1. Repaso

Repaso.

1. Álgebras normadas, de Banach, C*-álgebras, y sus homomorfismos.

Repaso.

1. Álgebras normadas, de Banach, C*-álgebras, y sus homomorfismos.
2. Ideales modulares, homomorfismos sobreyectivos a álgebras con unidad.

Repaso.

1. Álgebras normadas, de Banach, C*-álgebras, y sus homomorfismos.
2. Ideales modulares, homomorfismos sobreyectivos a álgebras con unidad.
3. $\mathrm{Inv}(A)$, $\sigma(a)$, $r(a) = \text{máx}\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$.

Repaso.

1. Álgebras normadas, de Banach, C*-álgebras, y sus homomorfismos.
2. Ideales modulares, homomorfismos sobreyectivos a álgebras con unidad.
3. $\mathrm{Inv}(A)$, $\sigma(a)$, $r(a) = \text{máx}\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$.
4. $\sigma(a)$ es compacto y no vacío, y $r(a) = \text{lím}_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Repaso.

1. Álgebras normadas, de Banach, C*-álgebras, y sus homomorfismos.
2. Ideales modulares, homomorfismos sobreyectivos a álgebras con unidad.
3. $\mathrm{Inv}(A)$, $\sigma(a)$, $r(a) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$.
4. $\sigma(a)$ es compacto y no vacío, y $r(a) = \lim_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.
5. Transformada de Gelfand (ejemplos guía: transformadas de Fourier).

Repaso.

1. Álgebras normadas, de Banach, C*-álgebras, y sus homomorfismos.
2. Ideales modulares, homomorfismos sobreyectivos a álgebras con unidad.
3. $\mathrm{Inv}(A)$, $\sigma(a)$, $r(a) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$.
4. $\sigma(a)$ es compacto y no vacío, y $r(a) = \lim_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.
5. Transformada de Gelfand (ejemplos guía: transformadas de Fourier).
6. Si B es de Banach y $h : B \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo, entonces $\|h\| \leq 1$; si B es unital entonces $h(1) = 1 = \|h\|$.

Repaso.

1. Álgebras normadas, de Banach, C*-álgebras, y sus homomorfismos.
2. Ideales modulares, homomorfismos sobreyectivos a álgebras con unidad.
3. $\mathrm{Inv}(A)$, $\sigma(a)$, $r(a) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$.
4. $\sigma(a)$ es compacto y no vacío, y $r(a) = \lim_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.
5. Transformada de Gelfand (ejemplos guía: transformadas de Fourier).
6. Si B es de Banach y $h : B \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo, entonces $\|h\| \leq 1$; si B es unital entonces $h(1) = 1 = \|h\|$.
7. Si A es un álgebra de Banach conmutativa, entonces $h \mapsto \ker h$ es una biyección entre el conjunto de homomorfismos complejos no nulos de A y el conjunto de ideales modulares maximales de A.

Repaso.

1. Álgebras normadas, de Banach, C*-álgebras, y sus homomorfismos.
2. Ideales modulares, homomorfismos sobreyectivos a álgebras con unidad.
3. $\mathrm{Inv}(A)$, $\sigma(a)$, $r(a) = \text{máx}\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$.
4. $\sigma(a)$ es compacto y no vacío, y $r(a) = \text{lím}_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.
5. Transformada de Gelfand (ejemplos guía: transformadas de Fourier).
6. Si B es de Banach y $h : B \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo, entonces $\|h\| \leq 1$; si B es unital entonces $h(1) = 1 = \|h\|$.
7. Si A es un álgebra de Banach conmutativa, entonces $h \mapsto \ker h$ es una biyección entre el conjunto de homomorfismos complejos no nulos de A y el conjunto de ideales modulares maximales de A.
8. El espectro $(\hat{A}, w^*)$ de A: es localmente compacto y de Hausdorff,

Repaso.

1. Álgebras normadas, de Banach, C*-álgebras, y sus homomorfismos.
2. Ideales modulares, homomorfismos sobreyectivos a álgebras con unidad.
3. $\mathrm{Inv}(A)$, $\sigma(a)$, $r(a) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$.
4. $\sigma(a)$ es compacto y no vacío, y $r(a) = \lim_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.
5. Transformada de Gelfand (ejemplos guía: transformadas de Fourier).
6. Si B es de Banach y $h : B \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo, entonces $\|h\| \leq 1$; si B es unital entonces $h(1) = 1 = \|h\|$.
7. Si A es un álgebra de Banach conmutativa, entonces $h \mapsto \ker h$ es una biyección entre el conjunto de homomorfismos complejos no nulos de A y el conjunto de ideales modulares maximales de A.
8. El espectro $(\hat{A}, w^*)$ de A: es localmente compacto y de Hausdorff,

Repaso.

1. Álgebras normadas, de Banach, C*-álgebras, y sus homomorfismos.
2. Ideales modulares, homomorfismos sobreyectivos a álgebras con unidad.
3. $\mathrm{Inv}(A)$, $\sigma(a)$, $r(a) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$.
4. $\sigma(a)$ es compacto y no vacío, y $r(a) = \lim_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.
5. Transformada de Gelfand (ejemplos guía: transformadas de Fourier).
6. Si B es de Banach y $h : B \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo, entonces $\|h\| \leq 1$; si B es unital entonces $h(1) = 1 = \|h\|$.
7. Si A es un álgebra de Banach conmutativa, entonces $h \mapsto \ker h$ es una biyección entre el conjunto de homomorfismos complejos no nulos de A y el conjunto de ideales modulares maximales de A.
8. El espectro $(\hat{A}, w^*)$ de A: es localmente compacto y de Hausdorff, compacto si A tiene unidad,

Repaso.

1. Álgebras normadas, de Banach, C*-álgebras, y sus homomorfismos.
2. Ideales modulares, homomorfismos sobreyectivos a álgebras con unidad.
3. $\mathrm{Inv}(A)$, $\sigma(a)$, $r(a) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$.
4. $\sigma(a)$ es compacto y no vacío, y $r(a) = \lim_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.
5. Transformada de Gelfand (ejemplos guía: transformadas de Fourier).
6. Si B es de Banach y $h : B \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo, entonces $\|h\| \leq 1$; si B es unital entonces $h(1) = 1 = \|h\|$.
7. Si A es un álgebra de Banach conmutativa, entonces $h \mapsto \ker h$ es una biyección entre el conjunto de homomorfismos complejos no nulos de A y el conjunto de ideales modulares maximales de A.
8. El espectro $(\hat{A}, w^*)$ de A: es localmente compacto y de Hausdorff, compacto si A tiene unidad,metrizable y separable si A es separable.

Repaso.

1. Álgebras normadas, de Banach, C*-álgebras, y sus homomorfismos.
2. Ideales modulares, homomorfismos sobreyectivos a álgebras con unidad.
3. $\operatorname{Inv}(A)$, $\sigma(a)$, $r(a) = \text{máx}\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$.
4. $\sigma(a)$ es compacto y no vacío, y $r(a) = \text{lím}_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.
5. Transformada de Gelfand (ejemplos guía: transformadas de Fourier).
6. Si B es de Banach y $h : B \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo, entonces $\|h\| \leq 1$; si B es unital entonces $h(1) = 1 = \|h\|$.
7. Si A es un álgebra de Banach conmutativa, entonces $h \mapsto \ker h$ es una biyección entre el conjunto de homomorfismos complejos no nulos de A y el conjunto de ideales modulares maximales de A.
8. El espectro $(\hat{A}, w^*)$ de A: es localmente compacto y de Hausdorff, compacto si A tiene unidad,metrizable y separable si A es separable. Su clausura está contenida en $\hat{A} \cup \{0\}$, y este conjunto, que es la compactificación con un punto de $\hat{A}$, es homeomorfo a $\widehat{\tilde{A}}$.

Definición

Sean A un álgebra de Banach y $a \in A$. La **transformada de Gelfand de** a *es* $\hat{a} : \widehat{A} \to \mathbb{C}$ *tal que*

$$\hat{a}\,(h) := h(a), \quad \forall h \in \widehat{A}\,.$$

Definición

Sean A un álgebra de Banach y $a \in A$. La **transformada de Gelfand de** *a es $\hat{a} : \widehat{A} \to \mathbb{C}$ tal que*

$$\hat{a}(h) := h(a), \quad \forall h \in \widehat{A}.$$

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$.

Definición

Sean A un álgebra de Banach y $a \in A$. La **transformada de Gelfand de** *a es $\hat{a} : \widehat{A} \to \mathbb{C}$ tal que*

$$\hat{a}\,(h) := h(a), \quad \forall h \in \widehat{A}\,.$$

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$.

1. *Si A tiene unidad, entonces $\sigma(a) = \overline{Im(\hat{a}\,)} = Im(\hat{a}\,) = \{h(a) : h \in \widehat{A}\,\}$.*

Definición

Sean A un álgebra de Banach y $a \in A$. La **transformada de Gelfand de** *a es $\hat{a} : \widehat{A} \to \mathbb{C}$ tal que*

$$\hat{a}(h) := h(a), \quad \forall h \in \widehat{A}.$$

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$.

1. *Si A tiene unidad, entonces $\sigma(a) = \overline{Im(\hat{a})} = Im(\hat{a}) = \{h(a) : h \in \widehat{A}\}$.*
2. *Si A no tiene unidad, entonces $\sigma(a) = \{h(a) : h \in \widehat{A}\} \cup \{0\}$. En particular si $\widehat{A}$ no es compacto, entonces $\sigma(a) = \overline{Im(\hat{a})}$.*

Definición

Sean A un álgebra de Banach y $a \in A$. La **transformada de Gelfand de** a *es* $\hat{a} : \widehat{A} \to \mathbb{C}$ *tal que*

$$\hat{a}(h) := h(a), \quad \forall h \in \widehat{A}.$$

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$.

1. *Si A tiene unidad, entonces* $\sigma(a) = \overline{Im(\hat{a})} = Im(\hat{a}) = \{h(a) : h \in \widehat{A}\}$.
2. *Si A no tiene unidad, entonces* $\sigma(a) = \{h(a) : h \in \widehat{A}\} \cup \{0\}$.
   En particular si $\widehat{A}$ no es compacto, entonces $\sigma(a) = \overline{Im(\hat{a})}$.

Definición

Sean A un álgebra de Banach y $a \in A$. La **transformada de Gelfand de** *a es $\hat{a} : \widehat{A} \to \mathbb{C}$ tal que*

$$\hat{a}(h) := h(a), \quad \forall h \in \widehat{A}.$$

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$.

1. *Si A tiene unidad, entonces $\sigma(a) = \overline{Im(\hat{a})} = Im(\hat{a}) = \{h(a) : h \in \widehat{A}\}$.*
2. *Si A no tiene unidad, entonces $\sigma(a) = \{h(a) : h \in \widehat{A}\} \cup \{0\}$. En particular si $\widehat{A}$ no es compacto, entonces $\sigma(a) = \overline{Im(\hat{a})}$.*

Demostración.

Definición

Sean A un álgebra de Banach y $a \in A$. La **transformada de Gelfand de** a *es* $\hat{a} : \widehat{A} \to \mathbb{C}$ *tal que*

$$\hat{a}(h) := h(a), \quad \forall h \in \widehat{A}.$$

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$.

1. *Si A tiene unidad, entonces* $\sigma(a) = \overline{Im(\hat{a})} = Im(\hat{a}) = \{h(a) : h \in \widehat{A}\}$.
2. *Si A no tiene unidad, entonces* $\sigma(a) = \{h(a) : h \in \widehat{A}\} \cup \{0\}$.
   En particular si $\widehat{A}$ no es compacto, entonces $\sigma(a) = \overline{Im(\hat{a})}$.

Demostración. La segunda afirmación se deduce de la primera.

Definición

Sean A un álgebra de Banach y $a \in A$. La **transformada de Gelfand de** *a es $\hat{a} : \widehat{A} \to \mathbb{C}$ tal que*

$$\hat{a}(h) := h(a), \quad \forall h \in \widehat{A}.$$

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$.

1. *Si A tiene unidad, entonces $\sigma(a) = \overline{Im(\hat{a})} = Im(\hat{a}) = \{h(a) : h \in \widehat{A}\}$.*
2. *Si A no tiene unidad, entonces $\sigma(a) = \{h(a) : h \in \widehat{A}\} \cup \{0\}$. En particular si $\widehat{A}$ no es compacto, entonces $\sigma(a) = \overline{Im(\hat{a})}$.*

Demostración. La segunda afirmación se deduce de la primera. Supongamos que A tiene unidad.

Definición

Sean A un álgebra de Banach y $a \in A$. La **transformada de Gelfand de** *a es $\hat{a} : \widehat{A} \to \mathbb{C}$ tal que*

$$\hat{a}(h) := h(a), \quad \forall h \in \widehat{A}.$$

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$.

1. *Si A tiene unidad, entonces $\sigma(a) = \overline{Im(\hat{a})} = Im(\hat{a}) = \{h(a) : h \in \widehat{A}\}$.*
2. *Si A no tiene unidad, entonces $\sigma(a) = \{h(a) : h \in \widehat{A}\} \cup \{0\}$.*
   En particular si $\widehat{A}$ no es compacto, entonces $\sigma(a) = \overline{Im(\hat{a})}$.

Demostración. La segunda afirmación se deduce de la primera. Supongamos que A tiene unidad. Si $h \in \widehat{A}$, entonces $a - h(a) \in \ker h$, y por lo tanto no es invertible, o sea $h(a) \in \sigma(a)$.

Definición

Sean A un álgebra de Banach y $a \in A$. La **transformada de Gelfand de** *a es $\hat{a} : \widehat{A} \to \mathbb{C}$ tal que*

$$\hat{a}(h) := h(a), \quad \forall h \in \widehat{A}.$$

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$.

