

1 Repaso

2 Aplicaciones

3 Álgebras de funciones

- 1 Álgebras normadas, de Banach, C^* -álgebras, y sus homomorfismos.
- 2 Ideales modulares, homomorfismos sobreyectivos a álgebras con unidad.
- 3 $\text{Inv}(A)$, $\sigma(a)$, $r(a) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$.
- 4 $\sigma(a)$ es compacto y no vacío, y $r(a) = \lim_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.
- 5 Transformada de Gelfand (ejemplos guía: transformadas de Fourier).
- 6 Si B es de Banach y $h : B \rightarrow \mathbb{C}$ es un homomorfismo, entonces $\|h\| \leq 1$; si B es unital entonces $h(1) = 1 = \|h\|$.
- 7 Si A es un álgebra de Banach conmutativa, entonces $h \mapsto \ker h$ es una biyección entre el conjunto de homomorfismos complejos no nulos de A y el conjunto de ideales modulares maximales de A .
- 8 El espectro $(\hat{A}, w^*)$ de A : es localmente compacto y de Hausdorff, compacto si A tiene unidad, metrizable y separable si A es separable. Su clausura está contenida en $\hat{A} \cup \{0\}$, y este conjunto, que es la compactificación con un punto de $\hat{A}$, es homeomorfo a $\hat{\hat{A}}$.

Definición

Sean A un álgebra de Banach y $a \in A$. La **transformada de Gelfand** de a es $\hat{a} : \hat{A} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\hat{a}(h) := h(a), \quad \forall h \in \hat{A}.$$

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$.

- ❶ Si A tiene unidad, entonces $\sigma(a) = \overline{\text{Im}(\hat{a})} = \text{Im}(\hat{a}) = \{h(a) : h \in \hat{A}\}$.
- ❷ Si A no tiene unidad, entonces $\sigma(a) = \{h(a) : h \in \hat{A}\} \cup \{0\}$.
En particular si $\hat{A}$ no es compacto, entonces $\sigma(a) = \overline{\text{Im}(\hat{a})}$.

Demostración. La segunda afirmación se deduce de la primera. Supongamos que A tiene unidad. Si $h \in \hat{A}$, entonces $a - h(a) \in \ker h$, y por lo tanto no es invertible, o sea $h(a) \in \sigma(a)$. Recíprocamente, si $\lambda \in \sigma(a)$, entonces $A(a - \lambda)$ es un ideal modular propio, y por lo tanto está contenido en un ideal modular maximal $M = \ker h_M$, para cierto -único- $h_M \in \hat{A}$; luego $\lambda = h_M(a)$.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$. Entonces

- ❶ $\hat{a}$ es continua y $\|\hat{a}\|_\infty \leq \|a\|$.
- ❷ $\hat{a} \in C_0(\hat{A})$.
- ❸ $\mathcal{G} : A \rightarrow C_0(\hat{A})$, dada por $a \mapsto \hat{a}$ para todo $a \in A$, es un homomorfismo de álgebras (unital si $A \ni 1$).
- ❹ $\ker(\mathcal{G}) = \text{rad}(A)$.
- ❺ $\|\hat{a}\|_\infty = r(a) = \lim_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Demostración. Las partes (1) y (3) son simples ejercicios, y la parte (5) es consecuencia directa de la Proposición previa. Para ver (4), notar que $a \in \ker \mathcal{G}$ sii $\hat{a}(h) = 0 \ \forall h \in \hat{A}$, es decir, sii $h(a) = 0 \ \forall h \in \hat{A}$. Pero esto último es equivalente a $a \in \bigcap_{h \in \hat{A}} \ker h = \text{rad}(A)$. La parte (2) es obvia si $\hat{A}$ es compacto. Si no lo es, su compactificación con un punto es $\hat{A} \cup \{0\}$, y si $h_i \xrightarrow{i} 0$ en la topología w^* , entonces $\hat{a}(h_i) = h_i(a) \xrightarrow{i} 0(a) = 0$, así que $\hat{a} \in C_0(\hat{A})$.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa con unidad y $a \in A$ tal que A está generada por 1 y a , es decir:

$$A = \overline{\{p(a) : p \in \mathbb{C}[X]\}}.$$

Entonces la evaluación $ev_a : \hat{A} \rightarrow \sigma(a)$ dada $ev_a(h) = h(a)$ es un homeomorfismo.

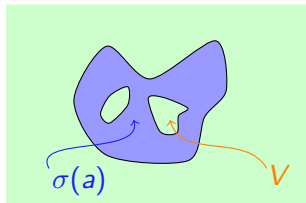
Demostración.

