overline{\{p(a, a^{-1}) : p \in \mathbb{C}[x, y]\}}$, entonces la evaluación $ev_a : \widehat{A} \rightarrow \sigma(a)$, dada por $ev_a(h) = h(a)$, es un homeomorfismo.

Definición

Sean X un espacio de Hausdorff localmente compacto y $A \subseteq C_0(X)$ un álgebra de Banach (la norma de A no es necesariamente la $\| \cdot \|_\infty$). Se dice que A es un álgebra de funciones sobre X si:

- (i) A separa puntos de X , es decir si $x_1, x_2 \in X$ son tales que $a(x_1) = a(x_2)$ para todo $a \in A$ entonces $x_1 = x_2$.
- (ii) $A(x) \neq 0$, es decir, para todo $x \in X$ existe $a \in A$ tal que $a(x) \neq 0$ (se dice entonces que A no se anula en X).

Observación

La inclusión natural $A \xhookrightarrow{\iota} C_0(X)$ es un homomorfismo de álgebras, y por lo tanto $\|\iota(a)\|_\infty \leq \|a\|$ para todo $a \in A$, ya que cada homomorfismo complejo de un álgebra de Banach es contractivo. Luego es $\| \cdot \|_\infty \leq \| \cdot \|$.

Proposición

Si B es un álgebra de Banach conmutativa y $A := \overline{\mathcal{G}(B)}^{\|\cdot\|_\infty} \subseteq C_0(\widehat{B})$, entonces A es un álgebra de funciones sobre $\widehat{B}$.

Proposición

Sea A un álgebra de funciones sobre X . Para cada $x \in X$ sea $\delta_x \in \widehat{A}$ tal que $\delta_x(a) = a(x)$. Entonces el mapa $\delta : X \rightarrow \widehat{A}$ tal que $x \mapsto \delta_x$ es un homeomorfismo entre X y un subconjunto cerrado de $\widehat{A}$.

Demostración.

- 1 $\delta_x \in \widehat{A}$ porque $A(x) \neq 0$, y δ es inyectivo porque A separa puntos.
- 2 Es fácil ver que δ es continua, y que $\delta(X)$ es cerrado en $\widehat{A}$.
- 3 La extensión $\delta_\infty : X_\infty \rightarrow \widehat{A} \cup \{0\}$ de δ a las compactificaciones de X y $\widehat{A}$ (dada por $\delta_\infty(\infty) = 0$) es continua y biyectiva, así que $\delta^{-1} = \delta_\infty^{-1}|_{\delta(X)}$ es continua.

Ejemplo (El álgebra del disco ataca de nuevo)

El mapa $A(\mathbb{D}) \rightarrow C(S^1)$ tal que $b \mapsto b|_{S^1}$ es un isomorfismo isométrico sobre su imagen, A , que es un álgebra de funciones sobre S^1 . En este caso $\delta : S^1 \rightarrow \widehat{\mathbb{D}} = \widehat{A(\mathbb{D})}$ es la inclusión canónica, que no es sobreyectivo.

Ejemplo (El álgebra de Wiener)

Es $\mathcal{W}(S^1) = \{a \in C(S^1) : a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n, \text{ con } \|a\| := \sum_n |a_n| < \infty\}$.

- Es un álgebra de funciones sobre S^1 y $\mathcal{W}(S^1) \cong l^1(\mathbb{Z})$.
- Si $e_k(z) = z^k$, entonces $e_k = e_1^k \in \mathcal{W}(S^1)$ y $\sigma(e_k) = \sigma(e_1)^k \forall k \in \mathbb{Z}$. Entonces $\mathcal{W}(S^1)$ está generado por e_1 y e_1^{-1} como álgebra de Banach
- Como $\sigma(e_k) = \sigma(e_1)^k \subseteq \widehat{\mathbb{D}}$ y $\sigma(e_1) \supseteq S^1$, entonces $\sigma(e_1) = S^1$.
- El mapa $\delta : S^1 \rightarrow \widehat{\mathcal{W}(S^1)}$, dado por $z \mapsto \delta_z$, es un homeomorfismo sobre un subconjunto cerrado de $\widehat{\mathcal{W}(S^1)}$, y el mapa $\widehat{\mathcal{W}(S^1)} \rightarrow \sigma(e_1) = S^1$ tal que $h \mapsto h(e_1)$ es un homeomorfismo.
- Entonces $\widehat{\mathcal{W}(S^1)} \stackrel{\delta}{\cong} S^1$ porque δ es un homeomorfismo:

Basta ver que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 S^1 & \xrightarrow{id} & S^1 = \sigma(e_1), \\
 & \searrow \delta & \uparrow \cong \uparrow ev_{e_1} \\
 & & \widehat{\mathcal{W}(S^1)}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \overline{z} & \xrightarrow{\quad} & z = \delta_z(e_1) \\
 & \searrow & \uparrow \\
 & & \delta_z
 \end{array}$$

Esto muestra que δ es un homeomorfismo; en particular $\widehat{\mathcal{W}(S^1)} = \delta(S^1)$.

Proposición (Teorema de Wiener)

Si $a : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ continua tiene serie de Fourier absolutamente convergente y no se anula, entonces $\frac{1}{a}$ también tiene serie de Fourier absolutamente convergente.

Demostración.

Si $a \in \mathcal{W}(S^1)$ es tal que $a(z) \neq 0$ para todo $z \in S^1$, entonces

$$\sigma(a) = \{h(a) : h \in \widehat{\mathcal{W}(S^1)}\} = \{a(z) : z \in S^1\} \not\ni 0.$$

Luego $a \in \text{Inv}(\mathcal{W}(S^1))$, es decir $\frac{1}{a} \in \mathcal{W}(S^1)$.

Functorialidad, I

- 1 Si $A \xrightarrow{\phi} B$ entre álgebras de Banach conmutativas, para $h_B \in \widehat{B}$ sea $\hat{\phi}(h_b) := h_b \circ \phi$. No siempre es cierto que $\hat{\phi}(h_b) \in \widehat{A}$ (aunque sí lo es si A y B tienen unidad).
- 2 Si X e Y son compactos de Hff y $f : X \rightarrow Y$ es continua, entonces $f_* : C(Y) \rightarrow C(X)$ tal que $f_*(b) := b \circ f$ es un hm. Esto no necesariamente es cierto si X no es compacto; para que sea cierto es preciso que f se *propia*: $f^{-1}(K)$ es compacto si K es compacto.
- 3 Si $\mathcal{A}_1$ es la categoría de álgebras de Banach conmutativas con unidad y $\mathcal{C}_1^*$ es la categoría de álgebras de C^* -álgebras conmutativas con unidad, entonces tenemos un functor (que se factoriza como composición de dos funtores): $C \circ \widehat{} : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{C}_1^*$, dado por

$$(A \xrightarrow{\phi} B) \mapsto (C(\widehat{A}) \xrightarrow{\hat{\phi}_*} C(\widehat{B})).$$

- 4 La transformada de Gelfand es una transformación natural $\mathcal{G} : Id \rightarrow C \circ \widehat{}$, o sea:

Para cada homomorfismo $A \xrightarrow{\phi} B$ en $\mathcal{A}_1$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \mathcal{G}_A \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}_B \\ C(\widehat{A}) & \xrightarrow{\hat{\phi}_*} & C(\widehat{B}) \end{array}$$

Definición

Sea A una C^* -álgebra (o sea que $\|x\|^2 = \|x^*x\| \ \forall x \in A$).

- ❶ $a \in A$ es autoadjunto si $a^* = a$. Se pone $a \in A_{sa}$.
- ❷ $p \in A$ es una proyección si $p^*p = p$. Se pone $p \in \mathcal{P}(A)$.
- ❸ Si $A \ni 1$ y $u \in A$, se dice que u es unitario si $u^*u = 1 = uu^*$. Se pone $u \in \mathcal{U}(A)$.
- ❹ $x \in A$ es normal si $xx^* = x^*x$. Se pone $x \in \mathcal{N}(A)$.

Teorema

Sean A una C^* -álgebra y $x \in \mathcal{N}(A)$. Entonces $\|x\| = r(x)$.

Demostración.