1. *Si A tiene unidad, entonces $\sigma(a) = \overline{Im(\hat{a})} = Im(\hat{a}) = \{h(a) : h \in \widehat{A}\}$.*
2. *Si A no tiene unidad, entonces $\sigma(a) = \{h(a) : h \in \widehat{A}\} \cup \{0\}$. En particular si $\widehat{A}$ no es compacto, entonces $\sigma(a) = \overline{Im(\hat{a})}$.*

Demostración. La segunda afirmación se deduce de la primera. Supongamos que A tiene unidad. Si $h \in \widehat{A}$, entonces $a - h(a) \in \ker h$, y por lo tanto no es invertible, o sea $h(a) \in \sigma(a)$. Recíprocamente, si $\lambda \in \sigma(a)$, entonces $A(a - \lambda)$ es un ideal modular propio, y por lo tanto está contenido en un ideal modular maximal $M = \ker h_M$, para cierto -único- $h_M \in \widehat{A}$; luego $\lambda = h_M(a)$.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$. Entonces

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$. Entonces

1. $\hat{a}$ *es continua y* $\|\hat{a}\|_\infty \leq \|a\|$.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$. Entonces

1. $\hat{a}$ *es continua y* $\|\hat{a}\|_\infty \leq \|a\|$.
2. $\hat{a} \in C_0(\widehat{A})$.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$. Entonces

1. $\hat{a}$ *es continua y* $\|\hat{a}\|_\infty \leq \|a\|$.
2. $\hat{a} \in C_0(\widehat{A})$.
3. $\mathcal{G} : A \to C_0(\widehat{A})$, *dada por* $a \mapsto \hat{a}$ *para todo* $a \in A$, *es un homomorfismo de álgebras (unital si* $A \ni 1$*).*

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$. Entonces

1. $\hat{a}$ *es continua y* $\|\hat{a}\|_\infty \leq \|a\|$.
2. $\hat{a} \in C_0(\widehat{A})$.
3. $\mathcal{G} : A \to C_0(\widehat{A})$, *dada por* $a \mapsto \hat{a}$ *para todo* $a \in A$, *es un homomorfismo de álgebras (unital si* $A \ni 1$*).*
4. $\ker(\mathcal{G}) = rad(A)$.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$. Entonces

1. $\hat{a}$ *es continua y* $\|\hat{a}\|_\infty \leq \|a\|$.
2. $\hat{a} \in C_0(\widehat{A})$.
3. $\mathcal{G} : A \to C_0(\widehat{A})$, *dada por* $a \mapsto \hat{a}$ *para todo* $a \in A$, *es un homomorfismo de álgebras (unital si* $A \ni 1$*).*
4. $\ker(\mathcal{G}) = rad(A)$.
5. $\|\hat{a}\|_\infty = r(a) = \text{lím}_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$. Entonces

1. $\hat{a}$ *es continua y* $\|\hat{a}\|_\infty \leq \|a\|$.
2. $\hat{a} \in C_0(\widehat{A})$.
3. $\mathcal{G} : A \to C_0(\widehat{A})$, *dada por* $a \mapsto \hat{a}$ *para todo* $a \in A$, *es un homomorfismo de álgebras (unital si* $A \ni 1$*).*
4. $\ker(\mathcal{G}) = rad(A)$.
5. $\|\hat{a}\|_\infty = r(a) = \lim_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$. Entonces

1. $\hat{a}$ *es continua y* $\|\hat{a}\|_\infty \leq \|a\|$.
2. $\hat{a} \in C_0(\widehat{A})$.
3. $\mathcal{G} : A \to C_0(\widehat{A})$, *dada por* $a \mapsto \hat{a}$ *para todo* $a \in A$, *es un homomorfismo de álgebras (unital si* $A \ni 1$*).*
4. $\ker(\mathcal{G}) = rad(A)$.
5. $\|\hat{a}\|_\infty = r(a) = \lim_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Demostración.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$. Entonces

1. $\hat{a}$ *es continua y* $\|\hat{a}\|_\infty \leq \|a\|$.
2. $\hat{a} \in C_0(\widehat{A})$.
3. $\mathcal{G} : A \to C_0(\widehat{A})$, *dada por* $a \mapsto \hat{a}$ *para todo* $a \in A$, *es un homomorfismo de álgebras (unital si* $A \ni 1$*).*
4. $\ker(\mathcal{G}) = rad(A)$.
5. $\|\hat{a}\|_\infty = r(a) = \text{lím}_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Demostración. Las partes (1) y (3) son simples ejercicios,

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$. Entonces

1. $\hat{a}$ *es continua y* $\|\hat{a}\|_\infty \leq \|a\|$.
2. $\hat{a} \in C_0(\widehat{A})$.
3. $\mathcal{G} : A \to C_0(\widehat{A})$, *dada por* $a \mapsto \hat{a}$ *para todo* $a \in A$, *es un homomorfismo de álgebras (unital si* $A \ni 1$*).*
4. $\ker(\mathcal{G}) = rad(A)$.
5. $\|\hat{a}\|_\infty = r(a) = \text{lím}_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Demostración. Las partes (1) y (3) son simples ejercicios, y la parte (5) es consecuencia directa de la Proposición previa.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$. Entonces

1. $\hat{a}$ *es continua y* $\|\hat{a}\|_\infty \leq \|a\|$.
2. $\hat{a} \in C_0(\widehat{A})$.
3. $\mathcal{G} : A \to C_0(\widehat{A})$, *dada por* $a \mapsto \hat{a}$ *para todo* $a \in A$, *es un homomorfismo de álgebras (unital si* $A \ni 1$*).*
4. $\ker(\mathcal{G}) = rad(A)$.
5. $\|\hat{a}\|_\infty = r(a) = \text{lím}_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Demostración. Las partes (1) y (3) son simples ejercicios, y la parte (5) es consecuencia directa de la Proposición previa. Para ver (4), notar que $a \in \ker \mathcal{G}$ sii $\hat{a}(h) = 0$ $\forall h \in \widehat{A}$, es decir, sii $h(a) = 0$ $\forall h \in \widehat{A}$. Pero esto último es equivalente a $a \in \bigcap_{h \in \widehat{A}} \ker h = \mathrm{rad}(A)$.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$. Entonces

1. $\hat{a}$ *es continua y* $\|\hat{a}\|_\infty \leq \|a\|$.
2. $\hat{a} \in C_0(\widehat{A})$.
3. $\mathcal{G} : A \to C_0(\widehat{A})$, *dada por* $a \mapsto \hat{a}$ *para todo* $a \in A$, *es un homomorfismo de álgebras (unital si* $A \ni 1$*).*
4. $\ker(\mathcal{G}) = \mathrm{rad}(A)$.
5. $\|\hat{a}\|_\infty = r(a) = \lim_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Demostración. Las partes (1) y (3) son simples ejercicios, y la parte (5) es consecuencia directa de la Proposición previa. Para ver (4), notar que $a \in \ker \mathcal{G}$ sii $\hat{a}(h) = 0 \ \forall h \in \widehat{A}$, es decir, sii $h(a) = 0 \ \forall h \in \widehat{A}$. Pero esto último es equivalente a $a \in \cap_{h \in \widehat{A}} \ker h = \mathrm{rad}(A)$. La parte (2) es obvia si $\widehat{A}$ es compacto.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$. Entonces

1. $\hat{a}$ *es continua y* $\|\hat{a}\|_\infty \leq \|a\|$.
2. $\hat{a} \in C_0(\widehat{A})$.
3. $\mathcal{G} : A \to C_0(\widehat{A})$, *dada por* $a \mapsto \hat{a}$ *para todo* $a \in A$, *es un homomorfismo de álgebras (unital si* $A \ni 1$*).*
4. $\ker(\mathcal{G}) = \mathrm{rad}(A)$.
5. $\|\hat{a}\|_\infty = r(a) = \lim_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Demostración. Las partes (1) y (3) son simples ejercicios, y la parte (5) es consecuencia directa de la Proposición previa. Para ver (4), notar que $a \in \ker \mathcal{G}$ sii $\hat{a}(h) = 0 \ \forall h \in \widehat{A}$, es decir, sii $h(a) = 0 \ \forall h \in \widehat{A}$. Pero esto último es equivalente a $a \in \cap_{h \in \widehat{A}} \ker h = \mathrm{rad}(A)$. La parte (2) es obvia si $\widehat{A}$ es compacto. Si no lo es, su compactificación con un punto es $\widehat{A} \cup \{0\}$, y si $h_i \xrightarrow{i} 0$ en la topología w^*, entonces $\hat{a}(h_i) = h_i(a) \xrightarrow{i} 0(a) = 0$, así que $\hat{a} \in C_0(\widehat{A})$.

Aplicaciones

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa con unidad y $a \in A$ tal que A está generada por 1 y a, es decir:

$$A = \overline{\{p(a) : \ p \in \mathbb{C}[X]\}}.$$

Entonces la evaluación $ev_a : \hat{A} \to \sigma(a)$ dada $ev_a(h) = h(a)$ es un homeomorfismo.

Aplicaciones

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa con unidad y $a \in A$ tal que A está generada por 1 y a, es decir:

$$A = \overline{\{p(a) : \ p \in \mathbb{C}[X]\}}.$$

Entonces la evaluación $ev_a : \hat{A} \to \sigma(a)$ dada $ev_a(h) = h(a)$ es un homeomorfismo.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa con unidad y $a \in A$ tal que A está generada por 1 y a, es decir:

$$A = \overline{\{p(a) : \ p \in \mathbb{C}[X]\}}.$$

Entonces la evaluación $ev_a : \hat{A} \to \sigma(a)$ dada $ev_a(h) = h(a)$ es un homeomorfismo.

Demostración.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa con unidad y $a \in A$ tal que A está generada por 1 y a, es decir:

$$A = \overline{\{p(a) : p \in \mathbb{C}[X]\}}.$$

Entonces la evaluación $ev_a : \hat{A} \to \sigma(a)$ dada $ev_a(h) = h(a)$ es un homeomorfismo.

Demostración.

Ya sabemos que $\mathrm{Im}(\hat{a}) = \{h(a) : h \in \hat{A}\} = \sigma(a)$, y para ver que ev_a es inyectiva basta notar que, como A está generada por 1 y a, un homomorfismo complejo no nulo (que necesariamente satisface $h(1) = 1$), queda determinado por su valor en a.

Proposición

En las mismas hipótesis de la proposición anterior se tiene que $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ *es conexo.*

Proposición

En las mismas hipótesis de la proposición anterior se tiene que $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ *es conexo.*

Proposición

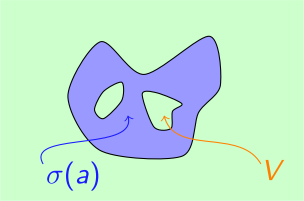
En las mismas hipótesis de la proposición anterior se tiene que $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ *es conexo.*

Demostración.

Proposición

En las mismas hipótesis de la proposición anterior se tiene que $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ es conexo.

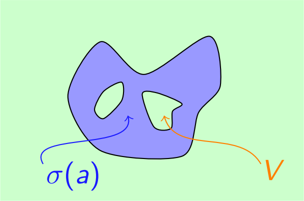
Demostración.



Proposición

En las mismas hipótesis de la proposición anterior se tiene que $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ es conexo.

Demostración.

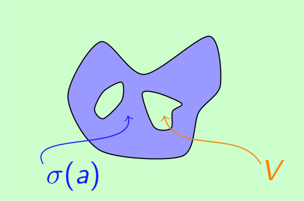


- Se tiene $\partial V \subseteq \partial\sigma(a) \subseteq \sigma(a)$.

Proposición

En las mismas hipótesis de la proposición anterior se tiene que $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ es conexo.

Demostración.

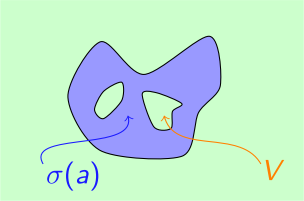


- Se tiene $\partial V \subseteq \partial\sigma(a) \subseteq \sigma(a)$.
- $|p(v)| \leq \|p\|_{\partial V}$ por el principio del módulo máximo.

Proposición

En las mismas hipótesis de la proposición anterior se tiene que $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ es conexo.

Demostración.

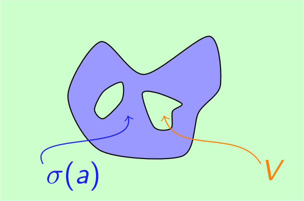


- Se tiene $\partial V \subseteq \partial\sigma(a) \subseteq \sigma(a)$.
- $|p(v)| \leq \|p\|_{\partial V}$ por el principio del módulo máximo.
- Entonces $|p(v)| \leq r(p(a)) \leq \|p(a)\|$.

Proposición

En las mismas hipótesis de la proposición anterior se tiene que $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ es conexo.

Demostración.

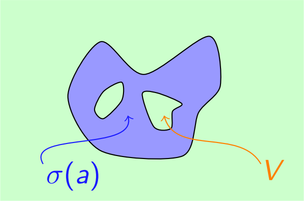


- Se tiene $\partial V \subseteq \partial\sigma(a) \subseteq \sigma(a)$.
- $|p(v)| \leq \|p\|_{\partial V}$ por el principio del módulo máximo.
- Entonces $|p(v)| \leq r(p(a)) \leq \|p(a)\|$.

Proposición

En las mismas hipótesis de la proposición anterior se tiene que $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ es conexo.

Demostración.



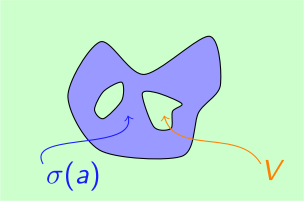
- Se tiene $\partial V \subseteq \partial\sigma(a) \subseteq \sigma(a)$.
- $|p(v)| \leq \|p\|_{\partial V}$ por el principio del módulo máximo.
- Entonces $|p(v)| \leq r(p(a)) \leq \|p(a)\|$.

