1 Repaso y complementos

Repaso y complementos.

1. Álgebras normadas, de Banach, C*-álgebras, y sus homomorfismos.

Repaso y complementos.

1. Álgebras normadas, de Banach, C*-álgebras, y sus homomorfismos.
2. Adjunción de la unidad.

Repaso y complementos.

1. Álgebras normadas, de Banach, C*-álgebras, y sus homomorfismos.
2. Adjunción de la unidad.
3. Ideales y cocientes. Ideales y núcleos de homomorfismos.

Repaso y complementos.

1. Álgebras normadas, de Banach, C*-álgebras, y sus homomorfismos.
2. Adjunción de la unidad.
3. Ideales y cocientes. Ideales y núcleos de homomorfismos.
4. Ideales modulares. Todo ideal modular está contenido en un ideal modular maximal, y todo ideal modular maximal es un ideal maximal.

Repaso y complementos.

1. Álgebras normadas, de Banach, C*-álgebras, y sus homomorfismos.
2. Adjunción de la unidad.
3. Ideales y cocientes. Ideales y núcleos de homomorfismos.
4. Ideales modulares. Todo ideal modular está contenido en un ideal modular maximal, y todo ideal modular maximal es un ideal maximal.
5. La intersección de los ideales modulares maximales de un anillo es un ideal que se llama *radical (de Jacobson)* del anillo, y se denota $\mathrm{rad}(A)$.

Repaso y complementos.

1. Álgebras normadas, de Banach, C*-álgebras, y sus homomorfismos.
2. Adjunción de la unidad.
3. Ideales y cocientes. Ideales y núcleos de homomorfismos.
4. Ideales modulares. Todo ideal modular está contenido en un ideal modular maximal, y todo ideal modular maximal es un ideal maximal.
5. La intersección de los ideales modulares maximales de un anillo es un ideal que se llama *radical (de Jacobson)* del anillo, y se denota $\mathrm{rad}(A)$.
6. Si $\mathrm{rad}(A) = 0$, se dice que A es *semisimple*. El cociente $A/\mathrm{rad(A)}$ es semisimple.

Repaso y complementos.

1. Álgebras normadas, de Banach, C*-álgebras, y sus homomorfismos.
2. Adjunción de la unidad.
3. Ideales y cocientes. Ideales y núcleos de homomorfismos.
4. Ideales modulares. Todo ideal modular está contenido en un ideal modular maximal, y todo ideal modular maximal es un ideal maximal.
5. La intersección de los ideales modulares maximales de un anillo es un ideal que se llama *radical (de Jacobson)* del anillo, y se denota $\mathrm{rad}(A)$.
6. Si $\mathrm{rad}(A) = 0$, se dice que A es *semisimple*. El cociente $A/\mathrm{rad}(\mathrm{A})$ es semisimple.
7. El conjunto $\mathrm{Inv}(A)$ de elementos invertibles de un álgebra de Banach unital A es un subconjunto abierto de A, y además es un grupo topológico con las operaciones y topología heredadas de A.

Repaso y complementos.

1. Álgebras normadas, de Banach, C*-álgebras, y sus homomorfismos.
2. Adjunción de la unidad.
3. Ideales y cocientes. Ideales y núcleos de homomorfismos.
4. Ideales modulares. Todo ideal modular está contenido en un ideal modular maximal, y todo ideal modular maximal es un ideal maximal.
5. La intersección de los ideales modulares maximales de un anillo es un ideal que se llama *radical (de Jacobson)* del anillo, y se denota $\mathrm{rad}(A)$.
6. Si $\mathrm{rad}(A) = 0$, se dice que A es *semisimple*. El cociente $A/\mathrm{rad}(\mathrm{A})$ es semisimple.
7. El conjunto $\mathrm{Inv}(A)$ de elementos invertibles de un álgebra de Banach unital A es un subconjunto abierto de A, y además es un grupo topológico con las operaciones y topología heredadas de A.
8. Corolario: si J es un ideal propio (no necesariamente cerrado) de un álgebra de Banach unital, entonces $\overline{J}$ también es un ideal propio.

Repaso y complementos.

1. Álgebras normadas, de Banach, C*-álgebras, y sus homomorfismos.
2. Adjunción de la unidad.
3. Ideales y cocientes. Ideales y núcleos de homomorfismos.
4. Ideales modulares. Todo ideal modular está contenido en un ideal modular maximal, y todo ideal modular maximal es un ideal maximal.
5. La intersección de los ideales modulares maximales de un anillo es un ideal que se llama *radical (de Jacobson)* del anillo, y se denota $\mathrm{rad}(A)$.
6. Si $\mathrm{rad}(A) = 0$, se dice que A es *semisimple*. El cociente $A/\mathrm{rad}(\mathrm{A})$ es semisimple.
7. El conjunto $\mathsf{Inv}(A)$ de elementos invertibles de un álgebra de Banach unital A es un subconjunto abierto de A, y además es un grupo topológico con las operaciones y topología heredadas de A.
8. <u>Corolario:</u> si J es un ideal propio (no necesariamente cerrado) de un álgebra de Banach unital, entonces $\overline{J}$ también es un ideal propio.
9. Espectro (y resolvente) de un elemento de un álgebra.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach con unidad, y $a \in A$.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach con unidad, y $a \in A$.

1. *Si $\phi : A \to B$ es unital, entonces $\sigma_B(\phi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$.*

Proposición

Sean A un álgebra de Banach con unidad, y $a \in A$.

1. *Si $\phi : A \to B$ es unital, entonces $\sigma_B(\phi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$.*
2. *Si $h : A \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo no nulo, entonces $h(a) \in \sigma(a)$.*

Proposición

Sean A un álgebra de Banach con unidad, y $a \in A$.

1. *Si $\phi : A \to B$ es unital, entonces $\sigma_B(\phi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$.*
2. *Si $h : A \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo no nulo, entonces $h(a) \in \sigma(a)$.*
3. *Si $p \in \mathbb{C}[X]$, entonces $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$.*

Proposición

Sean A un álgebra de Banach con unidad, y $a \in A$.

1. *Si $\phi : A \to B$ es unital, entonces $\sigma_B(\phi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$.*
2. *Si $h : A \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo no nulo, entonces $h(a) \in \sigma(a)$.*
3. *Si $p \in \mathbb{C}[X]$, entonces $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$.*

Proposición

Sean A un álgebra de Banach con unidad, y $a \in A$.

1. *Si $\phi : A \to B$ es unital, entonces $\sigma_B(\phi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$.*
2. *Si $h : A \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo no nulo, entonces $h(a) \in \sigma(a)$.*
3. *Si $p \in \mathbb{C}[X]$, entonces $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$.*

Demostración.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach con unidad, y $a \in A$.

1. *Si $\phi : A \to B$ es unital, entonces $\sigma_B(\phi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$.*
2. *Si $h : A \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo no nulo, entonces $h(a) \in \sigma(a)$.*
3. *Si $p \in \mathbb{C}[X]$, entonces $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$.*

Demostración. Si $w \in \mathbb{C}$ entonces

$$p(X) - w = \beta(X - r_1)(X - r_2)\cdots(X - r_n).$$

Proposición

Sean A un álgebra de Banach con unidad, y $a \in A$.

1. *Si $\phi : A \to B$ es unital, entonces $\sigma_B(\phi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$.*
2. *Si $h : A \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo no nulo, entonces $h(a) \in \sigma(a)$.*
3. *Si $p \in \mathbb{C}[X]$, entonces $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$.*

Demostración. Si $w \in \mathbb{C}$ entonces

$$p(X) - w = \beta(X - r_1)(X - r_2)\cdots(X - r_n).$$

Por lo tanto es $p(r_i) = w$, $\forall i$, y

$$p(a) - w = \beta(a - r_1)(a - r_2)\cdots(a - r_n).$$

Proposición

Sean A un álgebra de Banach con unidad, y $a \in A$.

1. *Si $\phi : A \to B$ es unital, entonces $\sigma_B(\phi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$.*
2. *Si $h : A \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo no nulo, entonces $h(a) \in \sigma(a)$.*
3. *Si $p \in \mathbb{C}[X]$, entonces $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$.*

Demostración. Si $w \in \mathbb{C}$ entonces

$$p(X) - w = \beta(X - r_1)(X - r_2) \cdots (X - r_n).$$

Por lo tanto es $p(r_i) = w$, $\forall i$, y

$$p(a) - w = \beta(a - r_1)(a - r_2) \cdots (a - r_n).$$

Los factores conmutan entre sí, de modo que su producto es invertible sii cada uno de ellos es invertible.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach con unidad, y $a \in A$.

1. *Si $\phi : A \to B$ es unital, entonces $\sigma_B(\phi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$.*
2. *Si $h : A \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo no nulo, entonces $h(a) \in \sigma(a)$.*
3. *Si $p \in \mathbb{C}[X]$, entonces $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$.*

Demostración. Si $w \in \mathbb{C}$ entonces

$$p(X) - w = \beta(X - r_1)(X - r_2) \cdots (X - r_n).$$

Por lo tanto es $p(r_i) = w$, $\forall i$, y

$$p(a) - w = \beta(a - r_1)(a - r_2) \cdots (a - r_n).$$

Los factores conmutan entre sí, de modo que su producto es invertible sii cada uno de ellos es invertible. En otras palabras: $w \in \sigma(p(a))$ sii existe $r_i \in \sigma(a)$. Es decir $w \in \sigma(p(a)) \iff w \in p(\sigma(a))$.

Teoría espectral

Proposición

La función resolvente $\mathrm{R}_a : \mathbb{C} \setminus \sigma(a) \to \mathrm{Inv}(A)$, *definida como* $\mathrm{R}_a(z) = (z - a)^{-1}$, *es holomorfa, y* $\lim_{z\to\infty} \mathrm{R}_a(z) = 0$. *Además si* $|z| > \|a\|$ *se tiene:* $\mathrm{R}_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}}$.

Demostración.

Proposición

La función resolvente $\mathrm{R}_a : \mathbb{C} \setminus \sigma(a) \to \mathrm{Inv}(A)$, *definida como* $\mathrm{R}_a(z) = (z - a)^{-1}$, *es holomorfa, y* $\lim_{z\to\infty} \mathrm{R}_a(z) = 0$. *Además si* $|z| > \|a\|$ *se tiene:* $\mathrm{R}_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}}$.

