

- 1 Repaso y complementos
- 2 Continuación de la Teoría espectral.
- 3 Transformada de Gelfand

Repaso y complementos.

- 1 Álgebras normadas, de Banach, C^* -álgebras, y sus homomorfismos.
- 2 Adjunción de la unidad.
- 3 Ideales y cocientes. Ideales y núcleos de homomorfismos.
- 4 Ideales modulares. Todo ideal modular está contenido en un ideal modular maximal, y todo ideal modular maximal es un ideal maximal.
- 5 La intersección de los ideales modulares maximales de un anillo es un ideal que se llama *radical (de Jacobson)* del anillo, y se denota $\text{rad}(A)$.
- 6 Si $\text{rad}(A) = 0$, se dice que A es *semisimple*. El cociente $A/\text{rad}(A)$ es semisimple.
- 7 El conjunto $\text{Inv}(A)$ de elementos invertibles de un álgebra de Banach unital A es un subconjunto abierto de A , y además es un grupo topológico con las operaciones y topología heredadas de A .
- 8 Corolario: si J es un ideal propio (no necesariamente cerrado) de un álgebra de Banach unital, entonces \bar{J} también es un ideal propio.
- 9 Espectro (y resolvente) de un elemento de un álgebra.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach con unidad, y $a \in A$.

- 1 Si $\phi : A \rightarrow B$ es unital, entonces $\sigma_B(\phi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$.
- 2 Si $h : A \rightarrow \mathbb{C}$ es un homomorfismo no nulo, entonces $h(a) \in \sigma(a)$.
- 3 Si $p \in \mathbb{C}[X]$, entonces $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$.

Demostración. Si $w \in \mathbb{C}$ entonces

$$p(X) - w = \beta(X - r_1)(X - r_2) \cdots (X - r_n).$$

Por lo tanto es $p(r_i) = w$, $\forall i$, y

$$p(a) - w = \beta(a - r_1)(a - r_2) \cdots (a - r_n).$$

Los factores conmutan entre sí, de modo que su producto es invertible sii cada uno de ellos es invertible. En otras palabras: $w \in \sigma(p(a))$ sii existe $r_i \in \sigma(a)$. Es decir $w \in \sigma(p(a)) \iff w \in p(\sigma(a))$.

Proposición

La función resolvente $R_a : \mathbb{C} \setminus \sigma(a) \rightarrow \text{Inv}(A)$, definida como $R_a(z) = (z - a)^{-1}$, es holomorfa, y $\lim_{z \rightarrow \infty} R_a(z) = 0$. Además si $|z| > \|a\|$ se tiene: $R_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}}$.

Demostración. $R_a(z) - R_a(z_0) = (z - a)^{-1} - (z_0 - a)^{-1}$
 $= (z - a)^{-1}((z_0 - a) - (z - a))(z_0 - a)^{-1} = -(z - z_0)R_a(z)R_a(z_0)$,
y por lo tanto $R'_a(z_0) = -R_a(z_0)^2$.

Si $|z| > \|a\|$, entonces $1 > \|1 - (1 - \frac{a}{z})\|$, así que $(1 - \frac{a}{z}) \in \text{Inv}(A)$,
y $(1 - \frac{a}{z})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^n}$, de donde $(z - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}}$.

Por último, si $|z| > \|a\|$: $\|R_a(z)\| \leq \frac{1}{|z|} \sum_{n \geq 0} \frac{\|a\|^n}{|z|^n} = \frac{1}{|z| - \|a\|} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$.

Teorema (Gelfand)

Sean A un álgebra de Banach y $a \in A$. Entonces $\sigma(a) \subseteq \bar{D}(0, \|a\|)$, es compacto y no vacío.

Demostración.

- 1 $\sigma(a) \subseteq \bar{D}(0, \|a\|)$ por la Proposición previa. Además, si $\Lambda_a : \mathbb{C} \rightarrow A$ está dada por $\Lambda_a(z) = a - z$, entonces $\sigma(a) = \Lambda_a^{-1}(A \setminus \text{Inv}(A))$, y por lo tanto $\sigma(a)$ es cerrado. Sigue que $\sigma(a)$ es compacto.
- 2 Si fuera $\sigma(a) = \emptyset$, entonces $R_a = 0$ por el teorema de Liouville y la Proposición anterior.

Corolario (Gelfand-Mazur)

Si A es un álgebra normada con división, entonces $A = \mathbb{C} \cdot 1_A$.

Demostración. Para cada $a \in A$ existe un único $\lambda_a \in \mathbb{C}$ tal que $(a - \lambda_a) \notin \text{Inv}(A)$. El mapa $a \mapsto \lambda_a$ es entonces un isomorfismo.