Si $a \in A_{sa}$ se tiene $\|a\|^2 = \|a^*a\| = \|a^2\|$, y entonces $\|a\|^{2^n} = \|a^{2^n}\| \ \forall n \geq 0$ porque $a^{2^j} \in A_{sa} \ \forall j$. Entonces $\|a\| = \|a^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} \rightarrow r(a)$. Si $x \in \mathcal{N}(A)$:
 $\|x\|^2 = \|x^*x\| = \lim_n \|(x^*x)^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_n \|(x^*)^n x^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_n (\|x^n\|^{\frac{1}{n}})^2 = r(x)^2. \quad \square$

Teorema

Sean A una $*$ -álgebra sobre $\mathbb{C}$, y $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ normas sobre A tales que $(A, \|\cdot\|_1)$, $(A, \|\cdot\|_2)$ son C^* -álgebras. Entonces $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$.

Demostración. Sea $a \in A$. Entonces a^*a es autoadjunto, y por lo tanto:
$$\|a\|_1^2 = \|a^*a\|_1 = r(a^*a) = \|a^*a\|_2 = \|a\|_2^2.$$

Lema

Si A es una C^* -álgebra y $a \in A$, entonces

$$\|a\| = \sup\{\|ax\| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|xa\| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|xay\| : \|x\|, \|y\| \leq 1\}.$$

Demostración. Como $\|ax\| \leq \|a\|\|x\|$, es $\sup\{\|ax\| : \|x\| \leq 1\} \leq \|a\|$.

Recíprocamente, si $a \neq 0$ y $x = \frac{a^*}{\|a\|}$: $\|ax\| = \left\| a \frac{a^*}{\|a\|} \right\| = \frac{\|a\|^2}{\|a\|} = \|a\|$.

Luego es $\|a\| = \sup\{\|ax\| : \|x\| \leq 1\}$. Ídem con las otras igualdades.

Corolario

$L : A \rightarrow B(A)$ tal que $L_a(x) := ax$ es un homomorfismo isométrico de álgebras de Banach (L se llama representación regular izquierda de A).

Proposición

Si A es una C^* -álgebra, su norma se extiende (de forma única) a una C^* -norma en $\tilde{A}$, y esta es equivalente a la norma $\|a + \lambda\| = \|a\| + |\lambda|$.

Demostración. El teorema anterior asegura la unicidad. Si A tiene unidad, entonces $\tilde{A} \cong A \oplus \mathbb{C}$ a través de $(a + \lambda) \mapsto (a + \lambda, \lambda)$. Si A no tiene unidad definimos:

$$|a + \lambda| := \|L_a + \lambda Id\| = \sup\{\|(a + \lambda)x\| : x \in A, \|x\| \leq 1\}$$

Dado $\epsilon > 0$, sea $x \in A$ tal que $\|x\| \leq 1$ y $|a + \lambda|^2 - \epsilon \leq \|(a + \lambda)x\|^2$. Es $|a + \lambda|^2 - \epsilon \leq \|x^*(a + \lambda)^*(a + \lambda)x\| \leq \|(a + \lambda)^*(a + \lambda)x\| \leq \|(a + \lambda)^*(a + \lambda)\|$. Luego $(\tilde{A}, | \cdot |)$ es una C^* -álgebra (es completa: A y $\tilde{A}/A \cong \mathbb{C}$ lo son). Además $|a + \lambda| \leq \|a\| + |\lambda| = \|a + \lambda\|_1$, así que $Id : (\tilde{A}, \| \cdot \|_1) \rightarrow (\tilde{A}, | \cdot |)$ es continua y biyectiva, y por lo tanto $\| \cdot \|_1$ y $| \cdot |$ son equivalentes por el teorema de Banach.

Teorema (Segal)

Si A es una $*$ -álgebra de Banach, B es una C^* -álgebra, y $\phi : A \rightarrow B$ es un $*$ -homomorfismo, entonces $\|\phi\| \leq 1$.

Demostración. Se puede suponer que A y B tienen unidad y además que $\phi(1) = 1$ (si no tienen unidad pasar a $\tilde{\phi} : \tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$). Ahora, si $a \in A$:

$$\begin{aligned}\|\phi(a)\|^2 &= \|\phi(a)^* \phi(a)\| = \|\phi(a^* a)\| = r(\phi(a^* a)) \\ &\leq r(a^* a) \leq \|a^* a\| \leq \|a^*\| \|a\| = \|a\|^2.\end{aligned}$$

Entonces $\|\phi(a)\| \leq \|a\|$, y por lo tanto $\|\phi\| \leq 1$.