Demostración.

Proposición

La función resolvente $\mathrm{R}_a : \mathbb{C} \setminus \sigma(a) \to \mathrm{Inv}(A)$*, definida como* $\mathrm{R}_a(z) = (z-a)^{-1}$*, es holomorfa, y* $\lim_{z\to\infty} \mathrm{R}_a(z) = 0$*. Además si* $|z| > \|a\|$ *se tiene:* $\mathrm{R}_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}}$.

Demostración. $R_a(z) - R_a(z_0) = (z-a)^{-1} - (z_0 - a)^{-1}$

Proposición

La función resolvente $\mathrm{R}_a : \mathbb{C} \setminus \sigma(a) \to \mathrm{Inv}(A)$, *definida como* $\mathrm{R}_a(z) = (z-a)^{-1}$, *es holomorfa, y* $\lim_{z\to\infty} \mathrm{R}_a(z) = 0$. *Además si* $|z| > \|a\|$ *se tiene:* $\mathrm{R}_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}}$.

Demostración. $R_a(z) - R_a(z_0) = (z-a)^{-1} - (z_0-a)^{-1}$

$$= (z-a)^{-1}((z_0-a)-(z-a))(z_0-a)^{-1}$$

Proposición

La función resolvente $\mathrm{R}_a : \mathbb{C} \setminus \sigma(a) \to \mathrm{Inv}(A)$, *definida como* $\mathrm{R}_a(z) = (z-a)^{-1}$, *es holomorfa, y* $\lim_{z\to\infty} \mathrm{R}_a(z) = 0$. *Además si* $|z| > \|a\|$ *se tiene:* $\mathrm{R}_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}}$.

Demostración. $R_a(z) - R_a(z_0) = (z-a)^{-1} - (z_0-a)^{-1}$

$$= (z-a)^{-1}((z_0-a)-(z-a))(z_0-a)^{-1} = -(z-z_0)R_a(z)R_a(z_0),$$

Proposición

La función resolvente $\mathrm{R}_a : \mathbb{C} \setminus \sigma(a) \to \mathrm{Inv}(A)$, *definida como* $\mathrm{R}_a(z) = (z - a)^{-1}$, *es holomorfa, y* $\lim_{z\to\infty} \mathrm{R}_a(z) = 0$. *Además si* $|z| > \|a\|$ *se tiene:* $\mathrm{R}_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}}$.

Demostración. $R_a(z) - R_a(z_0) = (z-a)^{-1} - (z_0 - a)^{-1}$

$= (z-a)^{-1}((z_0 - a) - (z - a))(z_0 - a)^{-1} = -(z - z_0)R_a(z)R_a(z_0)$,

y por lo tanto $R_a'(z_0) = -R_a(z_0)^2$.

Proposición

La función resolvente $\mathrm{R}_a : \mathbb{C} \setminus \sigma(a) \to \mathrm{Inv}(A)$, *definida como* $\mathrm{R}_a(z) = (z-a)^{-1}$, *es holomorfa, y* $\lim_{z\to\infty} \mathrm{R}_a(z) = 0$. *Además si* $|z| > \|a\|$ *se tiene:* $\mathrm{R}_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}}$.

Demostración. $R_a(z) - R_a(z_0) = (z-a)^{-1} - (z_0 - a)^{-1}$

$= (z-a)^{-1}((z_0 - a) - (z-a))(z_0 - a)^{-1} = -(z - z_0)R_a(z)R_a(z_0)$,

y por lo tanto $R_a'(z_0) = -R_a(z_0)^2$.

Si $|z| > \|a\|$, entonces $1 > \|1 - (1 - \frac{a}{z})\|$, así que $(1 - \frac{a}{z}) \in \mathrm{Inv}(A)$,

Proposición

La función resolvente $\mathrm{R}_a : \mathbb{C} \setminus \sigma(a) \to \mathrm{Inv}(A)$, *definida como* $\mathrm{R}_a(z) = (z-a)^{-1}$, *es holomorfa, y* $\lim_{z\to\infty} \mathrm{R}_a(z) = 0$. *Además si* $|z| > \|a\|$ *se tiene:* $\mathrm{R}_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}}$.

Demostración. $R_a(z) - R_a(z_0) = (z-a)^{-1} - (z_0-a)^{-1}$

$= (z-a)^{-1}((z_0-a)-(z-a))(z_0-a)^{-1} = -(z-z_0)R_a(z)R_a(z_0)$,

y por lo tanto $R_a'(z_0) = -R_a(z_0)^2$.

Si $|z| > \|a\|$, entonces $1 > \|1-(1-\frac{a}{z})\|$, así que $(1-\frac{a}{z}) \in \mathrm{Inv}(A)$,

y $(1-\frac{a}{z})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^n}$, de donde $(z-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}}$.

Proposición

La función resolvente $\mathrm{R}_a : \mathbb{C} \setminus \sigma(a) \to \mathrm{Inv}(A)$, *definida como* $\mathrm{R}_a(z) = (z-a)^{-1}$, *es holomorfa, y* $\lim_{z\to\infty} \mathrm{R}_a(z) = 0$. *Además si* $|z| > \|a\|$ *se tiene:* $\mathrm{R}_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}}$.

Demostración. $R_a(z) - R_a(z_0) = (z-a)^{-1} - (z_0-a)^{-1}$

$= (z-a)^{-1}((z_0-a)-(z-a))(z_0-a)^{-1} = -(z-z_0)R_a(z)R_a(z_0)$,

y por lo tanto $R_a'(z_0) = -R_a(z_0)^2$.

Si $|z| > \|a\|$, entonces $1 > \|1 - (1-\frac{a}{z})\|$, así que $(1-\frac{a}{z}) \in \mathrm{Inv}(A)$,

y $(1-\frac{a}{z})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^n}$, de donde $(z-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}}$.

Por último, si $|z| > \|a\|$:

Proposición

La función resolvente $\mathrm{R}_a : \mathbb{C} \setminus \sigma(a) \to \mathrm{Inv}(A)$, *definida como* $\mathrm{R}_a(z) = (z-a)^{-1}$, *es holomorfa, y* $\lim_{z\to\infty} \mathrm{R}_a(z) = 0$. *Además si* $|z| > \|a\|$ *se tiene:* $\mathrm{R}_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}}$.

Demostración. $R_a(z) - R_a(z_0) = (z-a)^{-1} - (z_0-a)^{-1}$

$= (z-a)^{-1}((z_0-a)-(z-a))(z_0-a)^{-1} = -(z-z_0)R_a(z)R_a(z_0)$,

y por lo tanto $R_a'(z_0) = -R_a(z_0)^2$.

Si $|z| > \|a\|$, entonces $1 > \|1-(1-\frac{a}{z})\|$, así que $(1-\frac{a}{z}) \in \mathrm{Inv}(A)$,

y $(1-\frac{a}{z})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^n}$, de donde $(z-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}}$.

Por último, si $|z| > \|a\|$:$\|R_a(z)\| \leq \frac{1}{|z|}\sum_{n\geq 0} \frac{\|a\|^n}{|z|^n} = \frac{1}{|z|-\|a\|} \overset{z\to\infty}{\to} 0$.

Teorema (Gelfand)

Sean A un álgebra de Banach y $a \in A$. Entonces $\sigma(a) \subseteq \bar{D}(0, \|a\|)$, es compacto y no vacío.

Teorema (Gelfand)

Sean A un álgebra de Banach y $a \in A$. Entonces $\sigma(a) \subseteq \bar{D}(0, \|a\|)$, es compacto y no vacío.

Demostración.

Teorema (Gelfand)

Sean A un álgebra de Banach y $a \in A$. Entonces $\sigma(a) \subseteq \bar{D}(0, \|a\|)$, es compacto y no vacío.

Demostración.

1. $\sigma(a) \subseteq \bar{D}(0, \|a\|)$ por la Proposición previa.

Teorema (Gelfand)

Sean A un álgebra de Banach y $a \in A$. Entonces $\sigma(a) \subseteq \bar{D}(0, \|a\|)$, es compacto y no vacío.

Demostración.

1. $\sigma(a) \subseteq \bar{D}(0, \|a\|)$ por la Proposición previa. Además, si $\Lambda_a : \mathbb{C} \to A$ está dada por $\Lambda_a(z) = a - z$, entonces $\sigma(a) = \Lambda_a^{-1}(A \setminus \mathrm{Inv}(A))$, y por lo tanto $\sigma(a)$ es cerrado. Sigue que $\sigma(a)$ es compacto.

Teorema (Gelfand)

Sean A un álgebra de Banach y $a \in A$. Entonces $\sigma(a) \subseteq \bar{D}(0, \|a\|)$, es compacto y no vacío.

Demostración.

1. $\sigma(a) \subseteq \bar{D}(0, \|a\|)$ por la Proposición previa. Además, si $\Lambda_a : \mathbb{C} \to A$ está dada por $\Lambda_a(z) = a - z$, entonces $\sigma(a) = \Lambda_a^{-1}(A \setminus \mathrm{Inv}(A))$, y por lo tanto $\sigma(a)$ es cerrado. Sigue que $\sigma(a)$ es compacto.
2. Si fuera $\sigma(a) = \emptyset$, entonces $\mathrm{R}_a = 0$ por el teorema de Liouville y la Proposición anterior.

Teorema (Gelfand)

Sean A un álgebra de Banach y $a \in A$. Entonces $\sigma(a) \subseteq \bar{D}(0, \|a\|)$, es compacto y no vacío.

Demostración.

1. $\sigma(a) \subseteq \bar{D}(0, \|a\|)$ por la Proposición previa. Además, si $\Lambda_a : \mathbb{C} \to A$ está dada por $\Lambda_a(z) = a - z$, entonces $\sigma(a) = \Lambda_a^{-1}(A \setminus \mathrm{Inv}(A))$, y por lo tanto $\sigma(a)$ es cerrado. Sigue que $\sigma(a)$ es compacto.
2. Si fuera $\sigma(a) = \emptyset$, entonces $\mathrm{R}_a = 0$ por el teorema de Liouville y la Proposición anterior.

Corolario (Gelfand-Mazur)

Si A es un álgebra normada con división, entonces $A = \mathbb{C} \cdot 1_A$.