Luego el mapa $\{q(a) : \ q \in \mathbb{C}[X]\} \to \mathbb{C}$ tal que $q(a) \mapsto q(v)$ es un homomorfismo de álgebras continuo.

Proposición

En las mismas hipótesis de la proposición anterior se tiene que $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ es conexo.

Demostración.



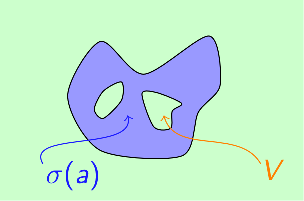
- Se tiene $\partial V \subseteq \partial\sigma(a) \subseteq \sigma(a)$.
- $|p(v)| \leq \|p\|_{\partial V}$ por el principio del módulo máximo.
- Entonces $|p(v)| \leq r(p(a)) \leq \|p(a)\|$.

Luego el mapa $\{q(a) : \ q \in \mathbb{C}[X]\} \to \mathbb{C}$ tal que $q(a) \mapsto q(v)$ es un homomorfismo de álgebras continuo. Por lo tanto se extiende a $h \in \hat{A}$.

Proposición

En las mismas hipótesis de la proposición anterior se tiene que $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ es conexo.

Demostración.



- Se tiene $\partial V \subseteq \partial\sigma(a) \subseteq \sigma(a)$.
- $|p(v)| \leq \|p\|_{\partial V}$ por el principio del módulo máximo.
- Entonces $|p(v)| \leq r(p(a)) \leq \|p(a)\|$.

Luego el mapa $\{q(a) : \ q \in \mathbb{C}[X]\} \to \mathbb{C}$ tal que $q(a) \mapsto q(v)$ es un homomorfismo de álgebras continuo. Por lo tanto se extiende a $h \in \hat{A}$. Entonces

$$v = \hat{a}(h) = h(a) \in \sigma(a),$$

y esto es absurdo porque $v \in V$.

Ejemplo (El álgebra del disco)

Veamos que la inclusión $a : \bar{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$, *es un generador de* $A(\mathbb{D})$.

Ejemplo (El álgebra del disco)

Veamos que la inclusión $a : \bar{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$*, es un generador de* $A(\mathbb{D})$*.*

Ejemplo (El álgebra del disco)

Veamos que la inclusión $a : \bar{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$*, es un generador de* $A(\mathbb{D})$*. Sea* A *la subálgebra de Banach unital de* $A(\mathbb{D})$ *generada por* a*, y fijemos* $b \in A(\mathbb{D})$*.*

Ejemplo (El álgebra del disco)

Veamos que la inclusión $a : \bar{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$, *es un generador de* $A(\mathbb{D})$. *Sea* A *la subálgebra de Banach unital de* $A(\mathbb{D})$ *generada por* a, *y fijemos* $b \in A(\mathbb{D})$.

(1) *Para* $r \in (0,1)$ *sea* $b_r : \bar{D}(0, \frac{1}{r}) \to \mathbb{C}$ *dado por* $b_r(z) = b(rz)$. *Entonces* $b_r|_{\bar{\mathbb{D}}} \in A(\mathbb{D})$ *y* $\lim_{r\to 1} b_r|_{\bar{\mathbb{D}}} = b$ *porque* b *es uniformemente continua en* $\bar{\mathbb{D}}$.

Ejemplo (El álgebra del disco)

Veamos que la inclusión $a : \bar{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$, *es un generador de* $A(\mathbb{D})$. *Sea* A *la subálgebra de Banach unital de* $A(\mathbb{D})$ *generada por* a, *y fijemos* $b \in A(\mathbb{D})$.

(1) *Para* $r \in (0,1)$ *sea* $b_r : \bar{D}(0, \frac{1}{r}) \to \mathbb{C}$ *dado por* $b_r(z) = b(rz)$. *Entonces* $b_r|_{\bar{\mathbb{D}}} \in A(\mathbb{D})$ *y* $\lim_{r\to 1} b_r|_{\bar{\mathbb{D}}} = b$ *porque* b *es uniformemente continua en* $\bar{\mathbb{D}}$.

(2) *Por otro lado, si* $c \in Hol(D(0,s))$ *para algún* $s > 1$, *entonces* $c(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, *uniformemente en* $\bar{\mathbb{D}}$. *Entonces* $c = \lim_n c_{(n)}$ *donde* $c_{(n)} = \sum_{k=0}^{n} c_k a^k$. *Luego* $c \in A$.

Ejemplo (El álgebra del disco)

Veamos que la inclusión $a : \bar{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$, *es un generador de* $A(\mathbb{D})$. *Sea* A *la subálgebra de Banach unital de* $A(\mathbb{D})$ *generada por* a, *y fijemos* $b \in A(\mathbb{D})$.

(1) *Para* $r \in (0,1)$ *sea* $b_r : \bar{D}(0, \frac{1}{r}) \to \mathbb{C}$ *dado por* $b_r(z) = b(rz)$. *Entonces* $b_r|_{\bar{\mathbb{D}}} \in A(\mathbb{D})$ *y* $\lim_{r\to 1} b_r|_{\bar{\mathbb{D}}} = b$ *porque* b *es uniformemente continua en* $\bar{\mathbb{D}}$.

(2) *Por otro lado, si* $c \in Hol(D(0,s))$ *para algún* $s > 1$, *entonces* $c(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, *uniformemente en* $\bar{\mathbb{D}}$. *Entonces* $c = \lim_n c_{(n)}$ *donde* $c_{(n)} = \sum_{k=0}^{n} c_k a^k$. *Luego* $c \in A$.

Ejemplo (El álgebra del disco)

Veamos que la inclusión $a : \bar{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$, *es un generador de* $A(\mathbb{D})$. *Sea* A *la subálgebra de Banach unital de* $A(\mathbb{D})$ *generada por* a, *y fijemos* $b \in A(\mathbb{D})$.

(1) *Para* $r \in (0,1)$ *sea* $b_r : \bar{D}(0, \frac{1}{r}) \to \mathbb{C}$ *dado por* $b_r(z) = b(rz)$. *Entonces* $b_r|_{\bar{\mathbb{D}}} \in A(\mathbb{D})$ *y* $\lim_{r\to 1} b_r|_{\bar{\mathbb{D}}} = b$ *porque* b *es uniformemente continua en* $\bar{\mathbb{D}}$.

(2) *Por otro lado, si* $c \in Hol(D(0,s))$ *para algún* $s > 1$, *entonces* $c(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, *uniformemente en* $\bar{\mathbb{D}}$. *Entonces* $c = \lim_n c_{(n)}$ *donde* $c_{(n)} = \sum_{k=0}^{n} c_k a^k$. *Luego* $c \in A$.

Cada b_r *está en las hipótesis de (2), así que* $b_r \in A$,

Ejemplo (El álgebra del disco)

Veamos que la inclusión $a : \bar{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$, *es un generador de* $A(\mathbb{D})$. *Sea* A *la subálgebra de Banach unital de* $A(\mathbb{D})$ *generada por* a, *y fijemos* $b \in A(\mathbb{D})$.

(1) *Para* $r \in (0,1)$ *sea* $b_r : \bar{D}(0, \frac{1}{r}) \to \mathbb{C}$ *dado por* $b_r(z) = b(rz)$. *Entonces* $b_r|_{\bar{\mathbb{D}}} \in A(\mathbb{D})$ *y* $\lim_{r\to 1} b_r|_{\bar{\mathbb{D}}} = b$ *porque* b *es uniformemente continua en* $\bar{\mathbb{D}}$.

(2) *Por otro lado, si* $c \in Hol(D(0,s))$ *para algún* $s > 1$, *entonces* $c(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, *uniformemente en* $\bar{\mathbb{D}}$. *Entonces* $c = \lim_n c_{(n)}$ *donde* $c_{(n)} = \sum_{k=0}^{n} c_k a^k$. *Luego* $c \in A$.

Cada b_r *está en las hipótesis de (2), así que* $b_r \in A$, *y por lo tanto su límite,* b, *también está en* A.

Ejemplo (El álgebra del disco)

Veamos que la inclusión $a : \bar{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$, *es un generador de* $A(\mathbb{D})$. *Sea* A *la subálgebra de Banach unital de* $A(\mathbb{D})$ *generada por* a, *y fijemos* $b \in A(\mathbb{D})$.

(1) *Para* $r \in (0,1)$ *sea* $b_r : \bar{D}(0, \frac{1}{r}) \to \mathbb{C}$ *dado por* $b_r(z) = b(rz)$. *Entonces* $b_r|_{\bar{\mathbb{D}}} \in A(\mathbb{D})$ *y* $\lim_{r\to 1} b_r|_{\bar{\mathbb{D}}} = b$ *porque* b *es uniformemente continua en* $\bar{\mathbb{D}}$.

(2) *Por otro lado, si* $c \in Hol(D(0,s))$ *para algún* $s > 1$, *entonces* $c(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, *uniformemente en* $\bar{\mathbb{D}}$. *Entonces* $c = \lim_n c_{(n)}$ *donde* $c_{(n)} = \sum_{k=0}^{n} c_k a^k$. *Luego* $c \in A$.

Cada b_r *está en las hipótesis de (2), así que* $b_r \in A$, *y por lo tanto su límite,* b, *también está en* A. *En conclusión* a *es un generador de* $A(\mathbb{D})$.

Ejemplo (El álgebra del disco)

Veamos que la inclusión $a : \bar{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$, *es un generador de* $A(\mathbb{D})$. *Sea* A *la subálgebra de Banach unital de* $A(\mathbb{D})$ *generada por* a, *y fijemos* $b \in A(\mathbb{D})$.

(1) *Para* $r \in (0,1)$ *sea* $b_r : \bar{D}(0, \frac{1}{r}) \to \mathbb{C}$ *dado por* $b_r(z) = b(rz)$. *Entonces* $b_r|_{\bar{\mathbb{D}}} \in A(\mathbb{D})$ *y* $\lim_{r\to 1} b_r|_{\bar{\mathbb{D}}} = b$ *porque* b *es uniformemente continua en* $\bar{\mathbb{D}}$.

(2) *Por otro lado, si* $c \in Hol(D(0,s))$ *para algún* $s > 1$, *entonces* $c(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, *uniformemente en* $\bar{\mathbb{D}}$. *Entonces* $c = \lim_n c_{(n)}$ *donde* $c_{(n)} = \sum_{k=0}^{n} c_k a^k$. *Luego* $c \in A$.

Cada b_r *está en las hipótesis de (2), así que* $b_r \in A$, *y por lo tanto su límite,* b, *también está en* A. *En conclusión* a *es un generador de* $A(\mathbb{D})$.

Calculemos $\widehat{A(\mathbb{D})}$.

Ejemplo (El álgebra del disco)

Veamos que la inclusión $a : \bar{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$, *es un generador de* $A(\mathbb{D})$. *Sea* A *la subálgebra de Banach unital de* $A(\mathbb{D})$ *generada por* a, *y fijemos* $b \in A(\mathbb{D})$.

(1) *Para* $r \in (0,1)$ *sea* $b_r : \bar{D}(0, \frac{1}{r}) \to \mathbb{C}$ *dado por* $b_r(z) = b(rz)$. *Entonces* $b_r|_{\bar{\mathbb{D}}} \in A(\mathbb{D})$ *y* $\lim_{r\to 1} b_r|_{\bar{\mathbb{D}}} = b$ *porque* b *es uniformemente continua en* $\bar{\mathbb{D}}$.

(2) *Por otro lado, si* $c \in Hol(D(0,s))$ *para algún* $s > 1$, *entonces* $c(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, *uniformemente en* $\bar{\mathbb{D}}$. *Entonces* $c = \lim_n c_{(n)}$ *donde* $c_{(n)} = \sum_{k=0}^{n} c_k a^k$. *Luego* $c \in A$.

Cada b_r *está en las hipótesis de (2), así que* $b_r \in A$, *y por lo tanto su límite,* b, *también está en* A. *En conclusión* a *es un generador de* $A(\mathbb{D})$.

Calculemos $\widehat{A(\mathbb{D})}$. *Como* $\|a\| = 1$, *es* $\sigma(a) \subseteq \bar{\mathbb{D}}$.

Ejemplo (El álgebra del disco)

Veamos que la inclusión $a : \bar{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$, es un generador de $A(\mathbb{D})$. Sea A la subálgebra de Banach unital de $A(\mathbb{D})$ generada por a, y fijemos $b \in A(\mathbb{D})$.

(1) *Para $r \in (0,1)$ sea $b_r : \bar{D}(0, \frac{1}{r}) \to \mathbb{C}$ dado por $b_r(z) = b(rz)$. Entonces $b_r|_{\bar{\mathbb{D}}} \in A(\mathbb{D})$ y $\lim_{r\to 1} b_r|_{\bar{\mathbb{D}}} = b$ porque b es uniformemente continua en $\bar{\mathbb{D}}$.*

(2) *Por otro lado, si $c \in Hol(D(0,s))$ para algún $s > 1$, entonces $c(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, uniformemente en $\bar{\mathbb{D}}$. Entonces $c = \lim_n c_{(n)}$ donde $c_{(n)} = \sum_{k=0}^{n} c_k a^k$. Luego $c \in A$.*

Cada b_r está en las hipótesis de (2), así que $b_r \in A$, y por lo tanto su límite, b, también está en A. En conclusión a es un generador de $A(\mathbb{D})$.

Calculemos $\widehat{A(\mathbb{D})}$. Como $\|a\| = 1$, es $\sigma(a) \subseteq \bar{\mathbb{D}}$. Por otro lado, cada $z \in \bar{\mathbb{D}}$ define $h_z \in \widehat{A(\mathbb{D})}$ tal que $h_z(b) := b(z)$.

Ejemplo (El álgebra del disco)

Veamos que la inclusión $a : \bar{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$, *es un generador de* $A(\mathbb{D})$. *Sea* A *la subálgebra de Banach unital de* $A(\mathbb{D})$ *generada por* a, *y fijemos* $b \in A(\mathbb{D})$.