Ejemplo (El Shift bilateral)

Sea $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ tal que $U\xi(n) = \xi(n-1)$, $\forall \xi \in \ell^2$, $n \in \mathbb{Z}$.

U es un operador unitario, pues es una isometría invertible.

Entonces $\|U\| = 1 = \|U^{-1}\|$, de donde $\sigma(U), \sigma(U^{-1}) \subseteq \bar{D}(0, 1)$.

Si $z \in \sigma(U)$, entonces $z \neq 0$ y se deduce que $z^{-1} \in \sigma(U^{-1})$, pues

$$zU(U^{-1} - z^{-1}) = z - U,$$

que no es invertible, de modo que $z^{-1} \in \sigma(U^{-1})$.

Por lo tanto $z, z^{-1} \in \bar{D}(0, 1)$, de donde $z \in S^1$. Entonces $\sigma(U) \subseteq S^1$.

Para cada $w \in S^1$, sea $M_w : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ tal que $M_w\xi(n) = w^n\xi(n)$, $\forall \xi, \forall n$. Entonces M_w es un operador unitario, cuyo inverso es $M_{\bar{w}}$.

Ahora, $\alpha_w : B(\ell^2(\mathbb{Z})) \rightarrow B(\ell^2(\mathbb{Z}))$ dado por $\alpha_w(T) := M_w T M_{\bar{w}}$ es un automorfismo, y por lo tanto $\sigma(\alpha_w(T)) = \sigma(T)$, $\forall T \in B(\ell^2(\mathbb{Z}))$. Como $\alpha_w(U) = wU$, entonces $\sigma(U) = \sigma(wU) = w\sigma(U)$, y como $\sigma(U) \neq \emptyset$ y lo anterior vale para todo $w \in S^1$, entonces $\sigma(U) = S^1$.

Definición (radio espectral)

Sean A un álgebra de Banach y $a \in A$. El radio espectral de a es

$$r(a) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Ejemplo

El operador de Volterra $V : L^p([0, 1]) \rightarrow L^p([0, 1])$ tal que

$$V(f)(t) = \int_0^t f(s) ds$$

es no nulo, pero $r(V) = 0$.

(ver detalles en Conway, *Example 6.14*, page 211).

Teorema (Beurling-Gelfand)

Si A es un álgebra de Banach y $a \in A$, entonces

$$r(a) = \inf_n \|a^n\|^{1/n} = \lim_n \|a^n\|^{1/n}$$

Demostración.

- $\sigma(a^n) = \sigma(a)^n \Rightarrow r(a^n) = r(a)^n \leq \|a^n\| \Rightarrow r(a) \leq \inf \|a^n\|^{1/n}$.
- Si $S_a : D(0, \frac{1}{r(a)}) \rightarrow A$ tal que $S_a(z) = \begin{cases} R_a(\frac{1}{z}) & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$
- Entonces $S_a(z) = \sum_{n \geq 0} a^n z^{n+1} \quad \forall z / |z| < \frac{1}{\limsup_n \|a^n\|^{1/n}}$, de donde $\frac{1}{r(a)} \leq \frac{1}{\limsup_n \|a^n\|^{1/n}}$.
- Por lo tanto $\limsup_n \|a^n\|^{1/n} \leq r(a) \leq \inf \|a^n\|^{1/n} \leq \liminf_n \|a^n\|^{1/n}$.



Transformada de Fourier en $A = L^1(\mathbb{R})$

- Convolución: $a * b(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} a(t-s)b(s)ds$.
- Involución: $a^*(t) := \overline{a(-t)}$
- Transformada de $a \in A$ en $t \in \mathbb{R}$: $\hat{a}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} a(s)e^{-its} ds$. El mapa $h_t : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $a \mapsto \hat{a}(t)$ es un homomorfismo de álgebras.
- $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{F}(a) := \hat{a}$.

Transformada de Fourier en $A = L^1(S^1)$

- Convolución: $a * b(z) = \int_{S^1} a(w^{-1}z)b(w)dw$.
- Involución: $a^*(z) := \overline{a(z^{-1})}$
- Transformada de $a \in A$ en $n \in \mathbb{Z}$: $\hat{a}(n) = \int_{S^1} a(w)w^{-n}dw$. El mapa $h_n : L^1(S^1) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $a \mapsto \hat{a}(n)$ es un homomorfismo de álgebras.
- $\mathcal{F} : L^1(S^1) \rightarrow C_0(\mathbb{Z})$ tal que $\mathcal{F}(a) := \hat{a}$.