Teorema (Gelfand)

Sean A un álgebra de Banach y $a \in A$. Entonces $\sigma(a) \subseteq \bar{D}(0, \|a\|)$, es compacto y no vacío.

Demostración.

1. $\sigma(a) \subseteq \bar{D}(0, \|a\|)$ por la Proposición previa. Además, si $\Lambda_a : \mathbb{C} \to A$ está dada por $\Lambda_a(z) = a - z$, entonces $\sigma(a) = \Lambda_a^{-1}(A \setminus \mathrm{Inv}(A))$, y por lo tanto $\sigma(a)$ es cerrado. Sigue que $\sigma(a)$ es compacto.
2. Si fuera $\sigma(a) = \emptyset$, entonces $\mathrm{R}_a = 0$ por el teorema de Liouville y la Proposición anterior.

Corolario (Gelfand-Mazur)

Si A es un álgebra normada con división, entonces $A = \mathbb{C} \cdot 1_A$.

Demostración.

Teorema (Gelfand)

Sean A un álgebra de Banach y $a \in A$. Entonces $\sigma(a) \subseteq \bar{D}(0, \|a\|)$, es compacto y no vacío.

Demostración.

1. $\sigma(a) \subseteq \bar{D}(0, \|a\|)$ por la Proposición previa. Además, si $\Lambda_a : \mathbb{C} \to A$ está dada por $\Lambda_a(z) = a - z$, entonces $\sigma(a) = \Lambda_a^{-1}(A \setminus \mathrm{Inv}(A))$, y por lo tanto $\sigma(a)$ es cerrado. Sigue que $\sigma(a)$ es compacto.
2. Si fuera $\sigma(a) = \emptyset$, entonces $\mathrm{R}_a = 0$ por el teorema de Liouville y la Proposición anterior.

Corolario (Gelfand-Mazur)

Si A es un álgebra normada con división, entonces $A = \mathbb{C} \cdot 1_A$.

Demostración. Para cada $a \in A$ existe un único $\lambda_a \in \mathbb{C}$ tal que $(a - \lambda_a) \notin \mathrm{Inv}(A)$. El mapa $a \mapsto \lambda_a$ es entonces un isomorfismo.

Ejemplo (El Shift bilateral)

Sea $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ *tal que* $U\xi(n) = \xi(n-1), \quad \forall \xi \in \ell^2, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Ejemplo (El Shift bilateral)

Sea $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ *tal que* $U\xi(n) = \xi(n-1), \quad \forall \xi \in \ell^2, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Ejemplo (El Shift bilateral)

Sea $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ *tal que* $U\xi(n) = \xi(n-1), \quad \forall \xi \in \ell^2, \quad n \in \mathbb{Z}.$
U es un operador unitario, pues es una isometría invertible.

Ejemplo (El Shift bilateral)

Sea $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ *tal que* $U\xi(n) = \xi(n-1), \quad \forall \xi \in \ell^2, \quad n \in \mathbb{Z}$.
U es un operador unitario, pues es una isometría invertible.
Entonces $\|U\| = 1 = \|U^{-1}\|$, *de donde* $\sigma(U)$, $\sigma(U^{-1}) \subseteq \bar{D}(0,1)$.

Ejemplo (El Shift bilateral)

Sea $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ *tal que* $U\xi(n) = \xi(n-1), \quad \forall \xi \in \ell^2, \quad n \in \mathbb{Z}$.
U es un operador unitario, pues es una isometría invertible.
Entonces $\|U\| = 1 = \|U^{-1}\|$*, de donde* $\sigma(U), \sigma(U^{-1}) \subseteq \bar{D}(0,1)$.
Si $z \in \sigma(U)$*, entonces* $z \neq 0$ *y se deduce que* $z^{-1} \in \sigma(U^{-1})$*, pues*

$$zU(U^{-1} - z^{-1}) = z - U,$$

que no es invertible, de modo que $z^{-1} \in \sigma(U^{-1})$.

Ejemplo (El Shift bilateral)

Sea $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ *tal que* $U\xi(n) = \xi(n-1), \quad \forall \xi \in \ell^2, \quad n \in \mathbb{Z}$.
U es un operador unitario, pues es una isometría invertible.
Entonces $\|U\| = 1 = \|U^{-1}\|$, *de donde* $\sigma(U), \sigma(U^{-1}) \subseteq \bar{D}(0,1)$.
Si $z \in \sigma(U)$, *entonces* $z \neq 0$ *y se deduce que* $z^{-1} \in \sigma(U^{-1})$, *pues*

$$zU(U^{-1} - z^{-1}) = z - U,$$

que no es invertible, de modo que $z^{-1} \in \sigma(U^{-1})$.
Por lo tanto $z, z^{-1} \in \bar{D}(0,1)$, *de donde* $z \in S^1$. *Entonces* $\sigma(U) \subseteq S^1$.

Ejemplo (El Shift bilateral)

Sea $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ *tal que* $U\xi(n) = \xi(n-1), \quad \forall \xi \in \ell^2, \quad n \in \mathbb{Z}$.
U *es un operador unitario, pues es una isometría invertible.*
Entonces $\|U\| = 1 = \|U^{-1}\|$, *de donde* $\sigma(U), \sigma(U^{-1}) \subseteq \bar{D}(0,1)$.
Si $z \in \sigma(U)$, *entonces* $z \neq 0$ *y se deduce que* $z^{-1} \in \sigma(U^{-1})$, *pues*

$$zU(U^{-1} - z^{-1}) = z - U,$$

que no es invertible, de modo que $z^{-1} \in \sigma(U^{-1})$.
Por lo tanto $z, z^{-1} \in \bar{D}(0,1)$, *de donde* $z \in S^1$. *Entonces* $\sigma(U) \subseteq S^1$.
Para cada $w \in S^1$, *sea* $M_w : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ *tal que* $M_w\xi(n) = w^n\xi(n)$, $\forall \xi, \forall n$. *Entonces* M_w *es un operador unitario, cuyo inverso es* $M_{\bar{w}}$.

Ejemplo (El Shift bilateral)

Sea $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ *tal que* $U\xi(n) = \xi(n-1), \quad \forall \xi \in \ell^2, \quad n \in \mathbb{Z}$.
U *es un operador unitario, pues es una isometría invertible.*
Entonces $\|U\| = 1 = \|U^{-1}\|$, *de donde* $\sigma(U), \sigma(U^{-1}) \subseteq \bar{D}(0,1)$.
Si $z \in \sigma(U)$, *entonces* $z \neq 0$ *y se deduce que* $z^{-1} \in \sigma(U^{-1})$, *pues*

$$zU(U^{-1} - z^{-1}) = z - U,$$

que no es invertible, de modo que $z^{-1} \in \sigma(U^{-1})$.
Por lo tanto $z, z^{-1} \in \bar{D}(0,1)$, *de donde* $z \in S^1$. *Entonces* $\sigma(U) \subseteq S^1$.
Para cada $w \in S^1$, *sea* $M_w : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ *tal que* $M_w\xi(n) = w^n\xi(n)$, $\forall \xi, \forall n$. *Entonces* M_w *es un operador unitario, cuyo inverso es* $M_{\bar{w}}$.
Ahora, $\alpha_w : B(\ell^2(\mathbb{Z})) \to B(\ell^2(\mathbb{Z}))$ *dado por* $\alpha_w(T) := M_w T M_{\bar{w}}$ *es un automorfismo, y por lo tanto* $\sigma(\alpha_w(T)) = \sigma(T), \forall T \in B(\ell^2(\mathbb{Z}))$.

Ejemplo (El Shift bilateral)

Sea $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ *tal que* $U\xi(n) = \xi(n-1), \quad \forall \xi \in \ell^2, \quad n \in \mathbb{Z}$.
U *es un operador unitario, pues es una isometría invertible.*
Entonces $\|U\| = 1 = \|U^{-1}\|$, *de donde* $\sigma(U), \sigma(U^{-1}) \subseteq \bar{D}(0,1)$.
Si $z \in \sigma(U)$, *entonces* $z \neq 0$ *y se deduce que* $z^{-1} \in \sigma(U^{-1})$, *pues*

$$zU(U^{-1} - z^{-1}) = z - U,$$

que no es invertible, de modo que $z^{-1} \in \sigma(U^{-1})$.
Por lo tanto $z, z^{-1} \in \bar{D}(0,1)$, *de donde* $z \in S^1$. *Entonces* $\sigma(U) \subseteq S^1$.
Para cada $w \in S^1$, *sea* $M_w : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ *tal que* $M_w\xi(n) = w^n\xi(n)$, $\forall \xi, \forall n$. *Entonces* M_w *es un operador unitario, cuyo inverso es* $M_{\bar{w}}$.
Ahora, $\alpha_w : B(\ell^2(\mathbb{Z})) \to B(\ell^2(\mathbb{Z}))$ *dado por* $\alpha_w(T) := M_w T M_{\bar{w}}$ *es un automorfismo, y por lo tanto* $\sigma(\alpha_w(T)) = \sigma(T)$, $\forall T \in B(\ell^2(\mathbb{Z}))$. *Como* $\alpha_w(U) = wU$, *entonces* $\sigma(U) = \sigma(wU) = w\sigma(U)$,

Ejemplo (El Shift bilateral)

Sea $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ *tal que* $U\xi(n) = \xi(n-1), \quad \forall \xi \in \ell^2, \quad n \in \mathbb{Z}$.
U *es un operador unitario, pues es una isometría invertible.*
Entonces $\|U\| = 1 = \|U^{-1}\|$, *de donde* $\sigma(U), \sigma(U^{-1}) \subseteq \bar{D}(0,1)$.
Si $z \in \sigma(U)$, *entonces* $z \neq 0$ *y se deduce que* $z^{-1} \in \sigma(U^{-1})$, *pues*

$$zU(U^{-1} - z^{-1}) = z - U,$$

que no es invertible, de modo que $z^{-1} \in \sigma(U^{-1})$.
Por lo tanto $z, z^{-1} \in \bar{D}(0,1)$, *de donde* $z \in S^1$. *Entonces* $\sigma(U) \subseteq S^1$.
Para cada $w \in S^1$, *sea* $M_w : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ *tal que* $M_w\xi(n) = w^n\xi(n)$, $\forall \xi, \forall n$. *Entonces* M_w *es un operador unitario, cuyo inverso es* $M_{\bar{w}}$.
Ahora, $\alpha_w : B(\ell^2(\mathbb{Z})) \to B(\ell^2(\mathbb{Z}))$ *dado por* $\alpha_w(T) := M_w T M_{\bar{w}}$ *es un automorfismo, y por lo tanto* $\sigma(\alpha_w(T)) = \sigma(T)$, $\forall T \in B(\ell^2(\mathbb{Z}))$. *Como* $\alpha_w(U) = wU$, *entonces* $\sigma(U) = \sigma(wU) = w\sigma(U)$,*y como* $\sigma(U) \neq \emptyset$ *y lo anterior vale para todo* $w \in S^1$, *entonces* $\sigma(U) = S^1$.