(1) *Para* $r \in (0,1)$ *sea* $b_r : \bar{D}(0, \frac{1}{r}) \to \mathbb{C}$ *dado por* $b_r(z) = b(rz)$. *Entonces* $b_r|_{\bar{\mathbb{D}}} \in A(\mathbb{D})$ *y* $\lim_{r\to 1} b_r|_{\bar{\mathbb{D}}} = b$ *porque* b *es uniformemente continua en* $\bar{\mathbb{D}}$.

(2) *Por otro lado, si* $c \in Hol(D(0,s))$ *para algún* $s > 1$, *entonces* $c(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, *uniformemente en* $\bar{\mathbb{D}}$. *Entonces* $c = \lim_n c_{(n)}$ *donde* $c_{(n)} = \sum_{k=0}^{n} c_k a^k$. *Luego* $c \in A$.

Cada b_r *está en las hipótesis de (2), así que* $b_r \in A$, *y por lo tanto su límite,* b, *también está en* A. *En conclusión* a *es un generador de* $A(\mathbb{D})$.

Calculemos $\widehat{A(\mathbb{D})}$. *Como* $\|a\| = 1$, *es* $\sigma(a) \subseteq \bar{\mathbb{D}}$. *Por otro lado, cada* $z \in \bar{\mathbb{D}}$ *define* $h_z \in \widehat{A(\mathbb{D})}$ *tal que* $h_z(b) := b(z)$. *Como* $\widehat{A(\mathbb{D})} \cong \sigma(a)$ *a través* $h \mapsto h(a)$, *y la restricción de este mapa a* $\{h_z : z \in \bar{\mathbb{D}}\}$ *tiene imagen* $\bar{\mathbb{D}}$,

Ejemplo (El álgebra del disco)

Veamos que la inclusión $a : \bar{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$, es un generador de $A(\mathbb{D})$. Sea A la subálgebra de Banach unital de $A(\mathbb{D})$ generada por a, y fijemos $b \in A(\mathbb{D})$.

(1) *Para $r \in (0,1)$ sea $b_r : \bar{D}(0, \frac{1}{r}) \to \mathbb{C}$ dado por $b_r(z) = b(rz)$. Entonces $b_r|_{\bar{\mathbb{D}}} \in A(\mathbb{D})$ y $\lim_{r\to 1} b_r|_{\bar{\mathbb{D}}} = b$ porque b es uniformemente continua en $\bar{\mathbb{D}}$.*

(2) *Por otro lado, si $c \in Hol(D(0,s))$ para algún $s > 1$, entonces $c(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, uniformemente en $\bar{\mathbb{D}}$. Entonces $c = \lim_n c_{(n)}$ donde $c_{(n)} = \sum_{k=0}^{n} c_k a^k$. Luego $c \in A$.*

Cada b_r está en las hipótesis de (2), así que $b_r \in A$, y por lo tanto su límite, b, también está en A. En conclusión a es un generador de $A(\mathbb{D})$.

Calculemos $\widehat{A(\mathbb{D})}$. Como $\|a\| = 1$, es $\sigma(a) \subseteq \bar{\mathbb{D}}$. Por otro lado, cada $z \in \bar{\mathbb{D}}$ define $h_z \in \widehat{A(\mathbb{D})}$ tal que $h_z(b) := b(z)$. Como $\widehat{A(\mathbb{D})} \cong \sigma(a)$ a través $h \mapsto h(a)$, y la restricción de este mapa a $\{h_z : z \in \bar{\mathbb{D}}\}$ tiene imagen $\bar{\mathbb{D}}$, concluimos primero que $\sigma(a) = \bar{\mathbb{D}}$,

Ejemplo (El álgebra del disco)

Veamos que la inclusión $a : \bar{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$, *es un generador de* $A(\mathbb{D})$. *Sea* A *la subálgebra de Banach unital de* $A(\mathbb{D})$ *generada por* a, *y fijemos* $b \in A(\mathbb{D})$.

(1) *Para* $r \in (0,1)$ *sea* $b_r : \bar{D}(0, \frac{1}{r}) \to \mathbb{C}$ *dado por* $b_r(z) = b(rz)$. *Entonces* $b_r|_{\bar{\mathbb{D}}} \in A(\mathbb{D})$ *y* $\lim_{r\to 1} b_r|_{\bar{\mathbb{D}}} = b$ *porque* b *es uniformemente continua en* $\bar{\mathbb{D}}$.

(2) *Por otro lado, si* $c \in Hol(D(0,s))$ *para algún* $s > 1$, *entonces* $c(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, *uniformemente en* $\bar{\mathbb{D}}$. *Entonces* $c = \lim_n c_{(n)}$ *donde* $c_{(n)} = \sum_{k=0}^{n} c_k a^k$. *Luego* $c \in A$.

Cada b_r *está en las hipótesis de (2), así que* $b_r \in A$, *y por lo tanto su límite,* b, *también está en* A. *En conclusión* a *es un generador de* $A(\mathbb{D})$.

Calculemos $\widehat{A(\mathbb{D})}$. *Como* $\|a\| = 1$, *es* $\sigma(a) \subseteq \bar{\mathbb{D}}$. *Por otro lado, cada* $z \in \bar{\mathbb{D}}$ *define* $h_z \in \widehat{A(\mathbb{D})}$ *tal que* $h_z(b) := b(z)$. *Como* $\widehat{A(\mathbb{D})} \cong \sigma(a)$ *a través* $h \mapsto h(a)$, *y la restricción de este mapa a* $\{h_z : z \in \bar{\mathbb{D}}\}$ *tiene imagen* $\bar{\mathbb{D}}$, *concluimos primero que* $\sigma(a) = \bar{\mathbb{D}}$, *y luego que* $\widehat{A(\mathbb{D})} = \{h_z : z \in \bar{\mathbb{D}}\} \cong \bar{\mathbb{D}}$.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach con unidad y a un elemento invertible de A. Si a y a^{-1} generan A como álgebra de Banach, es decir,

$$A = \overline{\{p(a, a^{-1}) : p \in \mathbb{C}[x, y]\}},$$

entonces la evaluación $ev_a : \hat{A} \to \sigma(a)$, dada por $ev_a(h) = h(a)$, es un homeomorfismo.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach con unidad y a un elemento invertible de A. Si a y a^{-1} generan A como álgebra de Banach, es decir,

$$A = \overline{\{p(a, a^{-1}) : p \in \mathbb{C}[x, y]\}},$$

entonces la evaluación $ev_a : \hat{A} \to \sigma(a)$, dada por $ev_a(h) = h(a)$, es un homeomorfismo.

Demostración.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach con unidad y a un elemento invertible de A. Si a y a^{-1} generan A como álgebra de Banach, es decir,

$$A = \overline{\{p(a, a^{-1}) : \; p \in \mathbb{C}[x, y]\}},$$

entonces la evaluación $ev_a : \hat{A} \to \sigma(a)$, dada por $ev_a(h) = h(a)$, es un homeomorfismo.

Demostración.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach con unidad y a un elemento invertible de A. Si a y a^{-1} generan A como álgebra de Banach, es decir,

$$A = \overline{\{p(a, a^{-1}) : \ p \in \mathbb{C}[x, y]\}},$$

entonces la evaluación $ev_a : \hat{A} \to \sigma(a)$, dada por $ev_a(h) = h(a)$, es un homeomorfismo.

Demostración.

Sabemos que ev_a es continuo y sobreyectivo.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach con unidad y a un elemento invertible de A. Si a y a^{-1} generan A como álgebra de Banach, es decir,

$$A = \overline{\{p(a, a^{-1}) : \ p \in \mathbb{C}[x, y]\}},$$

entonces la evaluación $ev_a : \hat{A} \to \sigma(a)$, dada por $ev_a(h) = h(a)$, es un homeomorfismo.

Demostración.

Sabemos que ev_a es continuo y sobreyectivo. Si $h_1, h_2 \in \widehat{A}$ son tales que $h_1(a) = h_2(a)$,

Proposición

Sean A un álgebra de Banach con unidad y a un elemento invertible de A. Si a y a^{-1} generan A como álgebra de Banach, es decir,

$$A = \overline{\{p(a, a^{-1}) : p \in \mathbb{C}[x, y]\}},$$

entonces la evaluación $ev_a : \hat{A} \to \sigma(a)$, dada por $ev_a(h) = h(a)$, es un homeomorfismo.

Demostración.

Sabemos que ev_a es continuo y sobreyectivo. Si $h_1, h_2 \in \widehat{A}$ son tales que $h_1(a) = h_2(a)$, entonces $h_1(a^{-1}) = h_1(a)^{-1} = h_2(a)^{-1} = h_2(a^{-1})$,

Proposición

Sean A un álgebra de Banach con unidad y a un elemento invertible de A. Si a y a^{-1} generan A como álgebra de Banach, es decir,

$$A = \overline{\{p(a, a^{-1}) : \, p \in \mathbb{C}[x, y]\}},$$

entonces la evaluación $ev_a : \hat{A} \to \sigma(a)$, dada por $ev_a(h) = h(a)$, es un homeomorfismo.

Demostración.

Sabemos que ev_a es continuo y sobreyectivo. Si $h_1, h_2 \in \widehat{A}$ son tales que $h_1(a) = h_2(a)$, entonces $h_1(a^{-1}) = h_1(a)^{-1} = h_2(a)^{-1} = h_2(a^{-1})$, y por lo tanto

$$h_1(p(a, a^{-1})) = p(h_1(a), h_1(a)^{-1}) = p(h_2(a), h_2(a)^{-1}) = h_2(p(a, a^{-1})).$$

Proposición

Sean A un álgebra de Banach con unidad y a un elemento invertible de A. Si a y a^{-1} generan A como álgebra de Banach, es decir,

$$A = \overline{\{p(a, a^{-1}) : p \in \mathbb{C}[x, y]\}},$$

entonces la evaluación $ev_a : \hat{A} \to \sigma(a)$, dada por $ev_a(h) = h(a)$, es un homeomorfismo.

Demostración.

Sabemos que ev_a es continuo y sobreyectivo. Si $h_1, h_2 \in \widehat{A}$ son tales que $h_1(a) = h_2(a)$, entonces $h_1(a^{-1}) = h_1(a)^{-1} = h_2(a)^{-1} = h_2(a^{-1})$, y por lo tanto

$$h_1(p(a, a^{-1})) = p(h_1(a), h_1(a)^{-1}) = p(h_2(a), h_2(a)^{-1}) = h_2(p(a, a^{-1})).$$

Se concluye que los mapas continuos h_1 y h_2 coinciden en un conjunto denso en A, y por lo tanto son iguales. □

Álgebras de funciones

Definición

Sean X un espacio de Hausdorff localmente compacto y $A \subseteq C_0(X)$ un álgebra de Banach (la norma de A no es necesariamente la $\| \|_\infty$).

Álgebras de funciones

Definición

Sean X un espacio de Hausdorff localmente compacto y $A \subseteq C_0(X)$ un álgebra de Banach (la norma de A no es necesariamente la $\| \|_\infty$).

Álgebras de funciones

Definición

Sean X un espacio de Hausdorff localmente compacto y $A \subseteq C_0(X)$ un álgebra de Banach (la norma de A no es necesariamente la $\| \|_\infty$). Se dice que A es un álgebra de funciones sobre X si:

Definición

Sean X un espacio de Hausdorff localmente compacto y $A \subseteq C_0(X)$ un álgebra de Banach (la norma de A no es necesariamente la $\| \|_\infty$). Se dice que A es un álgebra de funciones sobre X si:

(i) *A separa puntos de X, es decir si $x_1, x_2 \in X$ son tales que $a(x_1) = a(x_2)$ para todo $a \in A$ entonces $x_1 = x_2$.*

Álgebras de funciones

Definición

Sean X un espacio de Hausdorff localmente compacto y $A \subseteq C_0(X)$ un álgebra de Banach (la norma de A no es necesariamente la $\| \, \|_\infty$). Se dice que A es un álgebra de funciones sobre X si:

(i) *A separa puntos de X, es decir si $x_1, x_2 \in X$ son tales que $a(x_1) = a(x_2)$ para todo $a \in A$ entonces $x_1 = x_2$.*

(ii) *$A(x) \neq 0$, es decir, para todo $x \in X$ existe $a \in A$ tal que $a(x) \neq 0$ (se dice entonces que A no se anula en X).*

Álgebras de funciones

Definición

Sean X un espacio de Hausdorff localmente compacto y $A \subseteq C_0(X)$ un álgebra de Banach (la norma de A no es necesariamente la $\| \|_\infty$). Se dice que A es un álgebra de funciones sobre X si:

(i) *A separa puntos de X, es decir si $x_1, x_2 \in X$ son tales que $a(x_1) = a(x_2)$ para todo $a \in A$ entonces $x_1 = x_2$.*

(ii) *$A(x) \neq 0$, es decir, para todo $x \in X$ existe $a \in A$ tal que $a(x) \neq 0$ (se dice entonces que A no se anula en X).*

Observación

La inclusión natural $A \overset{\iota}{\hookrightarrow} C_0(X)$ es un homomorfismo de álgebras, y por lo tanto $\|\iota(a)\|_\infty \leq \|a\|$ para todo $a \in A$, ya que cada homomorfismo complejo de un álgebra de Banach es contractivo. Luego es $\| \|_\infty \leq \| \|$.

Proposición

Si B es un álgebra de Banach conmutativa y $A := \overline{\mathcal{G}(B)}^{\|\ \|_\infty} \subseteq C_0(\widehat{B}\,)$, *entonces A es un álgebra de funciones sobre* $\widehat{B}$ *.*

Proposición

Si B es un álgebra de Banach conmutativa y $A := \overline{\mathcal{G}(B)}^{\|\ \|_\infty} \subseteq C_0(\widehat{B}\,)$, *entonces A es un álgebra de funciones sobre $\widehat{B}$.*

Demostración.