Ya sabemos que $\text{Im}(\hat{a}) = \{h(a) : h \in \hat{A}\} = \sigma(a)$, y para ver que ev_a es inyectiva basta notar que, como A está generada por 1 y a , un homomorfismo complejo no nulo (que necesariamente satisface $h(1) = 1$), queda determinado por su valor en a .

Proposición

En las mismas hipótesis de la proposición anterior se tiene que $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ es conexo.

Demostración.



- Se tiene $\partial V \subseteq \partial \sigma(a) \subseteq \sigma(a)$.
- $|p(v)| \leq \|p\|_{\partial V}$ por el principio del módulo máximo.
- Entonces $|p(v)| \leq r(p(a)) \leq \|p(a)\|$.

Luego el mapa $\{q(a) : q \in \mathbb{C}[X]\} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $q(a) \mapsto q(v)$ es un homomorfismo de álgebras continuo. Por lo tanto se extiende a $h \in \hat{A}$.
Entonces

$$v = \hat{a}(h) = h(a) \in \sigma(a),$$

y esto es absurdo porque $v \in V$.

Ejemplo (El álgebra del disco)

Veamos que la inclusión $a : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}$, es un generador de $A(\bar{\mathbb{D}})$. Sea A la subálgebra de Banach unital de $A(\bar{\mathbb{D}})$ generada por a , y fijemos $b \in A(\bar{\mathbb{D}})$.

- (1) Para $r \in (0, 1)$ sea $b_r : \bar{\mathbb{D}}(0, \frac{1}{r}) \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $b_r(z) = b(rz)$. Entonces $b_r|_{\bar{\mathbb{D}}} \in A(\bar{\mathbb{D}})$ y $\lim_{r \rightarrow 1} b_r|_{\bar{\mathbb{D}}} = b$ porque b es uniformemente continua en $\bar{\mathbb{D}}$.
- (2) Por otro lado, si $c \in \text{Hol}(D(0, s))$ para algún $s > 1$, entonces $c(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, uniformemente en $\bar{\mathbb{D}}$. Entonces $c = \lim_n c_{(n)}$ donde $c_{(n)} = \sum_{k=0}^n c_k a^k$. Luego $c \in A$.

Cada b_r está en las hipótesis de (2), así que $b_r \in A$, y por lo tanto su límite, b , también está en A . En conclusión a es un generador de $A(\bar{\mathbb{D}})$. Calculemos $\widehat{A(\bar{\mathbb{D}})}$. Como $\|a\| = 1$, es $\sigma(a) \subseteq \bar{\mathbb{D}}$. Por otro lado, cada $z \in \bar{\mathbb{D}}$ define $h_z \in \widehat{A(\bar{\mathbb{D}})}$ tal que $h_z(b) := b(z)$. Como $\widehat{A(\bar{\mathbb{D}})} \cong \sigma(a)$ a través $h \mapsto h(a)$, y la restricción de este mapa a $\{h_z : z \in \bar{\mathbb{D}}\}$ tiene imagen $\bar{\mathbb{D}}$, concluimos primero que $\sigma(a) = \bar{\mathbb{D}}$, y luego que $\widehat{A(\bar{\mathbb{D}})} = \{h_z : z \in \bar{\mathbb{D}}\} \cong \bar{\mathbb{D}}$.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach con unidad y a un elemento invertible de A . Si a y a^{-1} generan A como álgebra de Banach, es decir,

$$A = \overline{\{p(a, a^{-1}) : p \in \mathbb{C}[x, y]\}},$$

entonces la evaluación $ev_a : \hat{A} \rightarrow \sigma(a)$, dada por $ev_a(h) = h(a)$, es un homeomorfismo.

Demostración.

Sabemos que ev_a es continuo y sobreyectivo. Si $h_1, h_2 \in \hat{A}$ son tales que $h_1(a) = h_2(a)$, entonces $h_1(a^{-1}) = h_1(a)^{-1} = h_2(a)^{-1} = h_2(a^{-1})$, y por lo tanto

$$h_1(p(a, a^{-1})) = p(h_1(a), h_1(a)^{-1}) = p(h_2(a), h_2(a)^{-1}) = h_2(p(a, a^{-1})).$$

Se concluye que los mapas continuos h_1 y h_2 coinciden en un conjunto denso en A , y por lo tanto son iguales. □

Definición

Sean X un espacio de Hausdorff localmente compacto y $A \subseteq C_0(X)$ un álgebra de Banach (la norma de A no es necesariamente la $\| \cdot \|_\infty$). Se dice que A es un álgebra de funciones sobre X si:

- (i) A separa puntos de X , es decir si $x_1, x_2 \in X$ son tales que $a(x_1) = a(x_2)$ para todo $a \in A$ entonces $x_1 = x_2$.
- (ii) $A(x) \neq 0$, es decir, para todo $x \in X$ existe $a \in A$ tal que $a(x) \neq 0$ (se dice entonces que A no se anula en X).