Definición (radio espectral)

Sean A un álgebra de Banach y $a \in A$. El radio espectral de a es

$$r(a) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Definición (radio espectral)

Sean A un álgebra de Banach y $a \in A$. El radio espectral de a es

$$r(a) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Ejemplo

El operador de Volterra $\mathrm{V} : L^p([0,1]) \to L^p([0,1])$ *tal que*

$$\mathrm{V}(f)(t) = \int_0^t f(s)\,ds$$

es no nulo, pero $r(\mathrm{V}) = 0$.
(ver detalles en Conway, Example 6.14, page 211).

Teorema (Beurling-Gelfand)

Si A es un álgebra de Banach y $a \in A$, entonces

$$r(a) = \inf_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Teorema (Beurling-Gelfand)

Si A es un álgebra de Banach y $a \in A$, entonces

$$r(a) = \inf_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Demostración.

$\square$

Teorema (Beurling-Gelfand)

Si A es un álgebra de Banach y $a \in A$, entonces

$$r(a) = \inf_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Demostración.

- $\sigma(a^n) = \sigma(a)^n \Rightarrow r(a^n) = r(a)^n \leq \|a^n\| \Rightarrow r(a) \leq \inf \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

□

Teorema (Beurling-Gelfand)

Si A es un álgebra de Banach y $a \in A$, entonces

$$r(a) = \inf_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Demostración.

- $\sigma(a^n) = \sigma(a)^n \Rightarrow r(a^n) = r(a)^n \leq \|a^n\| \Rightarrow r(a) \leq \inf \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.
- Si $\mathrm{S_a} : D(0, \frac{1}{r(a)}) \to A$ tal que $\mathrm{S_a}(z) = \begin{cases} \mathrm{R_a}(\frac{1}{z}) & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$

$\square$

Teorema (Beurling-Gelfand)

Si A es un álgebra de Banach y $a \in A$, entonces

$$r(a) = \inf_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Demostración.

- $\sigma(a^n) = \sigma(a)^n \Rightarrow r(a^n) = r(a)^n \leq \|a^n\| \Rightarrow r(a) \leq \inf \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.
- Si $\mathrm{S_a} : D(0, \frac{1}{r(a)}) \to A$ tal que $\mathrm{S_a}(z) = \begin{cases} \mathrm{R_a}(\frac{1}{z}) & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$
- Entonces $\mathrm{S_a}(z) = \sum_{n\geq 0} a^n z^{n+1}\ \forall z/\ |z| < \frac{1}{\limsup_n \|a^n\|^{1/n}}$, de donde $\frac{1}{r(a)} \leq \frac{1}{\limsup_n \|a^n\|^{1/n}}$.

$\square$

Teorema (Beurling-Gelfand)

Si A es un álgebra de Banach y $a \in A$, entonces

$$r(a) = \inf_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Demostración.

- $\sigma(a^n) = \sigma(a)^n \Rightarrow r(a^n) = r(a)^n \leq \|a^n\| \Rightarrow r(a) \leq \inf \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.
- Si $\mathrm{S_a} : D(0, \frac{1}{r(a)}) \to A$ tal que $\mathrm{S_a}(z) = \begin{cases} \mathrm{R_a}(\frac{1}{z}) & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$
- Entonces $\mathrm{S_a}(z) = \sum_{n\geq 0} a^n z^{n+1}$ $\forall z/\ |z| < \frac{1}{\limsup_n \|a^n\|^{1/n}}$, de donde $\frac{1}{r(a)} \leq \frac{1}{\limsup_n \|a^n\|^{1/n}}$.
- Por lo tanto $\limsup_n \|a^n\|^{1/n} \leq r(a) \leq \inf \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \liminf_n \|a^n\|^{1/n}$.

$\square$

Transformadas de Fourier

Transformada de Fourier en $A = L^1(\mathbb{R})$

Transformada de Fourier en $A = L^1(\mathbb{R})$

- Convolución: $a * b(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} a(t-s)b(s)ds$.

Transformadas de Fourier

Transformada de Fourier en $A = L^1(\mathbb{R})$

- Convolución: $a * b(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} a(t-s)b(s)ds$.
- Involución: $a^*(t) := \overline{a(-t)}$

Transformada de Fourier en $A = L^1(\mathbb{R})$

- Convolución: $a * b(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} a(t-s)b(s)ds$.
- Involución: $a^*(t) := \overline{a(-t)}$
- Transformada de $a \in A$ en $t \in \mathbb{R}$: $\hat{a}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} a(s)e^{-its}ds$. El mapa $h_t : L^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ tal que $a \mapsto \hat{a}(t)$ es un homomorfismo de álgebras.

Transformada de Fourier en $A = L^1(\mathbb{R})$

- Convolución: $a * b(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} a(t-s)b(s)ds$.
- Involución: $a^*(t) := \overline{a(-t)}$
- Transformada de $a \in A$ en $t \in \mathbb{R}$: $\hat{a}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} a(s)e^{-its}ds$. El mapa $h_t : L^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ tal que $a \mapsto \hat{a}(t)$ es un homomorfismo de álgebras.
- $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{F}(a) := \hat{a}$.

Transformada de Fourier en $A = L^1(\mathbb{R})$

- Convolución: $a * b(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} a(t-s)b(s)ds$.
- Involución: $a^*(t) := \overline{a(-t)}$
- Transformada de $a \in A$ en $t \in \mathbb{R}$: $\hat{a}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} a(s)e^{-its}ds$. El mapa $h_t : L^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ tal que $a \mapsto \hat{a}(t)$ es un homomorfismo de álgebras.
- $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{F}(a) := \hat{a}$.

Transformada de Fourier en $A = L^1(\mathbb{R})$

- Convolución: $a * b(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} a(t-s)b(s)ds$.
- Involución: $a^*(t) := \overline{a(-t)}$
- Transformada de $a \in A$ en $t \in \mathbb{R}$: $\hat{a}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} a(s)e^{-its}ds$. El mapa $h_t : L^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ tal que $a \mapsto \hat{a}(t)$ es un homomorfismo de álgebras.
- $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{F}(a) := \hat{a}$.

Transformada de Fourier en $A = L^1(S^1)$

Transformadas de Fourier

Transformada de Fourier en $A = L^1(\mathbb{R})$

- Convolución: $a * b(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} a(t-s)b(s)ds$.
- Involución: $a^*(t) := \overline{a(-t)}$
- Transformada de $a \in A$ en $t \in \mathbb{R}$: $\hat{a}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} a(s)e^{-its}ds$. El mapa $h_t : L^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ tal que $a \mapsto \hat{a}(t)$ es un homomorfismo de álgebras.
- $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{F}(a) := \hat{a}$.

Transformada de Fourier en $A = L^1(S^1)$

- Convolución: $a * b(z) = \int_{S^1} a(w^{-1}z)b(w)dw$.

Transformadas de Fourier

Transformada de Fourier en $A = L^1(\mathbb{R})$

- Convolución: $a * b(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} a(t-s)b(s)ds$.
- Involución: $a^*(t) := \overline{a(-t)}$
- Transformada de $a \in A$ en $t \in \mathbb{R}$: $\hat{a}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} a(s)e^{-its}ds$. El mapa $h_t : L^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ tal que $a \mapsto \hat{a}(t)$ es un homomorfismo de álgebras.
- $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{F}(a) := \hat{a}$.

Transformada de Fourier en $A = L^1(S^1)$

- Convolución: $a * b(z) = \int_{S^1} a(w^{-1}z)b(w)dw$.
- Involución: $a^*(z) := \overline{a(z^{-1})}$

Transformada de Fourier en $A = L^1(\mathbb{R})$

- Convolución: $a * b(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} a(t-s)b(s)ds$.
- Involución: $a^*(t) := \overline{a(-t)}$
- Transformada de $a \in A$ en $t \in \mathbb{R}$: $\hat{a}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} a(s)e^{-its}ds$. El mapa $h_t : L^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ tal que $a \mapsto \hat{a}(t)$ es un homomorfismo de álgebras.
- $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{F}(a) := \hat{a}$.

Transformada de Fourier en $A = L^1(S^1)$

- Convolución: $a * b(z) = \int_{S^1} a(w^{-1}z)b(w)dw$.
- Involución: $a^*(z) := \overline{a(z^{-1})}$
- Transformada de $a \in A$ en $n \in \mathbb{Z}$: $\hat{a}(n) = \int_{S^1} a(w)w^{-n}dw$. El mapa $h_n : L^1(S^1) \to \mathbb{C}$ tal que $a \mapsto \hat{a}(n)$ es un homomorfismo de álgebras.

Transformadas de Fourier

Transformada de Fourier en $A = L^1(\mathbb{R})$

- Convolución: $a * b(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} a(t-s)b(s)ds$.
- Involución: $a^*(t) := \overline{a(-t)}$
- Transformada de $a \in A$ en $t \in \mathbb{R}$: $\hat{a}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} a(s)e^{-its}ds$. El mapa $h_t : L^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ tal que $a \mapsto \hat{a}(t)$ es un homomorfismo de álgebras.
- $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{F}(a) := \hat{a}$.

Transformada de Fourier en $A = L^1(S^1)$

- Convolución: $a * b(z) = \int_{S^1} a(w^{-1}z)b(w)dw$.
- Involución: $a^*(z) := \overline{a(z^{-1})}$
- Transformada de $a \in A$ en $n \in \mathbb{Z}$: $\hat{a}(n) = \int_{S^1} a(w)w^{-n}dw$. El mapa $h_n : L^1(S^1) \to \mathbb{C}$ tal que $a \mapsto \hat{a}(n)$ es un homomorfismo de álgebras.
- $\mathcal{F} : L^1(S^1) \to C_0(\mathbb{Z})$ tal que $\mathcal{F}(a) := \hat{a}$.