En primer lugar A separa puntos de $\widehat{B}$:

Proposición

Si B es un álgebra de Banach conmutativa y $A := \overline{\mathcal{G}(B)}^{\|\ \|_\infty} \subseteq C_0(\widehat{B})$, entonces A es un álgebra de funciones sobre $\widehat{B}$.

Demostración.

En primer lugar A separa puntos de $\widehat{B}$:

Proposición

Si B es un álgebra de Banach conmutativa y $A := \overline{\mathcal{G}(B)}^{\| \ \|_\infty} \subseteq C_0(\widehat{B})$, entonces A es un álgebra de funciones sobre $\widehat{B}$.

Demostración.

En primer lugar A separa puntos de $\widehat{B}$: dados $h_1, h_2 \in \hat{B}$, entonces $\hat{b}(h_1) = \hat{b}(h_2)$ para todo $b \in B$ si y sólo si $h_1(b) = h_2(b)$ para todo $b \in B$, es decir, si y sólo si $h_1 = h_2$.

Proposición

Si B es un álgebra de Banach conmutativa y $A := \overline{\mathcal{G}(B)}^{\|\ \|_\infty} \subseteq C_0(\widehat{B}\,)$, entonces A es un álgebra de funciones sobre $\widehat{B}$.

Demostración.

En primer lugar A separa puntos de $\widehat{B}$: dados $h_1, h_2 \in \hat{B}$, entonces $\hat{b}\,(h_1) = \hat{b}\,(h_2)$ para todo $b \in B$ si y sólo si $h_1(b) = h_2(b)$ para todo $b \in B$, es decir, si y sólo si $h_1 = h_2$. En segundo lugar A no se anula en $\widehat{B}$: si $h \in \widehat{B}$, entonces por definición es $h \neq 0$, de donde existe $b \in B$ tal que $h(b) \neq 0$; luego es $\hat{b}\,(h) \neq 0$. $\square$

Proposición

Si B es un álgebra de Banach conmutativa y $A := \overline{\mathcal{G}(B)}^{\| \|_\infty} \subseteq C_0(\widehat{B})$, entonces A es un álgebra de funciones sobre $\widehat{B}$.

Demostración.

En primer lugar A separa puntos de $\widehat{B}$: dados $h_1, h_2 \in \hat{B}$, entonces $\hat{b}(h_1) = \hat{b}(h_2)$ para todo $b \in B$ si y sólo si $h_1(b) = h_2(b)$ para todo $b \in B$, es decir, si y sólo si $h_1 = h_2$. En segundo lugar A no se anula en $\widehat{B}$: si $h \in \widehat{B}$, entonces por definición es $h \neq 0$, de donde existe $b \in B$ tal que $h(b) \neq 0$; luego es $\hat{b}(h) \neq 0$. □

Proposición

Sea A un álgebra de funciones sobre X. Para cada $x \in X$ sea $\delta_x \in \widehat{A}$ tal que $\delta_x(a) = a(x)$. Entonces el mapa $\delta : X \to \widehat{A}$ tal que $x \mapsto \delta_x$ es un homeomorfismo entre X y un subconjunto cerrado de $\widehat{A}$.

Demostración.

Efectivamente $\delta_x \in \hat{A}$ porque $A(x) \neq 0$.

Demostración.

Efectivamente $\delta_x \in \hat{A}$ porque $A(x) \neq 0$.

Demostración.

Efectivamente $\delta_x \in \hat{A}$ porque $A(x) \neq 0$. El mapa δ es inyectivo: si $\delta_x = \delta_{x'}$ entonces $a(x) = a(x')$ para todo $a \in A$, lo que implica que $x = x'$ porque A separa puntos.

Demostración.

Efectivamente $\delta_x \in \hat{A}$ porque $A(x) \neq 0$. El mapa δ es inyectivo: si $\delta_x = \delta_{x'}$ entonces $a(x) = a(x')$ para todo $a \in A$, lo que implica que $x = x'$ porque A separa puntos. Si $x_i \to x$ en X y $a \in A$ entonces $\delta_{x_i}(a) = a(x_i) \to a(x) = \delta_x(a)$ porque a es continua;

Demostración.

Efectivamente $\delta_x \in \hat{A}$ porque $A(x) \neq 0$. El mapa δ es inyectivo: si $\delta_x = \delta_{x'}$ entonces $a(x) = a(x')$ para todo $a \in A$, lo que implica que $x = x'$ porque A separa puntos. Si $x_i \to x$ en X y $a \in A$ entonces $\delta_{x_i}(a) = a(x_i) \to a(x) = \delta_x(a)$ porque a es continua; por lo tanto $\delta_{x_i} \stackrel{\omega^*}{\to} \delta_x$, lo que muestra que δ es continua.

Demostración.

Efectivamente $\delta_x \in \hat{A}$ porque $A(x) \neq 0$. El mapa δ es inyectivo: si $\delta_x = \delta_{x'}$ entonces $a(x) = a(x')$ para todo $a \in A$, lo que implica que $x = x'$ porque A separa puntos. Si $x_i \to x$ en X y $a \in A$ entonces $\delta_{x_i}(a) = a(x_i) \to a(x) = \delta_x(a)$ porque a es continua; por lo tanto $\delta_{x_i} \stackrel{\omega^*}{\to} \delta_x$, lo que muestra que δ es continua.

Supongamos que $\eta \in \widehat{A}$ es tal que existe una red $(x_i) \subset X : \delta_{x_i} \stackrel{\omega^*}{\to} \eta$.

Demostración.

Efectivamente $\delta_x \in \hat{A}$ porque $A(x) \neq 0$. El mapa δ es inyectivo: si $\delta_x = \delta_{x'}$ entonces $a(x) = a(x')$ para todo $a \in A$, lo que implica que $x = x'$ porque A separa puntos. Si $x_i \to x$ en X y $a \in A$ entonces $\delta_{x_i}(a) = a(x_i) \to a(x) = \delta_x(a)$ porque a es continua; por lo tanto $\delta_{x_i} \xrightarrow{\omega^*} \delta_x$, lo que muestra que δ es continua.

Supongamos que $\eta \in \widehat{A}$ es tal que existe una red $(x_i) \subset X : \delta_{x_i} \xrightarrow{\omega^*} \eta$. Sea X_∞ la compactificación de X con un punto.

Demostración.

Efectivamente $\delta_x \in \hat{A}$ porque $A(x) \neq 0$. El mapa δ es inyectivo: si $\delta_x = \delta_{x'}$ entonces $a(x) = a(x')$ para todo $a \in A$, lo que implica que $x = x'$ porque A separa puntos. Si $x_i \to x$ en X y $a \in A$ entonces $\delta_{x_i}(a) = a(x_i) \to a(x) = \delta_x(a)$ porque a es continua; por lo tanto $\delta_{x_i} \xrightarrow{\omega^*} \delta_x$, lo que muestra que δ es continua.

Supongamos que $\eta \in \widehat{A}$ es tal que existe una red $(x_i) \subset X : \delta_{x_i} \xrightarrow{\omega^*} \eta$. Sea X_∞ la compactificación de X con un punto. Entonces existen alguna subred (y_j) de (x_i) y un punto (único) $y \in X_\infty$ tales que $y_j \to y$.

Demostración.

Efectivamente $\delta_x \in \hat{A}$ porque $A(x) \neq 0$. El mapa δ es inyectivo: si $\delta_x = \delta_{x'}$ entonces $a(x) = a(x')$ para todo $a \in A$, lo que implica que $x = x'$ porque A separa puntos. Si $x_i \to x$ en X y $a \in A$ entonces $\delta_{x_i}(a) = a(x_i) \to a(x) = \delta_x(a)$ porque a es continua; por lo tanto $\delta_{x_i} \stackrel{\omega^*}{\to} \delta_x$, lo que muestra que δ es continua.

Supongamos que $\eta \in \widehat{A}$ es tal que existe una red $(x_i) \subset X : \delta_{x_i} \stackrel{\omega^*}{\to} \eta$. Sea X_∞ la compactificación de X con un punto. Entonces existen alguna subred (y_j) de (x_i) y un punto (único) $y \in X_\infty$ tales que $y_j \to y$. Por otro lado hay una inclusión natural $A \hookrightarrow \{b \in C(X_\infty) : \ b(\infty) = 0\}$.

Demostración.

Efectivamente $\delta_x \in \hat{A}$ porque $A(x) \neq 0$. El mapa δ es inyectivo: si $\delta_x = \delta_{x'}$ entonces $a(x) = a(x')$ para todo $a \in A$, lo que implica que $x = x'$ porque A separa puntos. Si $x_i \to x$ en X y $a \in A$ entonces $\delta_{x_i}(a) = a(x_i) \to a(x) = \delta_x(a)$ porque a es continua; por lo tanto $\delta_{x_i} \xrightarrow{\omega^*} \delta_x$, lo que muestra que δ es continua.

Supongamos que $\eta \in \widehat{A}$ es tal que existe una red $(x_i) \subset X : \delta_{x_i} \xrightarrow{\omega^*} \eta$. Sea X_∞ la compactificación de X con un punto. Entonces existen alguna subred (y_j) de (x_i) y un punto (único) $y \in X_\infty$ tales que $y_j \to y$. Por otro lado hay una inclusión natural $A \hookrightarrow \{b \in C(X_\infty) : \ b(\infty) = 0\}$. Teniendo en cuenta esta inclusión: $a(y) = \text{lím}_j\, a(y_j) = \eta(a)$.

Demostración.

Efectivamente $\delta_x \in \hat{A}$ porque $A(x) \neq 0$. El mapa δ es inyectivo: si $\delta_x = \delta_{x'}$ entonces $a(x) = a(x')$ para todo $a \in A$, lo que implica que $x = x'$ porque A separa puntos. Si $x_i \to x$ en X y $a \in A$ entonces $\delta_{x_i}(a) = a(x_i) \to a(x) = \delta_x(a)$ porque a es continua; por lo tanto $\delta_{x_i} \xrightarrow{\omega^*} \delta_x$, lo que muestra que δ es continua.

Supongamos que $\eta \in \widehat{A}$ es tal que existe una red $(x_i) \subset X : \delta_{x_i} \xrightarrow{\omega^*} \eta$. Sea X_∞ la compactificación de X con un punto. Entonces existen alguna subred (y_j) de (x_i) y un punto (único) $y \in X_\infty$ tales que $y_j \to y$. Por otro lado hay una inclusión natural $A \hookrightarrow \{b \in C(X_\infty) : \ b(\infty) = 0\}$. Teniendo en cuenta esta inclusión: $a(y) = \lim_j a(y_j) = \eta(a)$. Entonces $\eta = \delta_y$.

Demostración.

Efectivamente $\delta_x \in \hat{A}$ porque $A(x) \neq 0$. El mapa δ es inyectivo: si $\delta_x = \delta_{x'}$ entonces $a(x) = a(x')$ para todo $a \in A$, lo que implica que $x = x'$ porque A separa puntos. Si $x_i \to x$ en X y $a \in A$ entonces $\delta_{x_i}(a) = a(x_i) \to a(x) = \delta_x(a)$ porque a es continua; por lo tanto $\delta_{x_i} \xrightarrow{\omega^*} \delta_x$, lo que muestra que δ es continua.

Supongamos que $\eta \in \widehat{A}$ es tal que existe una red $(x_i) \subset X : \delta_{x_i} \xrightarrow{\omega^*} \eta$. Sea X_∞ la compactificación de X con un punto. Entonces existen alguna subred (y_j) de (x_i) y un punto (único) $y \in X_\infty$ tales que $y_j \to y$. Por otro lado hay una inclusión natural $A \hookrightarrow \{b \in C(X_\infty) : \ b(\infty) = 0\}$. Teniendo en cuenta esta inclusión: $a(y) = \text{lím}_j\, a(y_j) = \eta(a)$. Entonces $\eta = \delta_y$. Como $\eta \in \widehat{A}$ no se anula en todo A, entonces $y \neq \infty$. Luego es $y \in X$.

Demostración.

Efectivamente $\delta_x \in \hat{A}$ porque $A(x) \neq 0$. El mapa δ es inyectivo: si $\delta_x = \delta_{x'}$ entonces $a(x) = a(x')$ para todo $a \in A$, lo que implica que $x = x'$ porque A separa puntos. Si $x_i \to x$ en X y $a \in A$ entonces $\delta_{x_i}(a) = a(x_i) \to a(x) = \delta_x(a)$ porque a es continua; por lo tanto $\delta_{x_i} \overset{\omega^*}{\to} \delta_x$, lo que muestra que δ es continua.

Supongamos que $\eta \in \widehat{A}$ es tal que existe una red $(x_i) \subset X : \delta_{x_i} \overset{\omega^*}{\to} \eta$. Sea X_∞ la compactificación de X con un punto. Entonces existen alguna subred (y_j) de (x_i) y un punto (único) $y \in X_\infty$ tales que $y_j \to y$. Por otro lado hay una inclusión natural $A \hookrightarrow \{b \in C(X_\infty) : \ b(\infty) = 0\}$. Teniendo en cuenta esta inclusión: $a(y) = \text{lím}_j\, a(y_j) = \eta(a)$. Entonces $\eta = \delta_y$. Como $\eta \in \widehat{A}$ no se anula en todo A, entonces $y \neq \infty$. Luego es $y \in X$. Esto muestra que $\delta(X)$ es cerrado en $\widehat{A}$.

Demostración.

Efectivamente $\delta_x \in \hat{A}$ porque $A(x) \neq 0$. El mapa δ es inyectivo: si $\delta_x = \delta_{x'}$ entonces $a(x) = a(x')$ para todo $a \in A$, lo que implica que $x = x'$ porque A separa puntos. Si $x_i \to x$ en X y $a \in A$ entonces $\delta_{x_i}(a) = a(x_i) \to a(x) = \delta_x(a)$ porque a es continua; por lo tanto $\delta_{x_i} \xrightarrow{\omega^*} \delta_x$, lo que muestra que δ es continua.