Observación

La inclusión natural $A \xhookrightarrow{\iota} C_0(X)$ es un homomorfismo de álgebras, y por lo tanto $\|\iota(a)\|_\infty \leq \|a\|$ para todo $a \in A$, ya que cada homomorfismo complejo de un álgebra de Banach es contractivo. Luego es $\| \cdot \|_\infty \leq \| \cdot \|$.

Proposición

Si B es un álgebra de Banach conmutativa y $A := \overline{\mathcal{G}(B)}^{\|\cdot\|_\infty} \subseteq C_0(\widehat{B})$, entonces A es un álgebra de funciones sobre $\widehat{B}$.

Demostración.

En primer lugar A separa puntos de $\widehat{B}$: dados $h_1, h_2 \in \widehat{B}$, entonces $\hat{b}(h_1) = \hat{b}(h_2)$ para todo $b \in B$ si y sólo si $h_1(b) = h_2(b)$ para todo $b \in B$, es decir, si y sólo si $h_1 = h_2$. En segundo lugar A no se anula en $\widehat{B}$: si $h \in \widehat{B}$, entonces por definición es $h \neq 0$, de donde existe $b \in B$ tal que $h(b) \neq 0$; luego es $\hat{b}(h) \neq 0$. □

Proposición

Sea A un álgebra de funciones sobre X . Para cada $x \in X$ sea $\delta_x \in \widehat{A}$ tal que $\delta_x(a) = a(x)$. Entonces el mapa $\delta : X \rightarrow \widehat{A}$ tal que $x \mapsto \delta_x$ es un homeomorfismo entre X y un subconjunto cerrado de $\widehat{A}$.

Demostración.

Efectivamente $\delta_x \in \hat{A}$ porque $A(x) \neq 0$. El mapa δ es inyectivo: si $\delta_x = \delta_{x'}$ entonces $a(x) = a(x')$ para todo $a \in A$, lo que implica que $x = x'$ porque A separa puntos. Si $x_i \rightarrow x$ en X y $a \in A$ entonces $\delta_{x_i}(a) = a(x_i) \rightarrow a(x) = \delta_x(a)$ porque a es continua; por lo tanto $\delta_{x_i} \xrightarrow{\omega^*} \delta_x$, lo que muestra que δ es continua.

Supongamos que $\eta \in \hat{A}$ es tal que existe una red $(x_i) \subset X : \delta_{x_i} \xrightarrow{\omega^*} \eta$. Sea X_∞ la compactificación de X con un punto. Entonces existen alguna subred (y_j) de (x_i) y un punto (único) $y \in X_\infty$ tales que $y_j \rightarrow y$. Por otro lado hay una inclusión natural $A \hookrightarrow \{b \in C(X_\infty) : b(\infty) = 0\}$. Teniendo en cuenta esta inclusión: $a(y) = \lim_j a(y_j) = \eta(a)$. Entonces $\eta = \delta_y$. Como $\eta \in \hat{A}$ no se anula en todo A , entonces $y \neq \infty$. Luego es $y \in X$. Esto muestra que $\delta(X)$ es cerrado en $\hat{A}$. Además se tiene que $x_i \rightarrow y$: basta ver que toda subred de (x_i) tiene una subred convergente a y , para lo cual es suficiente probar que toda subred convergente de (x_i) tiene límite y . Ahora, si (z_j) es una subred convergente de (x_i) , entonces para todo $a \in A$ es $\delta_y(a) = \eta(a) = \lim_j \delta_{z_j}(a) = \delta_{\lim_j z_j}(a)$. Entonces $y = \lim_j z_j$. Esto prueba que δ^{-1} es continua. □