Transformada de Fourier en $A = \ell^1(\mathbb{Z})$

Transformada de Fourier en $A = \ell^1(\mathbb{Z})$

- Convolución: $a * b(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a(n-m)b(m)$.

Transformada de Fourier en $A = \ell^1(\mathbb{Z})$

- Convolución: $a * b(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a(n-m)b(m)$.
- Involución: $a^*(n) := \overline{a(-n)}$

Transformada de Fourier en $A = \ell^1(\mathbb{Z})$

- Convolución: $a * b(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a(n-m)b(m)$.
- Involución: $a^*(n) := \overline{a(-n)}$
- Transformada de $a \in A$ en $z \in S^1$: $\hat{a}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)z^{-n}$. El mapa $h_z : L^1(\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$ tal que $a \mapsto \hat{a}(z)$ es un homomorfismo de álgebras.

Transformada de Fourier en $A = \ell^1(\mathbb{Z})$

- Convolución: $a * b(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a(n-m)b(m)$.
- Involución: $a^*(n) := \overline{a(-n)}$
- Transformada de $a \in A$ en $z \in S^1$: $\hat{a}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)z^{-n}$. El mapa $h_z : L^1(\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$ tal que $a \mapsto \hat{a}(z)$ es un homomorfismo de álgebras.
- $\mathcal{F} : \ell^1(\mathbb{Z}) \to C(S^1)$ tal que $\mathcal{F}(a) := \hat{a}$ (notar que $\mathcal{F}(\ell^1(\mathbb{Z})) = \mathcal{W}$).

Transformada de Fourier en $A = \ell^1(\mathbb{Z})$

- Convolución: $a * b(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a(n-m)b(m)$.
- Involución: $a^*(n) := \overline{a(-n)}$
- Transformada de $a \in A$ en $z \in S^1$: $\hat{a}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)z^{-n}$. El mapa $h_z : L^1(\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$ tal que $a \mapsto \hat{a}(z)$ es un homomorfismo de álgebras.
- $\mathcal{F} : \ell^1(\mathbb{Z}) \to C(S^1)$ tal que $\mathcal{F}(a) := \hat{a}$ (notar que $\mathcal{F}(\ell^1(\mathbb{Z})) = \mathcal{W}$).

Transformada de Fourier en $A = \ell^1(\mathbb{Z})$

- Convolución: $a * b(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a(n-m)b(m)$.
- Involución: $a^*(n) := \overline{a(-n)}$
- Transformada de $a \in A$ en $z \in S^1$: $\hat{a}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)z^{-n}$. El mapa $h_z : L^1(\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$ tal que $a \mapsto \hat{a}(z)$ es un homomorfismo de álgebras.
- $\mathcal{F} : \ell^1(\mathbb{Z}) \to C(S^1)$ tal que $\mathcal{F}(a) := \hat{a}$ (notar que $\mathcal{F}(\ell^1(\mathbb{Z})) = \mathcal{W}$).

En los tres casos las transformadas de Fourier se pueden ver como las colecciones continuas de homomorfismos h_t, h_n y h_z respectivamente. La transformada de Gelfand generaliza esto para álgebras de Banach conmutativas.

Teorema

Si A es un álgebra de Banach y $h : A \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo no nulo de álgebras, entonces $\|h\| \leq 1$, y si A tiene unidad, entonces $h(1) = 1 = \|h\|$.

Espacio y transformada de Gelfand

Teorema

Si A es un álgebra de Banach y $h : A \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo no nulo de álgebras, entonces $\|h\| \leq 1$, y si A tiene unidad, entonces $h(1) = 1 = \|h\|$.

Espacio y transformada de Gelfand

Teorema

Si A es un álgebra de Banach y $h : A \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo no nulo de álgebras, entonces $\|h\| \leq 1$, y si A tiene unidad, entonces $h(1) = 1 = \|h\|$.

Demostración.

Teorema

Si A es un álgebra de Banach y $h : A \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo no nulo de álgebras, entonces $\|h\| \leq 1$, y si A tiene unidad, entonces $h(1) = 1 = \|h\|$.

Demostración. Se puede suponer que A tiene unidad

Teorema

Si A es un álgebra de Banach y $h : A \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo no nulo de álgebras, entonces $\|h\| \leq 1$, y si A tiene unidad, entonces $h(1) = 1 = \|h\|$.

Demostración. Se puede suponer que A tiene unidad. Si $\|a\| \leq 1$ y $|h(a)| > 1$, entonces $1 - a/h(a) \in \mathrm{Inv}(A)$

Teorema

Si A es un álgebra de Banach y $h : A \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo no nulo de álgebras, entonces $\|h\| \leq 1$, y si A tiene unidad, entonces $h(1) = 1 = \|h\|$.

Demostración. Se puede suponer que A tiene unidad. Si $\|a\| \leq 1$ y $|h(a)| > 1$, entonces $1 - a/h(a) \in \mathrm{Inv}(A)$. Sea b el inverso.

Teorema

Si A es un álgebra de Banach y $h : A \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo no nulo de álgebras, entonces $\|h\| \leq 1$, y si A tiene unidad, entonces $h(1) = 1 = \|h\|$.

Demostración. Se puede suponer que A tiene unidad. Si $\|a\| \leq 1$ y $|h(a)| > 1$, entonces $1 - a/h(a) \in \mathrm{Inv}(A)$. Sea b el inverso. Como $h \neq 0$ debe ser

$$1 = h(1) = h(b(1 - a/h(a))) = h(b)(1 - h(a)/h(a)) = 0.$$

Teorema

Si A es un álgebra de Banach y $h : A \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo no nulo de álgebras, entonces $\|h\| \leq 1$, y si A tiene unidad, entonces $h(1) = 1 = \|h\|$.

Demostración. Se puede suponer que A tiene unidad. Si $\|a\| \leq 1$ y $|h(a)| > 1$, entonces $1 - a/h(a) \in \mathrm{Inv}(A)$. Sea b el inverso. Como $h \neq 0$ debe ser

$$1 = h(1) = h(b(1 - a/h(a))) = h(b)(1 - h(a)/h(a)) = 0.$$

Absurdo. Luego $\|h\| \leq 1$.

Teorema

Si A es un álgebra de Banach y $h : A \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo no nulo de álgebras, entonces $\|h\| \leq 1$, y si A tiene unidad, entonces $h(1) = 1 = \|h\|$.

Demostración. Se puede suponer que A tiene unidad. Si $\|a\| \leq 1$ y $|h(a)| > 1$, entonces $1 - a/h(a) \in \mathrm{Inv}(A)$. Sea b el inverso. Como $h \neq 0$ debe ser

$$1 = h(1) = h(b(1 - a/h(a))) = h(b)(1 - h(a)/h(a)) = 0.$$

Absurdo. Luego $\|h\| \leq 1$.

Definición

Un homomorfismo complejo no nulo de un álgebra sobre $\mathbb{C}$ se llama **carácter**.

Lema

La clausura de un ideal modular propio M de un álgebra de Banach A es también modular propio.

Lema

La clausura de un ideal modular propio M de un álgebra de Banach A es también modular propio.

Lema

La clausura de un ideal modular propio M de un álgebra de Banach A es también modular propio. Todo ideal modular maximal de un álgebra de Banach es cerrado.

Lema

La clausura de un ideal modular propio M de un álgebra de Banach A es también modular propio. Todo ideal modular maximal de un álgebra de Banach es cerrado.

Demostración.

Lema

La clausura de un ideal modular propio M de un álgebra de Banach A es también modular propio. Todo ideal modular maximal de un álgebra de Banach es cerrado.

Demostración. Sea $u \in A$ tal que $u + M = 1_{A/M}$.

Lema

La clausura de un ideal modular propio M de un álgebra de Banach A es también modular propio. Todo ideal modular maximal de un álgebra de Banach es cerrado.

Demostración. Sea $u \in A$ tal que $u + M = 1_{A/M}$. Entonces $a - au \in M$, $\forall a \in A$.

Lema

La clausura de un ideal modular propio M de un álgebra de Banach A es también modular propio. Todo ideal modular maximal de un álgebra de Banach es cerrado.

Demostración. Sea $u \in A$ tal que $u + M = 1_{A/M}$. Entonces $a - au \in M$, $\forall a \in A$. Supongamos que $x \in M$ es tal que $\|u - x\| < 1$.

Lema

La clausura de un ideal modular propio M de un álgebra de Banach A es también modular propio. Todo ideal modular maximal de un álgebra de Banach es cerrado.

Demostración. Sea $u \in A$ tal que $u + M = 1_{A/M}$. Entonces $a - au \in M$, $\forall a \in A$. Supongamos que $x \in M$ es tal que $\|u - x\| < 1$. Entonces $b := 1 - u + x \in \mathrm{Inv}(\tilde{A})$, y por lo tanto

$$A = Ab = \{a - au + ax : \ a \in A\} \subseteq M.$$

Lema

La clausura de un ideal modular propio M de un álgebra de Banach A es también modular propio. Todo ideal modular maximal de un álgebra de Banach es cerrado.

Demostración. Sea $u \in A$ tal que $u + M = 1_{A/M}$. Entonces $a - au \in M$, $\forall a \in A$. Supongamos que $x \in M$ es tal que $\|u - x\| < 1$. Entonces $b := 1 - u + x \in \mathrm{Inv}(\tilde{A})$, y por lo tanto

$$A = Ab = \{a - au + ax : \ a \in A\} \subseteq M.$$

Como M es propio, no puede existir un tal x, es decir: $\|u - x\| \geq 1$, $\forall x \in M$.

Lema

La clausura de un ideal modular propio M de un álgebra de Banach A es también modular propio. Todo ideal modular maximal de un álgebra de Banach es cerrado.

Demostración. Sea $u \in A$ tal que $u + M = 1_{A/M}$. Entonces $a - au \in M$, $\forall a \in A$. Supongamos que $x \in M$ es tal que $\|u - x\| < 1$. Entonces $b := 1 - u + x \in \operatorname{Inv}(\tilde{A})$, y por lo tanto

$$A = Ab = \{a - au + ax : \ a \in A\} \subseteq M.$$

Como M es propio, no puede existir un tal x, es decir: $\|u - x\| \geq 1$, $\forall x \in M$. Esto implica que $u \notin \bar{M}$, y por lo tanto $\bar{M}$ es propio.