Supongamos que $\eta \in \widehat{A}$ es tal que existe una red $(x_i) \subset X : \delta_{x_i} \xrightarrow{\omega^*} \eta$. Sea X_∞ la compactificación de X con un punto. Entonces existen alguna subred (y_j) de (x_i) y un punto (único) $y \in X_\infty$ tales que $y_j \to y$. Por otro lado hay una inclusión natural $A \hookrightarrow \{b \in C(X_\infty) : \ b(\infty) = 0\}$. Teniendo en cuenta esta inclusión: $a(y) = \text{lím}_j\, a(y_j) = \eta(a)$. Entonces $\eta = \delta_y$. Como $\eta \in \widehat{A}$ no se anula en todo A, entonces $y \neq \infty$. Luego es $y \in X$. Esto muestra que $\delta(X)$ es cerrado en $\widehat{A}$. Además se tiene que $x_i \to y$:

Demostración.

Efectivamente $\delta_x \in \hat{A}$ porque $A(x) \neq 0$. El mapa δ es inyectivo: si $\delta_x = \delta_{x'}$ entonces $a(x) = a(x')$ para todo $a \in A$, lo que implica que $x = x'$ porque A separa puntos. Si $x_i \to x$ en X y $a \in A$ entonces $\delta_{x_i}(a) = a(x_i) \to a(x) = \delta_x(a)$ porque a es continua; por lo tanto $\delta_{x_i} \xrightarrow{\omega^*} \delta_x$, lo que muestra que δ es continua.

Supongamos que $\eta \in \widehat{A}$ es tal que existe una red $(x_i) \subset X : \delta_{x_i} \xrightarrow{\omega^*} \eta$. Sea X_∞ la compactificación de X con un punto. Entonces existen alguna subred (y_j) de (x_i) y un punto (único) $y \in X_\infty$ tales que $y_j \to y$. Por otro lado hay una inclusión natural $A \hookrightarrow \{b \in C(X_\infty) : \ b(\infty) = 0\}$. Teniendo en cuenta esta inclusión: $a(y) = \lim_j a(y_j) = \eta(a)$. Entonces $\eta = \delta_y$. Como $\eta \in \widehat{A}$ no se anula en todo A, entonces $y \neq \infty$. Luego es $y \in X$. Esto muestra que $\delta(X)$ es cerrado en $\widehat{A}$. Además se tiene que $x_i \to y$: basta ver que toda subred de (x_i) tiene una subred convergente a y,

Demostración.

Efectivamente $\delta_x \in \hat{A}$ porque $A(x) \neq 0$. El mapa δ es inyectivo: si $\delta_x = \delta_{x'}$ entonces $a(x) = a(x')$ para todo $a \in A$, lo que implica que $x = x'$ porque A separa puntos. Si $x_i \to x$ en X y $a \in A$ entonces $\delta_{x_i}(a) = a(x_i) \to a(x) = \delta_x(a)$ porque a es continua; por lo tanto $\delta_{x_i} \xrightarrow{\omega^*} \delta_x$, lo que muestra que δ es continua.

Supongamos que $\eta \in \widehat{A}$ es tal que existe una red $(x_i) \subset X : \delta_{x_i} \xrightarrow{\omega^*} \eta$. Sea X_∞ la compactificación de X con un punto. Entonces existen alguna subred (y_j) de (x_i) y un punto (único) $y \in X_\infty$ tales que $y_j \to y$. Por otro lado hay una inclusión natural $A \hookrightarrow \{b \in C(X_\infty) : \; b(\infty) = 0\}$. Teniendo en cuenta esta inclusión: $a(y) = \text{lím}_j\, a(y_j) = \eta(a)$. Entonces $\eta = \delta_y$. Como $\eta \in \widehat{A}$ no se anula en todo A, entonces $y \neq \infty$. Luego es $y \in X$. Esto muestra que $\delta(X)$ es cerrado en $\widehat{A}$. Además se tiene que $x_i \to y$: basta ver que toda subred de (x_i) tiene una subred convergente a y, para lo cual es suficiente probar que toda subred convergente de (x_i) tiene límite y.

Demostración.

Efectivamente $\delta_x \in \hat{A}$ porque $A(x) \neq 0$. El mapa δ es inyectivo: si $\delta_x = \delta_{x'}$ entonces $a(x) = a(x')$ para todo $a \in A$, lo que implica que $x = x'$ porque A separa puntos. Si $x_i \to x$ en X y $a \in A$ entonces $\delta_{x_i}(a) = a(x_i) \to a(x) = \delta_x(a)$ porque a es continua; por lo tanto $\delta_{x_i} \xrightarrow{\omega^*} \delta_x$, lo que muestra que δ es continua.

Supongamos que $\eta \in \widehat{A}$ es tal que existe una red $(x_i) \subset X : \delta_{x_i} \xrightarrow{\omega^*} \eta$. Sea X_∞ la compactificación de X con un punto. Entonces existen alguna subred (y_j) de (x_i) y un punto (único) $y \in X_\infty$ tales que $y_j \to y$. Por otro lado hay una inclusión natural $A \hookrightarrow \{b \in C(X_\infty) : \ b(\infty) = 0\}$. Teniendo en cuenta esta inclusión: $a(y) = \lim_j a(y_j) = \eta(a)$. Entonces $\eta = \delta_y$. Como $\eta \in \widehat{A}$ no se anula en todo A, entonces $y \neq \infty$. Luego es $y \in X$. Esto muestra que $\delta(X)$ es cerrado en $\widehat{A}$. Además se tiene que $x_i \to y$: basta ver que toda subred de (x_i) tiene una subred convergente a y, para lo cual es suficiente probar que toda subred convergente de (x_i) tiene límite y. Ahora, si (z_j) es una subred convergente de (x_i), entonces para todo $a \in A$ es $\delta_y(a) = \eta(a) = \lim_j \delta_{z_j}(a) = \delta_{\lim_j z_j}(a)$.

Demostración.

Efectivamente $\delta_x \in \hat{A}$ porque $A(x) \neq 0$. El mapa δ es inyectivo: si $\delta_x = \delta_{x'}$ entonces $a(x) = a(x')$ para todo $a \in A$, lo que implica que $x = x'$ porque A separa puntos. Si $x_i \to x$ en X y $a \in A$ entonces $\delta_{x_i}(a) = a(x_i) \to a(x) = \delta_x(a)$ porque a es continua; por lo tanto $\delta_{x_i} \xrightarrow{\omega^*} \delta_x$, lo que muestra que δ es continua.

Supongamos que $\eta \in \widehat{A}$ es tal que existe una red $(x_i) \subset X : \delta_{x_i} \xrightarrow{\omega^*} \eta$. Sea X_∞ la compactificación de X con un punto. Entonces existen alguna subred (y_j) de (x_i) y un punto (único) $y \in X_\infty$ tales que $y_j \to y$. Por otro lado hay una inclusión natural $A \hookrightarrow \{b \in C(X_\infty) : \ b(\infty) = 0\}$. Teniendo en cuenta esta inclusión: $a(y) = \text{lím}_j\, a(y_j) = \eta(a)$. Entonces $\eta = \delta_y$. Como $\eta \in \widehat{A}$ no se anula en todo A, entonces $y \neq \infty$. Luego es $y \in X$. Esto muestra que $\delta(X)$ es cerrado en $\widehat{A}$. Además se tiene que $x_i \to y$: basta ver que toda subred de (x_i) tiene una subred convergente a y, para lo cual es suficiente probar que toda subred convergente de (x_i) tiene límite y. Ahora, si (z_j) es una subred convergente de (x_i), entonces para todo $a \in A$ es $\delta_y(a) = \eta(a) = \text{lím}_j\, \delta_{z_j}(a) = \delta_{\text{lím}_j z_j}(a)$. Entonces $y = \text{lím}_j\, z_j$.

Demostración.

Efectivamente $\delta_x \in \hat{A}$ porque $A(x) \neq 0$. El mapa δ es inyectivo: si $\delta_x = \delta_{x'}$ entonces $a(x) = a(x')$ para todo $a \in A$, lo que implica que $x = x'$ porque A separa puntos. Si $x_i \to x$ en X y $a \in A$ entonces $\delta_{x_i}(a) = a(x_i) \to a(x) = \delta_x(a)$ porque a es continua; por lo tanto $\delta_{x_i} \stackrel{\omega^*}{\to} \delta_x$, lo que muestra que δ es continua.

Supongamos que $\eta \in \widehat{A}$ es tal que existe una red $(x_i) \subset X : \delta_{x_i} \stackrel{\omega^*}{\to} \eta$. Sea X_∞ la compactificación de X con un punto. Entonces existen alguna subred (y_j) de (x_i) y un punto (único) $y \in X_\infty$ tales que $y_j \to y$. Por otro lado hay una inclusión natural $A \hookrightarrow \{b \in C(X_\infty) : \ b(\infty) = 0\}$. Teniendo en cuenta esta inclusión: $a(y) = \text{lím}_j\, a(y_j) = \eta(a)$. Entonces $\eta = \delta_y$. Como $\eta \in \widehat{A}$ no se anula en todo A, entonces $y \neq \infty$. Luego es $y \in X$. Esto muestra que $\delta(X)$ es cerrado en $\widehat{A}$. Además se tiene que $x_i \to y$: basta ver que toda subred de (x_i) tiene una subred convergente a y, para lo cual es suficiente probar que toda subred convergente de (x_i) tiene límite y. Ahora, si (z_j) es una subred convergente de (x_i), entonces para todo $a \in A$ es $\delta_y(a) = \eta(a) = \text{lím}_j\, \delta_{z_j}(a) = \delta_{\text{lím}_j z_j}(a)$. Entonces $y = \text{lím}_j\, z_j$. Esto prueba que δ^{-1} es continua. $\square$

Ejemplo

Considérese el álgebra
$A = \left\{ a : S^1 \to \mathbb{C} : \ a \ \textit{admite extensión continua y holomorfa en } \mathbb{D} \right\} \subseteq C(S^1)$.

Ejemplo

Considérese el álgebra
$A = \{a : S^1 \to \mathbb{C} : \ a \textit{ admite extensión continua y holomorfa en } \mathbb{D}\} \subseteq C(S^1)$.

Ejemplo

Considérese el álgebra
$A = \left\{a : S^1 \to \mathbb{C} : \ a \textit{ admite extensión continua y holomorfa en } \mathbb{D}\right\} \subseteq C(S^1)$. *Entonces* $(A, \| \ \|_\infty)$ *es un álgebra de funciones sobre* S^1*:*

Ejemplo

Considérese el álgebra $A = \left\{ a : S^1 \to \mathbb{C} : \ a \textit{ admite extensión continua y holomorfa en } \mathbb{D} \right\} \subseteq C(S^1)$. *Entonces* $(A, \| \, \|_\infty)$ *es un álgebra de funciones sobre* S^1*: Como* $id \in A$ *es claro que* A *separa puntos y no se anula sobre* S^1.

Ejemplo

Considérese el álgebra $A = \left\{ a : S^1 \to \mathbb{C} : \ a \textit{ admite extensión continua y holomorfa en } \mathbb{D} \right\} \subseteq C(S^1)$. *Entonces* $(A, \| \ \|_\infty)$ *es un álgebra de funciones sobre* S^1*: Como* $id \in A$ *es claro que* A *separa puntos y no se anula sobre* S^1*. Para ver que* A *es de Banach, basta mostrar que* A *es cerrada en* $C(S^1)$ *con* $\| \ \|_\infty$*.*

Ejemplo

Considérese el álgebra $A = \left\{a : S^1 \to \mathbb{C} : \ a \textit{ admite extensión continua y holomorfa en } \mathbb{D}\right\} \subseteq C(S^1)$. *Entonces* $(A, \|\ \|_\infty)$ *es un álgebra de funciones sobre* S^1*: Como* $id \in A$ *es claro que* A *separa puntos y no se anula sobre* S^1*. Para ver que* A *es de Banach, basta mostrar que* A *es cerrada en* $C(S^1)$ *con* $\|\ \|_\infty$*. Ahora, supongamos que* $(b_n) \subset A$ *converge a* $b \in C(S^1)$*.*

Ejemplo

Considérese el álgebra $A = \left\{ a : S^1 \to \mathbb{C} : \ a \textit{ admite extensión continua y holomorfa en } \mathbb{D} \right\} \subseteq C(S^1)$. *Entonces* $(A, \| \ \|_\infty)$ *es un álgebra de funciones sobre* S^1*: Como* $id \in A$ *es claro que* A *separa puntos y no se anula sobre* S^1*. Para ver que* A *es de Banach, basta mostrar que* A *es cerrada en* $C(S^1)$ *con* $\| \ \|_\infty$*. Ahora, supongamos que* $(b_n) \subset A$ *converge a* $b \in C(S^1)$*. Si* $\tilde{b}_n$ *es una extensión holomorfa*[a] *de* b_n *a* $\mathbb{D}$*, entonces* $(\tilde{b}_n)$ *es de Cauchy en* $C(\bar{\mathbb{D}})$ *por el teorema del módulo máximo;*

Ejemplo

Considérese el álgebra $A = \{a : S^1 \to \mathbb{C} : \ a \textit{ admite extensión continua y holomorfa en } \mathbb{D}\} \subseteq C(S^1)$. *Entonces* $(A, \| \ \|_\infty)$ *es un álgebra de funciones sobre* S^1*: Como* $id \in A$ *es claro que* A *separa puntos y no se anula sobre* S^1*. Para ver que* A *es de Banach, basta mostrar que* A *es cerrada en* $C(S^1)$ *con* $\| \ \|_\infty$*. Ahora, supongamos que* $(b_n) \subset A$ *converge a* $b \in C(S^1)$*. Si* $\tilde{b}_n$ *es una extensión holomorfa*[a] *de* b_n *a* $\mathbb{D}$*, entonces* $(\tilde{b}_n)$ *es de Cauchy en* $C(\bar{\mathbb{D}})$ *por el teorema del módulo máximo; sea* c *su límite.*