Ejemplo

Considérese el álgebra

$A = \{a : S^1 \rightarrow \mathbb{C} : a \text{ admite extensión continua y holomorfa en } \mathbb{D}\} \subseteq C(S^1)$. Entonces $(A, \|\cdot\|_\infty)$ es un álgebra de funciones sobre S^1 : Como $\text{id} \in A$ es claro que A separa puntos y no se anula sobre S^1 . Para ver que A es de Banach, basta mostrar que A es cerrada en $C(S^1)$ con $\|\cdot\|_\infty$. Ahora, supongamos que $(b_n) \subset A$ converge a $b \in C(S^1)$. Si $\tilde{b}_n$ es una extensión holomorfa^a de b_n a $\mathbb{D}$, entonces $(\tilde{b}_n)$ es de Cauchy en $C(\bar{\mathbb{D}})$ por el teorema del módulo máximo; sea c su límite. Como el límite uniforme de funciones holomorfas es holomorfo, tenemos que c es holomorfa en $\mathbb{D}$. Como además $c|_{S^1} = b$ resulta que $b \in A$, y además que $\tilde{b} = c$. Entonces la imagen del mapa $\delta : S^1 \rightarrow \hat{A}$ incluye a S^1 como subconjunto cerrado de $\hat{A}$ por la proposición anterior. Sin embargo $\hat{A} \neq S^1$ vía esta inclusión: por ejemplo el mapa $a \mapsto \tilde{a}(0)$ es un homomorfismo no nulo ($\tilde{1} = 1$). De hecho A es claramente isomorfa al álgebra del disco $A(\mathbb{D})$, y por lo tanto $\hat{A} \cong \bar{\mathbb{D}}$.

^aObservar que, como consecuencia del principio del módulo máximo, dicha extensión es única. De hecho, si $a \in A$ entonces su extensión está dada por:

$$\tilde{a}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} \frac{a(w)}{w-z} dw, \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Ejemplo (Teorema de Wiener)

“Si $a : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ continua tiene serie de Fourier absolutamente convergente y no se anula, entonces $\frac{1}{a}$ también tiene serie de Fourier absolutamente convergente”. Recordemos que el álgebra de Wiener es

$$\mathcal{W}(S^1) = \left\{ a : S^1 \rightarrow \mathbb{C} : a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n, \text{ con } \sum_n |a_n| < \infty \right\},$$

con la norma $\|a\| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|$. Es un álgebra de funciones sobre S^1 y $\mathcal{W}(S^1) \cong l^1(\mathbb{Z})$. Entonces el mapa $\delta : S^1 \rightarrow \widehat{\mathcal{W}(S^1)}$, dado por $z \mapsto \delta_z$, es un homeomorfismo sobre un subconjunto cerrado de $\widehat{\mathcal{W}(S^1)}$.

Para cada $k \in \mathbb{Z}$, sea $e_k : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $e_k(z) = z^k$. Entonces $e_k = e_1^k \in \mathcal{W}(S^1)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ y $\mathcal{W}(S^1) = \overline{\text{span}}\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$. Entonces $\mathcal{W}(S^1)$ está generado por e_1 y $e_{-1} = e_1^{-1}$ como álgebra de Banach, y por lo tanto el mapa evaluación $ev_{e_1} : \widehat{\mathcal{W}(S^1)} \rightarrow \sigma(e_1)$ es un homeomorfismo. Por otra parte:

Ejemplo (continuación)

- 1 $\sigma(e_k) \subseteq \overline{D(0, \|e_k\|)} = \bar{\mathbb{D}}$.
- 2 $e_{-1} = e_1^{-1}$. Entonces $\sigma(e_{-1}) = \sigma(e_1)^{-1}$, lo que implica que $\sigma(e_1) \subset \bar{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) = S^1$. Entonces $\sigma(e_1) \subseteq S^1$ y como es obvio que $S^1 \subseteq \sigma(e_1)$, entonces $\sigma(e_1) = S^1$. Por lo tanto el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 S^1 & \xrightarrow{id} & S^1 = \sigma(e_1), \\
 & \searrow \delta & \uparrow \cong \text{ev}_{e_1} \\
 & & \widehat{\mathcal{W}(S^1)}
 \end{array}
 \quad \text{pues} \quad
 \begin{array}{ccc}
 \frac{1}{z} & \xrightarrow{\quad} & z = \delta_z(e_1) \\
 & \searrow & \uparrow \\
 & & \delta_z
 \end{array}$$

Esto muestra que δ es un homeomorfismo; en particular $\widehat{\mathcal{W}(S^1)} = \delta(S^1)$.

Ejemplo (continuación)

Finalmente, si $a \in \mathcal{W}(S^1)$ es tal que $a(z) \neq 0$ para todo $z \in S^1$, entonces

$$\sigma(a) = \{h(a) : h \in \widehat{\mathcal{W}(S^1)}\} = \{a(z) : z \in S^1\} \not\ni 0.$$

Luego $a \in \text{Inv}(\mathcal{W}(S^1))$, es decir $\frac{1}{a} \in \mathcal{W}(S^1)$.

Notar que, como $\ell^1(\mathbb{Z}) \cong \mathcal{W}(S^1)$, entonces $\widehat{\ell^1(\mathbb{Z})} = S^1$, es decir, el espectro de $\ell^1(\mathbb{Z})$ se identifica con S^1 , el grupo dual de $\mathbb{Z}$. Esto es parte de un hecho más general.