Lema

La clausura de un ideal modular propio M de un álgebra de Banach A es también modular propio. Todo ideal modular maximal de un álgebra de Banach es cerrado.

Demostración. Sea $u \in A$ tal que $u + M = 1_{A/M}$. Entonces $a - au \in M$, $\forall a \in A$. Supongamos que $x \in M$ es tal que $\|u - x\| < 1$. Entonces $b := 1 - u + x \in \mathrm{Inv}(\tilde{A})$, y por lo tanto

$$A = Ab = \{a - au + ax : a \in A\} \subseteq M.$$

Como M es propio, no puede existir un tal x, es decir: $\|u - x\| \geq 1$, $\forall x \in M$. Esto implica que $u \notin \bar{M}$, y por lo tanto $\bar{M}$ es propio.
La segunda afirmación es consecuencia directa de la primera.

Proposición

Sea A un álgebra de Banach conmutativa. El mapa $h \mapsto \ker h$ es una biyección entre el conjunto de caracteres de A y el conjunto de ideales modulares maximales de A.

Demostración.

Demostración. Si h es un carácter de A, entonces $\mathbb{C} = h(A) \cong A/\ker h$.

Demostración. Si h es un carácter de A, entonces $\mathbb{C} = h(A) \cong A/\ker h$. Entonces $\ker h$ es un ideal modular maximal.

Demostración. Si h es un carácter de A, entonces $\mathbb{C} = h(A) \cong A/\ker h$. Entonces $\ker h$ es un ideal modular maximal. Si $u \in A$ es tal que $u + \ker h = 1_{A/\ker h}$, $h(a) = h(a - au) + h(au) = h(a)h(u)\ \forall a \in A$, de donde $h(u) = 1$.

Demostración. Si h es un carácter de A, entonces $\mathbb{C} = h(A) \cong A/\ker h$. Entonces $\ker h$ es un ideal modular maximal. Si $u \in A$ es tal que $u + \ker h = 1_{A/\ker h}$, $h(a) = h(a - au) + h(au) = h(a)h(u)\ \forall a \in A$, de donde $h(u) = 1$. Entonces $h(a)$ es el único escalar λ tal que $a - h(a)u \in \ker h$, y por lo tanto h queda determinado por $\ker h$.

Demostración. Si h es un carácter de A, entonces $\mathbb{C} = h(A) \cong A/\ker h$. Entonces $\ker h$ es un ideal modular maximal. Si $u \in A$ es tal que $u + \ker h = 1_{A/\ker h}$, $h(a) = h(a - au) + h(au) = h(a)h(u)\ \forall a \in A$, de donde $h(u) = 1$. Entonces $h(a)$ es el único escalar λ tal que $a - h(a)u \in \ker h$, y por lo tanto h queda determinado por $\ker h$. Recíprocamente, si M es un ideal modular maximal, entonces A/M es un cuerpo,

Demostración. Si h es un carácter de A, entonces $\mathbb{C} = h(A) \cong A/\ker h$. Entonces $\ker h$ es un ideal modular maximal. Si $u \in A$ es tal que $u + \ker h = 1_{A/\ker h}$, $h(a) = h(a - au) + h(au) = h(a)h(u)\ \forall a \in A$, de donde $h(u) = 1$. Entonces $h(a)$ es el único escalar λ tal que $a - h(a)u \in \ker h$, y por lo tanto h queda determinado por $\ker h$. Recíprocamente, si M es un ideal modular maximal, entonces A/M es un cuerpo, y como $M = \bar{M}$, también es un álgebra de Banach sobre $\mathbb{C}$.

Demostración. Si h es un carácter de A, entonces $\mathbb{C} = h(A) \cong A/\ker h$. Entonces $\ker h$ es un ideal modular maximal. Si $u \in A$ es tal que $u + \ker h = 1_{A/\ker h}$, $h(a) = h(a - au) + h(au) = h(a)h(u)\ \forall a \in A$, de donde $h(u) = 1$. Entonces $h(a)$ es el único escalar λ tal que $a - h(a)u \in \ker h$, y por lo tanto h queda determinado por $\ker h$.
Recíprocamente, si M es un ideal modular maximal, entonces A/M es un cuerpo, y como $M = \bar{M}$, también es un álgebra de Banach sobre $\mathbb{C}$. Luego $A/M \cong \mathbb{C}$ por el Teorema de Gelfand-Mazur. Entonces $M = \ker(h_M)$ donde $h_M = \varphi_M \circ \pi$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "h_M"'] & \frac{A}{M} \arrow[d, "\varphi_M"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Demostración. Si h es un carácter de A, entonces $\mathbb{C} = h(A) \cong A/\ker h$. Entonces $\ker h$ es un ideal modular maximal. Si $u \in A$ es tal que $u + \ker h = 1_{A/\ker h}$, $h(a) = h(a - au) + h(au) = h(a)h(u)\ \forall a \in A$, de donde $h(u) = 1$. Entonces $h(a)$ es el único escalar λ tal que $a - h(a)u \in \ker h$, y por lo tanto h queda determinado por $\ker h$. Recíprocamente, si M es un ideal modular maximal, entonces A/M es un cuerpo, y como $M = \bar{M}$, también es un álgebra de Banach sobre $\mathbb{C}$. Luego $A/M \cong \mathbb{C}$ por el Teorema de Gelfand-Mazur. Entonces $M = \ker(h_M)$ donde $h_M = \varphi_M \circ \pi$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "h_M"'] & \frac{A}{M} \arrow[d, "\varphi_M"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Definición

Sea A un álgebra de Banach conmutativa. Se llama **espectro** *o* **espacio de Gelfand** *de A al espacio topológico $(\widehat{A}, w^*)$, donde $\widehat{A}$ es el conjunto de caracteres de A, y w^* es la topología débil $*$ de A' (el dual topológico de A).*

Teorema

Sea A un álgebra de Banach conmutativa. Entonces:

Teorema

Sea A un álgebra de Banach conmutativa. Entonces:

1. $\overline{\widehat{A}}^{w^*} \subseteq \widehat{A} \cup \{0\}$.

Teorema

Sea A un álgebra de Banach conmutativa. Entonces:

1. $\overline{\widehat{A}}^{w^*} \subseteq \widehat{A} \cup \{0\}$.
2. $\widehat{A}$ *es localmente compacto y de Hausdorff.*

Teorema

Sea A un álgebra de Banach conmutativa. Entonces:

1. $\overline{\widehat{A}}^{w^*} \subseteq \widehat{A} \cup \{0\}$.
2. $\widehat{A}$ *es localmente compacto y de Hausdorff.*
3. *Si A tiene unidad, entonces $\widehat{A}$ es compacto.*

Teorema

Sea A un álgebra de Banach conmutativa. Entonces:

1. $\overline{\widehat{A}}^{w^*} \subseteq \widehat{A} \cup \{0\}$.
2. $\widehat{A}$ *es localmente compacto y de Hausdorff.*
3. *Si A tiene unidad, entonces $\widehat{A}$ es compacto.*

Teorema

Sea A un álgebra de Banach conmutativa. Entonces:

1. $\overline{\widehat{A}}^{w^*} \subseteq \widehat{A} \cup \{0\}$.
2. $\widehat{A}$ *es localmente compacto y de Hausdorff.*
3. *Si A tiene unidad, entonces $\widehat{A}$ es compacto.*

Demostración.

Teorema

Sea A un álgebra de Banach conmutativa. Entonces:

1. $\overline{\widehat{A}}^{w^*} \subseteq \widehat{A} \cup \{0\}$.
2. $\widehat{A}$ *es localmente compacto y de Hausdorff.*
3. *Si A tiene unidad, entonces $\widehat{A}$ es compacto.*

Demostración. La primera y la tercera partes siguen de que el límite w^* de una red de homomorfismos es claramente un homomorfismo,

Teorema

Sea A un álgebra de Banach conmutativa. Entonces:

1. $\overline{\widehat{A}}^{w^*} \subseteq \widehat{A} \cup \{0\}$.
2. $\widehat{A}$ *es localmente compacto y de Hausdorff.*
3. *Si A tiene unidad, entonces $\widehat{A}$ es compacto.*

Demostración. La primera y la tercera partes siguen de que el límite w^* de una red de homomorfismos es claramente un homomorfismo, que sólo podría ser nulo si no se está en las hipótesis de (3),

Teorema

Sea A un álgebra de Banach conmutativa. Entonces:

1. $\overline{\widehat{A}}^{w^*} \subseteq \widehat{A} \cup \{0\}$.
2. $\widehat{A}$ *es localmente compacto y de Hausdorff.*
3. *Si A tiene unidad, entonces $\widehat{A}$ es compacto.*

Demostración. La primera y la tercera partes siguen de que el límite w^* de una red de homomorfismos es claramente un homomorfismo, que sólo podría ser nulo si no se está en las hipótesis de (3), y es un carácter en otro caso.

Teorema

Sea A un álgebra de Banach conmutativa. Entonces:

1. $\overline{\widehat{A}}^{w^*} \subseteq \widehat{A} \cup \{0\}$.
2. $\widehat{A}$ *es localmente compacto y de Hausdorff.*
3. *Si A tiene unidad, entonces $\widehat{A}$ es compacto.*

Demostración. La primera y la tercera partes siguen de que el límite w^* de una red de homomorfismos es claramente un homomorfismo, que sólo podría ser nulo si no se está en las hipótesis de (3), y es un carácter en otro caso. La clausura de $\widehat{A}$ es compacta y de Hausdorff, ya que está contenida en la bola unidad cerrada del dual de A, que es w^*-compacto (teorema de Alaoglu);

Teorema

Sea A un álgebra de Banach conmutativa. Entonces:

1. $\overline{\widehat{A}}^{w^*} \subseteq \widehat{A} \cup \{0\}$.
2. $\widehat{A}$ *es localmente compacto y de Hausdorff.*
3. *Si A tiene unidad, entonces $\widehat{A}$ es compacto.*

Demostración. La primera y la tercera partes siguen de que el límite w^* de una red de homomorfismos es claramente un homomorfismo, que sólo podría ser nulo si no se está en las hipótesis de (3), y es un carácter en otro caso. La clausura de $\widehat{A}$ es compacta y de Hausdorff, ya que está contenida en la bola unidad cerrada del dual de A, que es w^*-compacto (teorema de Alaoglu); si $\widehat{A}$ no es cerrado, entonces se obtiene de su clausura retirando el homomorfismo nulo, y por lo tanto es localmente compacto.