Ejemplo

Considérese el álgebra $A = \{a : S^1 \to \mathbb{C} : \ a \text{ admite extensión continua y holomorfa en } \mathbb{D}\} \subseteq C(S^1)$. *Entonces* $(A, \| \ \|_\infty)$ *es un álgebra de funciones sobre* S^1*: Como* $id \in A$ *es claro que* A *separa puntos y no se anula sobre* S^1*. Para ver que* A *es de Banach, basta mostrar que* A *es cerrada en* $C(S^1)$ *con* $\| \ \|_\infty$*. Ahora, supongamos que* $(b_n) \subset A$ *converge a* $b \in C(S^1)$*. Si* $\tilde{b}_n$ *es una extensión holomorfa*[a] *de* b_n *a* $\mathbb{D}$*, entonces* $(\tilde{b}_n)$ *es de Cauchy en* $C(\bar{\mathbb{D}})$ *por el teorema del módulo máximo; sea* c *su límite. Como el límite uniforme de funciones holomorfas es holomorfo, tenemos que* c *es holomorfa en* $\mathbb{D}$*.*

Ejemplo

Considérese el álgebra
$A = \{a : S^1 \to \mathbb{C} : \ a \ \textit{admite extensión continua y holomorfa en } \mathbb{D}\} \subseteq C(S^1)$. *Entonces* $(A, \| \ \|_\infty)$ *es un álgebra de funciones sobre* S^1*: Como* $id \in A$ *es claro que* A *separa puntos y no se anula sobre* S^1*. Para ver que* A *es de Banach, basta mostrar que* A *es cerrada en* $C(S^1)$ *con* $\| \ \|_\infty$*. Ahora, supongamos que* $(b_n) \subset A$ *converge a* $b \in C(S^1)$*. Si* $\tilde{b}_n$ *es una extensión holomorfa*[a] *de* b_n *a* $\mathbb{D}$*, entonces* $(\tilde{b}_n)$ *es de Cauchy en* $C(\bar{\mathbb{D}})$ *por el teorema del módulo máximo; sea* c *su límite. Como el límite uniforme de funciones holomorfas es holomorfo, tenemos que* c *es holomorfa en* $\mathbb{D}$*. Como además* $c|_{S^1} = b$ *resulta que* $b \in A$*, y además que* $\tilde{b} = c$*.*

Ejemplo

Considérese el álgebra $A = \{a : S^1 \to \mathbb{C} : \ a \text{ admite extensión continua y holomorfa en } \mathbb{D}\} \subseteq C(S^1)$. *Entonces* $(A, \| \, \|_\infty)$ *es un álgebra de funciones sobre* S^1*: Como* $id \in A$ *es claro que* A *separa puntos y no se anula sobre* S^1*. Para ver que* A *es de Banach, basta mostrar que* A *es cerrada en* $C(S^1)$ *con* $\| \, \|_\infty$*. Ahora, supongamos que* $(b_n) \subset A$ *converge a* $b \in C(S^1)$*. Si* $\tilde{b}_n$ *es una extensión holomorfa*[a] *de* b_n *a* $\mathbb{D}$*, entonces* $(\tilde{b}_n)$ *es de Cauchy en* $C(\bar{\mathbb{D}})$ *por el teorema del módulo máximo; sea* c *su límite. Como el límite uniforme de funciones holomorfas es holomorfo, tenemos que* c *es holomorfa en* $\mathbb{D}$*. Como además* $c|_{S^1} = b$ *resulta que* $b \in A$*, y además que* $\tilde{b} = c$*. Entonces la imagen del mapa* $\delta : S^1 \to \widehat{A}$ *incluye a* S^1 *como subconjunto cerrado de* $\widehat{A}$ *por la proposición anterior.*

Ejemplo

Considérese el álgebra $A = \{a : S^1 \to \mathbb{C} : \ a \text{ admite extensión continua y holomorfa en } \mathbb{D}\} \subseteq C(S^1)$. *Entonces* $(A, \| \, \|_\infty)$ *es un álgebra de funciones sobre* S^1*: Como* $id \in A$ *es claro que* A *separa puntos y no se anula sobre* S^1*. Para ver que* A *es de Banach, basta mostrar que* A *es cerrada en* $C(S^1)$ *con* $\| \, \|_\infty$*. Ahora, supongamos que* $(b_n) \subset A$ *converge a* $b \in C(S^1)$*. Si* $\tilde{b}_n$ *es una extensión holomorfa*[a] *de* b_n *a* $\mathbb{D}$*, entonces* $(\tilde{b}_n)$ *es de Cauchy en* $C(\bar{\mathbb{D}})$ *por el teorema del módulo máximo; sea* c *su límite. Como el límite uniforme de funciones holomorfas es holomorfo, tenemos que* c *es holomorfa en* $\mathbb{D}$*. Como además* $c|_{S^1} = b$ *resulta que* $b \in A$*, y además que* $\tilde{b} = c$*. Entonces la imagen del mapa* $\delta : S^1 \to \widehat{A}$ *incluye a* S^1 *como subconjunto cerrado de* $\widehat{A}$ *por la proposición anterior. Sin embargo* $\widehat{A} \neq S^1$ *vía esta inclusión:*

Ejemplo

Considérese el álgebra $A = \{a : S^1 \to \mathbb{C} : \ a \textit{ admite extensión continua y holomorfa en } \mathbb{D}\} \subseteq C(S^1)$. *Entonces* $(A, \| \|_\infty)$ *es un álgebra de funciones sobre* S^1*: Como* $id \in A$ *es claro que* A *separa puntos y no se anula sobre* S^1*. Para ver que* A *es de Banach, basta mostrar que* A *es cerrada en* $C(S^1)$ *con* $\| \|_\infty$*. Ahora, supongamos que* $(b_n) \subset A$ *converge a* $b \in C(S^1)$*. Si* $\tilde{b}_n$ *es una extensión holomorfa*[a] *de* b_n *a* $\mathbb{D}$*, entonces* $(\tilde{b}_n)$ *es de Cauchy en* $C(\bar{\mathbb{D}})$ *por el teorema del módulo máximo; sea* c *su límite. Como el límite uniforme de funciones holomorfas es holomorfo, tenemos que* c *es holomorfa en* $\mathbb{D}$*. Como además* $c|_{S^1} = b$ *resulta que* $b \in A$*, y además que* $\tilde{b} = c$*. Entonces la imagen del mapa* $\delta : S^1 \to \widehat{A}$ *incluye a* S^1 *como subconjunto cerrado de* $\widehat{A}$ *por la proposición anterior. Sin embargo* $\widehat{A} \neq S^1$ *vía esta inclusión: por ejemplo el mapa* $a \mapsto \tilde{a}(0)$ *es un homomorfismo no nulo* $(\widetilde{1} = 1)$*.*

Ejemplo

Considérese el álgebra $A = \{a : S^1 \to \mathbb{C} : \ a \textit{ admite extensión continua y holomorfa en } \mathbb{D}\} \subseteq C(S^1)$. *Entonces* $(A, \| \ \|_\infty)$ *es un álgebra de funciones sobre* S^1*: Como* $id \in A$ *es claro que* A *separa puntos y no se anula sobre* S^1*. Para ver que* A *es de Banach, basta mostrar que* A *es cerrada en* $C(S^1)$ *con* $\| \ \|_\infty$*. Ahora, supongamos que* $(b_n) \subset A$ *converge a* $b \in C(S^1)$*. Si* $\tilde{b}_n$ *es una extensión holomorfa*[a] *de* b_n *a* $\mathbb{D}$*, entonces* $(\tilde{b}_n)$ *es de Cauchy en* $C(\bar{\mathbb{D}})$ *por el teorema del módulo máximo; sea* c *su límite. Como el límite uniforme de funciones holomorfas es holomorfo, tenemos que* c *es holomorfa en* $\mathbb{D}$*. Como además* $c|_{S^1} = b$ *resulta que* $b \in A$*, y además que* $\tilde{b} = c$*. Entonces la imagen del mapa* $\delta : S^1 \to \widehat{A}$ *incluye a* S^1 *como subconjunto cerrado de* $\widehat{A}$ *por la proposición anterior. Sin embargo* $\widehat{A} \neq S^1$ *vía esta inclusión: por ejemplo el mapa* $a \mapsto \tilde{a}(0)$ *es un homomorfismo no nulo* ($\widetilde{1} = 1$)*. De hecho* A *es claramente isomorfa al álgebra del disco* $A(\mathbb{D})$*, y por lo tanto* $\widehat{A} \cong \bar{\mathbb{D}}$*.*

[a] Observar que, como consecuencia del principio del módulo máximo, dicha extensión es única. De hecho, si $a \in A$ entonces su extensión está dada por: $\tilde{a}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} \frac{a(w)}{w-z} dw, \ \forall z \in \mathbb{D}$.

Ejemplo (Teorema de Wiener)

"Si $a : S^1 \to \mathbb{C}$ continua tiene serie de Fourier absolutamente convergente y no se anula, entonces $\frac{1}{a}$ también tiene serie de Fourier absolutamente convergente".

Ejemplo (Teorema de Wiener)

"Si $a : S^1 \to \mathbb{C}$ *continua tiene serie de Fourier absolutamente convergente y no se anula, entonces* $\frac{1}{a}$ *también tiene serie de Fourier absolutamente convergente".*

Ejemplo (Teorema de Wiener)

"Si $a : S^1 \to \mathbb{C}$ continua tiene serie de Fourier absolutamente convergente y no se anula, entonces $\frac{1}{a}$ también tiene serie de Fourier absolutamente convergente". Recordemos que el álgebra de Wiener es

$$\mathcal{W}(S^1) = \left\{ a : S^1 \to \mathbb{C} : \ a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n, \ con \sum_n |a_n| < \infty \right\},$$

con la norma $\|a\| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|$.

Ejemplo (Teorema de Wiener)

"Si $a : S^1 \to \mathbb{C}$ continua tiene serie de Fourier absolutamente convergente y no se anula, entonces $\frac{1}{a}$ también tiene serie de Fourier absolutamente convergente". Recordemos que el álgebra de Wiener es

$$\mathcal{W}(S^1) = \left\{ a : S^1 \to \mathbb{C} : \ a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n, \ con \sum_n |a_n| < \infty \right\},$$

con la norma $\|a\| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|$. Es un álgebra de funciones sobre S^1 y $\mathcal{W}(S^1) \cong l^1(\mathbb{Z})$.

Ejemplo (Teorema de Wiener)

"Si $a : S^1 \to \mathbb{C}$ continua tiene serie de Fourier absolutamente convergente y no se anula, entonces $\frac{1}{a}$ también tiene serie de Fourier absolutamente convergente". Recordemos que el álgebra de Wiener es

$$\mathcal{W}(S^1) = \left\{ a : S^1 \to \mathbb{C} : \ a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n, \ con \sum_n |a_n| < \infty \right\},$$

con la norma $\|a\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|$. Es un álgebra de funciones sobre S^1 y $\mathcal{W}(S^1) \cong l^1(\mathbb{Z})$. Entonces el mapa $\delta : S^1 \to \widehat{\mathcal{W}(S^1)}$, dado por $z \mapsto \delta_z$, es un homeomorfismo sobre un subconjunto cerrado de $\widehat{\mathcal{W}(S^1)}$.

Ejemplo (Teorema de Wiener)

"Si $a : S^1 \to \mathbb{C}$ continua tiene serie de Fourier absolutamente convergente y no se anula, entonces $\frac{1}{a}$ también tiene serie de Fourier absolutamente convergente". Recordemos que el álgebra de Wiener es

$$\mathcal{W}(S^1) = \left\{ a : S^1 \to \mathbb{C} : \ a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n, \ con \sum_n |a_n| < \infty \right\},$$

con la norma $\|a\| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|$. Es un álgebra de funciones sobre S^1 y $\mathcal{W}(S^1) \cong l^1(\mathbb{Z})$. Entonces el mapa $\delta : S^1 \to \widehat{\mathcal{W}(S^1)}$, dado por $z \mapsto \delta_z$, es un homeomorfismo sobre un subconjunto cerrado de $\widehat{\mathcal{W}(S^1)}$.
Para cada $k \in \mathbb{Z}$, sea $e_k : S^1 \to \mathbb{C}$ dado por $e_k(z) = z^k$.

Ejemplo (Teorema de Wiener)

"Si $a : S^1 \to \mathbb{C}$ continua tiene serie de Fourier absolutamente convergente y no se anula, entonces $\frac{1}{a}$ también tiene serie de Fourier absolutamente convergente". Recordemos que el álgebra de Wiener es

$$\mathcal{W}(S^1) = \left\{ a : S^1 \to \mathbb{C} : \; a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n, \; con \sum_n |a_n| < \infty \right\},$$

con la norma $\|a\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|$. Es un álgebra de funciones sobre S^1 y $\mathcal{W}(S^1) \cong l^1(\mathbb{Z})$. Entonces el mapa $\delta : S^1 \to \widehat{\mathcal{W}(S^1)}$, dado por $z \mapsto \delta_z$, es un homeomorfismo sobre un subconjunto cerrado de $\widehat{\mathcal{W}(S^1)}$.
Para cada $k \in \mathbb{Z}$, sea $e_k : S^1 \to \mathbb{C}$ dado por $e_k(z) = z^k$. Entonces $e_k = e_1^k \in \mathcal{W}(S^1)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ y $\mathcal{W}(S^1) = \overline{\mathrm{span}}\{e_k : \; k \in \mathbb{Z}\}$.