Teorema

Sea A un álgebra de Banach conmutativa. Entonces:

1. $\overline{\widehat{A}}^{w^*} \subseteq \widehat{A} \cup \{0\}$.
2. $\widehat{A}$ *es localmente compacto y de Hausdorff.*
3. *Si A tiene unidad, entonces $\widehat{A}$ es compacto.*

Demostración. La primera y la tercera partes siguen de que el límite w^* de una red de homomorfismos es claramente un homomorfismo, que sólo podría ser nulo si no se está en las hipótesis de (3), y es un carácter en otro caso. La clausura de $\widehat{A}$ es compacta y de Hausdorff, ya que está contenida en la bola unidad cerrada del dual de A, que es w^*-compacto (teorema de Alaoglu); si $\widehat{A}$ no es cerrado, entonces se obtiene de su clausura retirando el homomorfismo nulo, y por lo tanto es localmente compacto.

Observación

Notar que $\widehat{A} \neq \emptyset$ sii A admite algún ideal modular.

Teorema

Sea A un álgebra de Banach conmutativa. Entonces:

1. $\overline{\widehat{A}}^{w^*} \subseteq \widehat{A} \cup \{0\}$.
2. $\widehat{A}$ *es localmente compacto y de Hausdorff.*
3. *Si A tiene unidad, entonces $\widehat{A}$ es compacto.*

Demostración. La primera y la tercera partes siguen de que el límite w^* de una red de homomorfismos es claramente un homomorfismo, que sólo podría ser nulo si no se está en las hipótesis de (3), y es un carácter en otro caso. La clausura de $\widehat{A}$ es compacta y de Hausdorff, ya que está contenida en la bola unidad cerrada del dual de A, que es w^*-compacto (teorema de Alaoglu); si $\widehat{A}$ no es cerrado, entonces se obtiene de su clausura retirando el homomorfismo nulo, y por lo tanto es localmente compacto.

Observación

Notar que $\widehat{A} \neq \emptyset$ sii A admite algún ideal modular.

Teorema

Sea A un álgebra de Banach conmutativa. Entonces:

1. $\overline{\widehat{A}}^{w^*} \subseteq \widehat{A} \cup \{0\}$.
2. $\widehat{A}$ *es localmente compacto y de Hausdorff.*
3. *Si A tiene unidad, entonces $\widehat{A}$ es compacto.*

Demostración. La primera y la tercera partes siguen de que el límite w^* de una red de homomorfismos es claramente un homomorfismo, que sólo podría ser nulo si no se está en las hipótesis de (3), y es un carácter en otro caso. La clausura de $\widehat{A}$ es compacta y de Hausdorff, ya que está contenida en la bola unidad cerrada del dual de A, que es w^*-compacto (teorema de Alaoglu); si $\widehat{A}$ no es cerrado, entonces se obtiene de su clausura retirando el homomorfismo nulo, y por lo tanto es localmente compacto.

Observación

Notar que $\widehat{A} \neq \emptyset$ sii A admite algún ideal modular. Esto ocurre por ejemplo si A tiene unidad.

Teorema

Sea A un álgebra de Banach conmutativa. Entonces:

1. $\overline{\widehat{A}}^{w^*} \subseteq \widehat{A} \cup \{0\}$.
2. $\widehat{A}$ *es localmente compacto y de Hausdorff.*
3. *Si A tiene unidad, entonces $\widehat{A}$ es compacto.*

Demostración. La primera y la tercera partes siguen de que el límite w^* de una red de homomorfismos es claramente un homomorfismo, que sólo podría ser nulo si no se está en las hipótesis de (3), y es un carácter en otro caso. La clausura de $\widehat{A}$ es compacta y de Hausdorff, ya que está contenida en la bola unidad cerrada del dual de A, que es w^*-compacto (teorema de Alaoglu); si $\widehat{A}$ no es cerrado, entonces se obtiene de su clausura retirando el homomorfismo nulo, y por lo tanto es localmente compacto.

Observación

Notar que $\widehat{A} \neq \emptyset$ sii A admite algún ideal modular. Esto ocurre por ejemplo si A tiene unidad. Si A es un álgebra de Banach con producto nulo, entonces $\widehat{A} = \emptyset$.

Corolario

El mapa $\widehat{\widetilde{A}} \to \widehat{A} \cup \{0\}$ *dado por* $\tilde{h} \to \tilde{h}|_A$ *es un homeomorfismo.*

Corolario

El mapa $\widehat{\widetilde{A}} \to \widehat{A} \cup \{0\}$ *dado por* $\tilde{h} \to \tilde{h}|_A$ *es un homeomorfismo.*

Corolario

El mapa $\widehat{\widetilde{A}} \to \widehat{A} \cup \{0\}$ *dado por* $\tilde{h} \to \tilde{h}|_A$ *es un homeomorfismo. Por lo tanto* $\widehat{\widetilde{A}}$ *es la compactificación con un punto de* $\widehat{A}$.

Corolario

El mapa $\widehat{\widetilde{A}} \to \widehat{A} \cup \{0\}$ *dado por* $\tilde{h} \to \tilde{h}|_A$ *es un homeomorfismo. Por lo tanto* $\widehat{\widetilde{A}}$ *es la compactificación con un punto de* $\widehat{A}$*.*

Demostración.

Corolario

El mapa $\widehat{\widetilde{A}} \to \widehat{A} \cup \{0\}$ *dado por* $\tilde{h} \to \tilde{h}|_A$ *es un homeomorfismo. Por lo tanto* $\widehat{\widetilde{A}}$ *es la compactificación con un punto de* $\widehat{A}$.

Demostración. Como dominio y codominio son compactos de Hausdorff y el mapa $\tilde{h} \to \tilde{h}|_A$ es claramente biyectivo y continuo, entonces es un homeomorfismo.

Corolario

El mapa $\widehat{\tilde{A}} \to \widehat{A} \cup \{0\}$ *dado por* $\tilde{h} \to \tilde{h}|_A$ *es un homeomorfismo. Por lo tanto* $\widehat{\tilde{A}}$ *es la compactificación con un punto de* $\widehat{A}$*.*

Demostración. Como dominio y codominio son compactos de Hausdorff y el mapa $\tilde{h} \to \tilde{h}|_A$ es claramente biyectivo y continuo, entonces es un homeomorfismo. La segunda afirmación sigue del hecho de que $\widehat{A}$ es abierto en $\widehat{A} \cup \{0\}$.

Corolario

El mapa $\widehat{\widetilde{A}} \to \widehat{A} \cup \{0\}$ *dado por* $\tilde{h} \to \tilde{h}|_A$ *es un homeomorfismo. Por lo tanto* $\widehat{\widetilde{A}}$ *es la compactificación con un punto de* $\widehat{A}$*.*

Demostración. Como dominio y codominio son compactos de Hausdorff y el mapa $\tilde{h} \to \tilde{h}|_A$ es claramente biyectivo y continuo, entonces es un homeomorfismo. La segunda afirmación sigue del hecho de que $\widehat{A}$ es abierto en $\widehat{A} \cup \{0\}$.

Definición

Sean A *un álgebra de Banach y* $a \in A$*. La* **transformada de Gelfand de** a *es* $\hat{a} : \widehat{A} \to \mathbb{C}$ *tal que*

$$\hat{a}(h) := h(a), \quad \forall h \in \widehat{A}.$$

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$.

1. *Si A tiene unidad, entonces* $\sigma(a) = \overline{Im(\hat{a})} = Im(\hat{a}) = \{h(a) : h \in \widehat{A}\}$.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$.

1. *Si A tiene unidad, entonces $\sigma(a) = \overline{Im(\hat{a})} = Im(\hat{a}) = \{h(a) : h \in \widehat{A}\}$.*
2. *Si A no tiene unidad, entonces $\sigma(a) = \{h(a) : h \in \widehat{A}\} \cup \{0\}$.*
   En particular si $\widehat{A}$ no es compacto, entonces $\sigma(a) = \overline{Im(\hat{a})}$.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$.

1. *Si A tiene unidad, entonces* $\sigma(a) = \overline{Im(\hat{a})} = Im(\hat{a}) = \{h(a) : h \in \widehat{A}\}$.
2. *Si A no tiene unidad, entonces* $\sigma(a) = \{h(a) : h \in \widehat{A}\} \cup \{0\}$.
   En particular si $\widehat{A}$ no es compacto, entonces $\sigma(a) = \overline{Im(\hat{a})}$.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$.

1. *Si A tiene unidad, entonces $\sigma(a) = \overline{Im(\hat{a})} = Im(\hat{a}) = \{h(a) : h \in \widehat{A}\}$.*
2. *Si A no tiene unidad, entonces $\sigma(a) = \{h(a) : h \in \widehat{A}\} \cup \{0\}$. En particular si $\widehat{A}$ no es compacto, entonces $\sigma(a) = \overline{Im(\hat{a})}$.*

Demostración.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$.

1. *Si A tiene unidad, entonces $\sigma(a) = \overline{Im(\hat{a})} = Im(\hat{a}) = \{h(a) : h \in \widehat{A}\}$.*
2. *Si A no tiene unidad, entonces $\sigma(a) = \{h(a) : h \in \widehat{A}\} \cup \{0\}$.*
   En particular si $\widehat{A}$ no es compacto, entonces $\sigma(a) = \overline{Im(\hat{a})}$.

Demostración. La segunda afirmación se deduce de la primera y del último Corolario.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$.

1. *Si A tiene unidad, entonces $\sigma(a) = \overline{Im(\hat{a})} = Im(\hat{a}) = \{h(a) : h \in \widehat{A}\}$.*
2. *Si A no tiene unidad, entonces $\sigma(a) = \{h(a) : h \in \widehat{A}\} \cup \{0\}$.*
   En particular si $\widehat{A}$ no es compacto, entonces $\sigma(a) = \overline{Im(\hat{a})}$.

Demostración. La segunda afirmación se deduce de la primera y del último Corolario. Supongamos que A tiene unidad.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$.

1. *Si A tiene unidad, entonces $\sigma(a) = \overline{Im(\hat{a})} = Im(\hat{a}) = \{h(a) : h \in \widehat{A}\}$.*
2. *Si A no tiene unidad, entonces $\sigma(a) = \{h(a) : h \in \widehat{A}\} \cup \{0\}$.*
   En particular si $\widehat{A}$ no es compacto, entonces $\sigma(a) = \overline{Im(\hat{a})}$.

Demostración. La segunda afirmación se deduce de la primera y del último Corolario. Supongamos que A tiene unidad. Si $h \in \widehat{A}$, entonces $a - h(a) \in \ker h$, y por lo tanto no es invertible, o sea $h(a) \in \sigma(a)$.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$.

1. *Si A tiene unidad, entonces $\sigma(a) = \overline{Im(\hat{a})} = Im(\hat{a}) = \{h(a) : h \in \widehat{A}\}$.*
2. *Si A no tiene unidad, entonces $\sigma(a) = \{h(a) : h \in \widehat{A}\} \cup \{0\}$. En particular si $\widehat{A}$ no es compacto, entonces $\sigma(a) = \overline{Im(\hat{a})}$.*

Demostración. La segunda afirmación se deduce de la primera y del último Corolario. Supongamos que A tiene unidad. Si $h \in \widehat{A}$, entonces $a - h(a) \in \ker h$, y por lo tanto no es invertible, o sea $h(a) \in \sigma(a)$. Recíprocamente, si $\lambda \in \sigma(a)$, entonces $A(a - \lambda)$ es un ideal modular propio, y por lo tanto está contenido en un ideal modular maximal $M = \ker h_M$, para cierto -único- $h_M \in \widehat{A}$; luego $\lambda = h_M(a)$.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$.

1. *Si A tiene unidad, entonces $\sigma(a) = \overline{Im(\hat{a})} = Im(\hat{a}) = \{h(a) : h \in \widehat{A}\}$.*
2. *Si A no tiene unidad, entonces $\sigma(a) = \{h(a) : h \in \widehat{A}\} \cup \{0\}$. En particular si $\widehat{A}$ no es compacto, entonces $\sigma(a) = \overline{Im(\hat{a})}$.*

Demostración. La segunda afirmación se deduce de la primera y del último Corolario. Supongamos que A tiene unidad. Si $h \in \widehat{A}$, entonces $a - h(a) \in \ker h$, y por lo tanto no es invertible, o sea $h(a) \in \sigma(a)$. Recíprocamente, si $\lambda \in \sigma(a)$, entonces $A(a - \lambda)$ es un ideal modular propio, y por lo tanto está contenido en un ideal modular maximal $M = \ker h_M$, para cierto -único- $h_M \in \widehat{A}$; luego $\lambda = h_M(a)$.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$. Entonces

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$. Entonces

1. $\hat{a}$ *es continua y* $\|\hat{a}\|_\infty \leq \|a\|$.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$. Entonces

1. $\hat{a}$ *es continua y* $\|\hat{a}\|_\infty \leq \|a\|$.
2. $\hat{a} \in C_0(\widehat{A})$.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$. Entonces

1. $\hat{a}$ *es continua y* $\|\hat{a}\|_\infty \leq \|a\|$.
2. $\hat{a} \in C_0(\widehat{A})$.
3. $\mathcal{G} : A \to C_0(\widehat{A})$, *dada por* $a \mapsto \hat{a}$ *para todo* $a \in A$, *es un homomorfismo de álgebras (unital si* $A \ni 1$*).*

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$. Entonces

1. $\hat{a}$ *es continua y* $\|\hat{a}\|_\infty \leq \|a\|$.
2. $\hat{a} \in C_0(\widehat{A})$.
3. $\mathcal{G} : A \to C_0(\widehat{A})$, *dada por* $a \mapsto \hat{a}$ *para todo* $a \in A$, *es un homomorfismo de álgebras (unital si* $A \ni 1$*).*
4. $\ker(\mathcal{G}) = rad(A)$.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$. Entonces

1. $\hat{a}$ *es continua y* $\|\hat{a}\|_\infty \leq \|a\|$.
2. $\hat{a} \in C_0(\widehat{A})$.
3. $\mathcal{G} : A \to C_0(\widehat{A})$, *dada por* $a \mapsto \hat{a}$ *para todo* $a \in A$, *es un homomorfismo de álgebras (unital si* $A \ni 1$*).*
4. $\ker(\mathcal{G}) = rad(A)$.
5. $\|\hat{a}\|_\infty = r(a) = \lim_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$. Entonces

1. $\hat{a}$ *es continua y* $\|\hat{a}\|_\infty \leq \|a\|$.
2. $\hat{a} \in C_0(\widehat{A})$.
3. $\mathcal{G} : A \to C_0(\widehat{A})$, *dada por* $a \mapsto \hat{a}$ *para todo* $a \in A$, *es un homomorfismo de álgebras (unital si* $A \ni 1$*).*
4. $\ker(\mathcal{G}) = rad(A)$.
5. $\|\hat{a}\|_\infty = r(a) = \text{lím}_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$. Entonces

1. *$\hat{a}$ es continua y $\|\hat{a}\|_\infty \leq \|a\|$.*
2. *$\hat{a} \in C_0(\widehat{A})$.*
3. *$\mathcal{G} : A \to C_0(\widehat{A})$, dada por $a \mapsto \hat{a}$ para todo $a \in A$, es un homomorfismo de álgebras (unital si $A \ni 1$).*
4. $\ker(\mathcal{G}) = rad(A)$.
5. $\|\hat{a}\|_\infty = r(a) = \text{lím}_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Demostración.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$. Entonces

1. $\hat{a}$ *es continua y* $\|\hat{a}\|_\infty \leq \|a\|$.
2. $\hat{a} \in C_0(\widehat{A})$.
3. $\mathcal{G} : A \to C_0(\widehat{A})$, *dada por* $a \mapsto \hat{a}$ *para todo* $a \in A$, *es un homomorfismo de álgebras (unital si* $A \ni 1$*).*
4. $\ker(\mathcal{G}) = rad(A)$.
5. $\|\hat{a}\|_\infty = r(a) = \text{lím}_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Demostración. Las partes (1) y (3) son simples ejercicios,

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$. Entonces

1. $\hat{a}$ *es continua y* $\|\hat{a}\|_\infty \leq \|a\|$.
2. $\hat{a} \in C_0(\widehat{A})$.
3. $\mathcal{G} : A \to C_0(\widehat{A})$, *dada por* $a \mapsto \hat{a}$ *para todo* $a \in A$, *es un homomorfismo de álgebras (unital si* $A \ni 1$*).*
4. $\ker(\mathcal{G}) = rad(A)$.
5. $\|\hat{a}\|_\infty = r(a) = \text{lím}_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Demostración. Las partes (1) y (3) son simples ejercicios, y la parte (5) es consecuencia directa de la Proposición previa.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$. Entonces

1. $\hat{a}$ *es continua y* $\|\hat{a}\|_\infty \leq \|a\|$.
2. $\hat{a} \in C_0(\widehat{A})$.
3. $\mathcal{G} : A \to C_0(\widehat{A})$, *dada por* $a \mapsto \hat{a}$ *para todo* $a \in A$, *es un homomorfismo de álgebras (unital si* $A \ni 1$*).*
4. $\ker(\mathcal{G}) = rad(A)$.
5. $\|\hat{a}\|_\infty = r(a) = \text{lím}_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Demostración. Las partes (1) y (3) son simples ejercicios, y la parte (5) es consecuencia directa de la Proposición previa. Para ver (4), notar que $a \in \ker \mathcal{G}$ sii $\hat{a}(h) = 0\ \forall h \in \widehat{A}$, es decir, sii $h(a) = 0\ \forall h \in \widehat{A}$. Pero esto último es equivalente a $a \in \bigcap_{h \in \widehat{A}} \ker h = \mathrm{rad}(A)$.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$. Entonces

1. $\hat{a}$ *es continua y* $\|\hat{a}\|_\infty \leq \|a\|$.
2. $\hat{a} \in C_0(\widehat{A})$.
3. $\mathcal{G} : A \to C_0(\widehat{A})$, *dada por* $a \mapsto \hat{a}$ *para todo* $a \in A$, *es un homomorfismo de álgebras (unital si* $A \ni 1$*).*
4. $\ker(\mathcal{G}) = \mathrm{rad}(A)$.
5. $\|\hat{a}\|_\infty = r(a) = \lim_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Demostración. Las partes (1) y (3) son simples ejercicios, y la parte (5) es consecuencia directa de la Proposición previa. Para ver (4), notar que $a \in \ker \mathcal{G}$ sii $\hat{a}(h) = 0\ \forall h \in \widehat{A}$, es decir, sii $h(a) = 0\ \forall h \in \widehat{A}$. Pero esto último es equivalente a $a \in \cap_{h \in \widehat{A}} \ker h = \mathrm{rad}(A)$. La parte (2) es obvia si $\widehat{A}$ es compacto.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$. Entonces

1. $\hat{a}$ *es continua y* $\|\hat{a}\|_\infty \leq \|a\|$.
2. $\hat{a} \in C_0(\widehat{A})$.
3. $\mathcal{G} : A \to C_0(\widehat{A})$, *dada por* $a \mapsto \hat{a}$ *para todo* $a \in A$, *es un homomorfismo de álgebras (unital si* $A \ni 1$*).*
4. $\ker(\mathcal{G}) = \mathrm{rad}(A)$.
5. $\|\hat{a}\|_\infty = r(a) = \text{lím}_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Demostración. Las partes (1) y (3) son simples ejercicios, y la parte (5) es consecuencia directa de la Proposición previa. Para ver (4), notar que $a \in \ker \mathcal{G}$ sii $\hat{a}(h) = 0\ \forall h \in \widehat{A}$, es decir, sii $h(a) = 0\ \forall h \in \widehat{A}$. Pero esto último es equivalente a $a \in \cap_{h \in \widehat{A}} \ker h = \mathrm{rad}(A)$. La parte (2) es obvia si $\widehat{A}$ es compacto. Si no lo es, su compactificación con un punto es $\widehat{A} \cup \{0\}$, y si $h_i \xrightarrow{i} 0$ en la topología w^*, entonces $\hat{a}(h_i) = h_i(a) \xrightarrow{i} 0(a) = 0$, así que $\hat{a} \in C_0(\widehat{A})$.