Ejemplo (Teorema de Wiener)

"Si $a : S^1 \to \mathbb{C}$ continua tiene serie de Fourier absolutamente convergente y no se anula, entonces $\frac{1}{a}$ también tiene serie de Fourier absolutamente convergente". Recordemos que el álgebra de Wiener es

$$\mathcal{W}(S^1) = \left\{ a : S^1 \to \mathbb{C} : \; a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n, \; con \sum_n |a_n| < \infty \right\},$$

con la norma $\|a\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|$. Es un álgebra de funciones sobre S^1 y $\mathcal{W}(S^1) \cong l^1(\mathbb{Z})$. Entonces el mapa $\delta : S^1 \to \widehat{\mathcal{W}(S^1)}$, dado por $z \mapsto \delta_z$, es un homeomorfismo sobre un subconjunto cerrado de $\widehat{\mathcal{W}(S^1)}$.
Para cada $k \in \mathbb{Z}$, sea $e_k : S^1 \to \mathbb{C}$ dado por $e_k(z) = z^k$. Entonces $e_k = e_1^k \in \mathcal{W}(S^1)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ y $\mathcal{W}(S^1) = \overline{\mathrm{span}}\{e_k : \; k \in \mathbb{Z}\}$. Entonces $\mathcal{W}(S^1)$ está generado por e_1 y $e_{-1} = e_1^{-1}$ como álgebra de Banach,

Ejemplo (Teorema de Wiener)

"Si $a : S^1 \to \mathbb{C}$ continua tiene serie de Fourier absolutamente convergente y no se anula, entonces $\frac{1}{a}$ también tiene serie de Fourier absolutamente convergente". Recordemos que el álgebra de Wiener es

$$\mathcal{W}(S^1) = \left\{ a : S^1 \to \mathbb{C} : \; a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n, \; con \sum_n |a_n| < \infty \right\},$$

con la norma $\|a\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|$. Es un álgebra de funciones sobre S^1 y $\mathcal{W}(S^1) \cong l^1(\mathbb{Z})$. Entonces el mapa $\delta : S^1 \to \widehat{\mathcal{W}(S^1)}$, dado por $z \mapsto \delta_z$, es un homeomorfismo sobre un subconjunto cerrado de $\widehat{\mathcal{W}(S^1)}$.
Para cada $k \in \mathbb{Z}$, sea $e_k : S^1 \to \mathbb{C}$ dado por $e_k(z) = z^k$. Entonces $e_k = e_1^k \in \mathcal{W}(S^1)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ y $\mathcal{W}(S^1) = \overline{\mathrm{span}}\{e_k : \; k \in \mathbb{Z}\}$.
Entonces $\mathcal{W}(S^1)$ está generado por e_1 y $e_{-1} = e_1^{-1}$ como álgebra de Banach, y por lo tanto el mapa evaluación $ev_{e_1} : \widehat{\mathcal{W}(S^1)} \to \sigma(e_1)$ es un homeomorfismo.

Ejemplo (Teorema de Wiener)

"Si $a : S^1 \to \mathbb{C}$ continua tiene serie de Fourier absolutamente convergente y no se anula, entonces $\frac{1}{a}$ también tiene serie de Fourier absolutamente convergente". Recordemos que el álgebra de Wiener es

$$\mathcal{W}(S^1) = \left\{ a : S^1 \to \mathbb{C} : \; a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n, \; con \; \sum_n |a_n| < \infty \right\},$$

con la norma $\|a\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|$. Es un álgebra de funciones sobre S^1 y $\mathcal{W}(S^1) \cong l^1(\mathbb{Z})$. Entonces el mapa $\delta : S^1 \to \widehat{\mathcal{W}(S^1)}$, dado por $z \mapsto \delta_z$, es un homeomorfismo sobre un subconjunto cerrado de $\widehat{\mathcal{W}(S^1)}$.
Para cada $k \in \mathbb{Z}$, sea $e_k : S^1 \to \mathbb{C}$ dado por $e_k(z) = z^k$. Entonces $e_k = e_1^k \in \mathcal{W}(S^1)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ y $\mathcal{W}(S^1) = \overline{\text{span}}\{e_k : \; k \in \mathbb{Z}\}$. Entonces $\mathcal{W}(S^1)$ está generado por e_1 y $e_{-1} = e_1^{-1}$ como álgebra de Banach, y por lo tanto el mapa evaluación $ev_{e_1} : \widehat{\mathcal{W}(S^1)} \to \sigma(e_1)$ es un homeomorfismo. Por otra parte:

Ejemplo (Teorema de Wiener)

"Si $a : S^1 \to \mathbb{C}$ continua tiene serie de Fourier absolutamente convergente y no se anula, entonces $\frac{1}{a}$ también tiene serie de Fourier absolutamente convergente". Recordemos que el álgebra de Wiener es

$$\mathcal{W}(S^1) = \left\{ a : S^1 \to \mathbb{C} :\ a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n,\ con \sum_n |a_n| < \infty \right\},$$

con la norma $\|a\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|$. Es un álgebra de funciones sobre S^1 y $\mathcal{W}(S^1) \cong l^1(\mathbb{Z})$. Entonces el mapa $\delta : S^1 \to \widehat{\mathcal{W}(S^1)}$, dado por $z \mapsto \delta_z$, es un homeomorfismo sobre un subconjunto cerrado de $\widehat{\mathcal{W}(S^1)}$.
Para cada $k \in \mathbb{Z}$, sea $e_k : S^1 \to \mathbb{C}$ dado por $e_k(z) = z^k$. Entonces $e_k = e_1^k \in \mathcal{W}(S^1)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ y $\mathcal{W}(S^1) = \overline{\text{span}}\{e_k :\ k \in \mathbb{Z}\}$. Entonces $\mathcal{W}(S^1)$ está generado por e_1 y $e_{-1} = e_1^{-1}$ como álgebra de Banach, y por lo tanto el mapa evaluación $ev_{e_1} : \widehat{\mathcal{W}(S^1)} \to \sigma(e_1)$ es un homeomorfismo. Por otra parte:

Ejemplo (continuación)

Ejemplo (continuación)

1. $\sigma(e_k) \subseteq \overline{D(0, \|e_k\|)} = \bar{\mathbb{D}}$.

Ejemplo (continuación)

1. $\sigma(e_k) \subseteq \overline{D(0, \|e_k\|)} = \bar{\mathbb{D}}$.
2. $e_{-1} = e_1^{-1}$. *Entonces* $\sigma(e_{-1}) = \sigma(e_1)^{-1}$, *lo que implica que* $\sigma(e_1) \subset \bar{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) = S^1$.

Ejemplo (continuación)

1. $\sigma(e_k) \subseteq \overline{D(0, \|e_k\|)} = \bar{\mathbb{D}}$.
2. $e_{-1} = e_1^{-1}$. *Entonces* $\sigma(e_{-1}) = \sigma(e_1)^{-1}$, *lo que implica que* $\sigma(e_1) \subset \bar{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) = S^1$.

Ejemplo (continuación)

1. $\sigma(e_k) \subseteq \overline{D(0, \|e_k\|)} = \bar{\mathbb{D}}$.
2. $e_{-1} = e_1^{-1}$. *Entonces* $\sigma(e_{-1}) = \sigma(e_1)^{-1}$, *lo que implica que* $\sigma(e_1) \subset \bar{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) = S^1$. *Entonces* $\sigma(e_1) \subseteq S^1$ *y como es obvio que* $S^1 \subseteq \sigma(e_1)$, *entonces* $\sigma(e_1) = S^1$.

Ejemplo (continuación)

1. $\sigma(e_k) \subseteq \overline{D(0, \|e_k\|)} = \bar{\mathbb{D}}$.
2. $e_{-1} = e_1^{-1}$. *Entonces* $\sigma(e_{-1}) = \sigma(e_1)^{-1}$, *lo que implica que* $\sigma(e_1) \subset \bar{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) = S^1$. *Entonces* $\sigma(e_1) \subseteq S^1$ *y como es obvio que* $S^1 \subseteq \sigma(e_1)$, *entonces* $\sigma(e_1) = S^1$. *Por lo tanto el diagrama siguiente conmuta:*

Ejemplo (continuación)

1. $\sigma(e_k) \subseteq \overline{D(0, \|e_k\|)} = \bar{\mathbb{D}}$.
2. $e_{-1} = e_1^{-1}$. *Entonces* $\sigma(e_{-1}) = \sigma(e_1)^{-1}$, *lo que implica que* $\sigma(e_1) \subset \bar{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) = S^1$. *Entonces* $\sigma(e_1) \subseteq S^1$ *y como es obvio que* $S^1 \subseteq \sigma(e_1)$, *entonces* $\sigma(e_1) = S^1$. *Por lo tanto el diagrama siguiente conmuta:*

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "id"] \arrow[dr, "\delta"'] & S^1 = \sigma(e_1), \\ & \widehat{\mathcal{W}(S^1)} \arrow[u, "ev_{e_1}"', "\cong"] \end{tikzcd} \qquad \textit{pues} \qquad \begin{tikzcd} z \arrow[r, mapsto, bend left] \arrow[dr, mapsto, bend left] & z = \delta_z(e_1) \\ & \delta_z \arrow[u, mapsto, bend right] \end{tikzcd}$$

Ejemplo (continuación)

1. $\sigma(e_k) \subseteq \overline{D(0, \|e_k\|)} = \bar{\mathbb{D}}$.
2. $e_{-1} = e_1^{-1}$. *Entonces* $\sigma(e_{-1}) = \sigma(e_1)^{-1}$, *lo que implica que* $\sigma(e_1) \subset \bar{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) = S^1$. *Entonces* $\sigma(e_1) \subseteq S^1$ *y como es obvio que* $S^1 \subseteq \sigma(e_1)$, *entonces* $\sigma(e_1) = S^1$. *Por lo tanto el diagrama siguiente conmuta:*

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "id"] \arrow[dr, "\delta"'] & S^1 = \sigma(e_1), \\ & \widehat{\mathcal{W}(S^1)} \arrow[u, "\cong", "ev_{e_1}"'] \end{tikzcd} \qquad \textit{pues} \qquad \begin{tikzcd} z \arrow[r, mapsto, bend left] \arrow[dr, mapsto, bend right] & z = \delta_z(e_1) \\ & \delta_z \arrow[u, mapsto, bend right] \end{tikzcd}$$

Esto muestra que δ *es un homeomorfismo; en particular* $\widehat{\mathcal{W}(S^1)} = \delta(S^1)$.

Ejemplo (continuación)

1. $\sigma(e_k) \subseteq \overline{D(0, \|e_k\|)} = \bar{\mathbb{D}}$.
2. $e_{-1} = e_1^{-1}$. *Entonces* $\sigma(e_{-1}) = \sigma(e_1)^{-1}$, *lo que implica que* $\sigma(e_1) \subset \bar{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) = S^1$. *Entonces* $\sigma(e_1) \subseteq S^1$ *y como es obvio que* $S^1 \subseteq \sigma(e_1)$, *entonces* $\sigma(e_1) = S^1$. *Por lo tanto el diagrama siguiente conmuta:*

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "id"] \arrow[dr, "\delta"'] & S^1 = \sigma(e_1), \\ & \widehat{\mathcal{W}(S^1)} \arrow[u, "ev_{e_1}"', "\cong"] \end{tikzcd} \qquad \textit{pues} \qquad \begin{tikzcd} z \arrow[r, bend left, mapsto] \arrow[dr, mapsto, bend right] & z = \delta_z(e_1) \\ & \delta_z \arrow[u, mapsto, bend right] \end{tikzcd}$$

Esto muestra que δ *es un homeomorfismo; en particular* $\widehat{\mathcal{W}(S^1)} = \delta(S^1)$.

Ejemplo (continuación)

Finalmente, si $a \in \mathcal{W}(S^1)$ es tal que $a(z) \neq 0$ para todo $z \in S^1$, entonces

$$\sigma(a) = \{h(a) : \ h \in \widehat{\mathcal{W}(S^1)}\} = \{a(z) : \ z \in S^1\} \not\ni 0.$$

Ejemplo (continuación)

Finalmente, si $a \in \mathcal{W}(S^1)$ *es tal que* $a(z) \neq 0$ *para todo* $z \in S^1$, *entonces*

$$\sigma(a) = \{h(a) : \; h \in \widehat{\mathcal{W}(S^1)}\} = \{a(z) : \; z \in S^1\} \not\ni 0.$$

Ejemplo (continuación)

Finalmente, si $a \in \mathcal{W}(S^1)$ *es tal que* $a(z) \neq 0$ *para todo* $z \in S^1$*, entonces*

$$\sigma(a) = \{h(a) : \; h \in \widehat{\mathcal{W}(S^1)}\} = \{a(z) : \; z \in S^1\} \not\ni 0.$$

Luego $a \in \mathrm{Inv}(\mathcal{W}(S^1))$*, es decir* $\frac{1}{a} \in \mathcal{W}(S^1)$*.*

Ejemplo (continuación)

Finalmente, si $a \in \mathcal{W}(S^1)$ *es tal que* $a(z) \neq 0$ *para todo* $z \in S^1$*, entonces*

$$\sigma(a) = \{h(a) : \ h \in \widehat{\mathcal{W}(S^1)}\} = \{a(z) : \ z \in S^1\} \not\ni 0.$$

Luego $a \in \mathrm{Inv}(\mathcal{W}(S^1))$*, es decir* $\frac{1}{a} \in \mathcal{W}(S^1)$*.*
Notar que, como $\ell^1(\mathbb{Z}) \cong \mathcal{W}(S^1)$*, entonces* $\widehat{\ell^1(\mathbb{Z})} = S^1$*, es decir, el espectro de* $\ell^1(\mathbb{Z})$ *se identifica con* S^1*, el grupo dual de* $\mathbb{Z}$*. Esto es parte de un hecho más general.*