Transformada de Fourier en $A = \ell^1(\mathbb{Z})$

- Convolución: $a * b(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a(n - m)b(m)$.
- Involución: $a^*(n) := \overline{a(-n)}$
- Transformada de $a \in A$ en $z \in S^1$: $\hat{a}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n)z^{-n}$. El mapa $h_z : L^1(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $a \mapsto \hat{a}(z)$ es un homomorfismo de álgebras.
- $\mathcal{F} : \ell^1(\mathbb{Z}) \rightarrow C(S^1)$ tal que $\mathcal{F}(a) := \hat{a}$ (notar que $\mathcal{F}(\ell^1(\mathbb{Z})) = \mathcal{W}$).

En los tres casos las transformadas de Fourier se pueden ver como las colecciones continuas de homomorfismos h_t , h_n y h_z respectivamente. La transformada de Gelfand generaliza esto para álgebras de Banach conmutativas.

Teorema

Si A es un álgebra de Banach y $h : A \rightarrow \mathbb{C}$ es un homomorfismo no nulo de álgebras, entonces $\|h\| \leq 1$, y si A tiene unidad, entonces $h(1) = 1 = \|h\|$.

Demostración. Se puede suponer que A tiene unidad. Si $\|a\| \leq 1$ y $|h(a)| > 1$, entonces $1 - a/h(a) \in \text{Inv}(A)$. Sea b el inverso. Como $h \neq 0$ debe ser

$$1 = h(1) = h(b(1 - a/h(a))) = h(b)(1 - h(a)/h(a)) = 0.$$

Absurdo. Luego $\|h\| \leq 1$.

Definición

Un homomorfismo complejo no nulo de un álgebra sobre \mathbb{C} se llama **carácter**.

Lema

La clausura de un ideal modular propio M de un álgebra de Banach A es también modular propio. Todo ideal modular maximal de un álgebra de Banach es cerrado.

Demostración. Sea $u \in A$ tal que $u + M = 1_{A/M}$. Entonces $a - au \in M, \forall a \in A$. Supongamos que $x \in M$ es tal que $\|u - x\| < 1$. Entonces $b := 1 - u + x \in \text{Inv}(\tilde{A})$, y por lo tanto

$$A = Ab = \{a - au + ax : a \in A\} \subseteq M.$$

Como M es propio, no puede existir un tal x , es decir: $\|u - x\| \geq 1, \forall x \in M$. Esto implica que $u \notin \bar{M}$, y por lo tanto \bar{M} es propio. La segunda afirmación es consecuencia directa de la primera.

Proposición

Sea A un álgebra de Banach conmutativa. El mapa $h \mapsto \ker h$ es una biyección entre el conjunto de caracteres de A y el conjunto de ideales modulares maximales de A .

Demostración. Si h es un carácter de A , entonces $\mathbb{C} = h(A) \cong A/\ker h$. Entonces $\ker h$ es un ideal modular maximal. Si $u \in A$ es tal que $u + \ker h = 1_{A/\ker h}$, $h(a) = h(a - au) + h(au) = h(a)h(u) \forall a \in A$, de donde $h(u) = 1$. Entonces $h(a)$ es el único escalar λ tal que $a - h(a)u \in \ker h$, y por lo tanto h queda determinado por $\ker h$. Recíprocamente, si M es un ideal modular maximal, entonces A/M es un cuerpo, y como $M = \bar{M}$, también es un álgebra de Banach sobre \mathbb{C} . Luego $A/M \cong \mathbb{C}$ por el Teorema de Gelfand-Mazur. Entonces $M = \ker(h_M)$ donde $h_M = \varphi_M \circ \pi$.

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\pi} & \frac{A}{M} \\
 & \searrow h_M & \downarrow \varphi_M \\
 & & \mathbb{C}
 \end{array}$$

Definición

Sea A un álgebra de Banach conmutativa. Se llama **espectro** o **espacio de Gelfand** de A al espacio topológico (\hat{A}, w^*) , donde \hat{A} es el conjunto de caracteres de A , y w^* es la topología débil $*$ de A' (el dual topológico de A).

Teorema

Sea A un álgebra de Banach conmutativa. Entonces:

- 1 $\widehat{A}^{w^*} \subseteq \widehat{A} \cup \{0\}$.
- 2 \widehat{A} es localmente compacto y de Hausdorff.
- 3 Si A tiene unidad, entonces \widehat{A} es compacto.

Demostración. La primera y la tercera partes siguen de que el límite w^* de una red de homomorfismos es claramente un homomorfismo, que sólo podría ser nulo si no se está en las hipótesis de (3), y es un carácter en otro caso. La clausura de \widehat{A} es compacta y de Hausdorff, ya que está contenida en la bola unidad cerrada del dual de A , que es w^* -compacto (teorema de Alaoglu); si \widehat{A} no es cerrado, entonces se obtiene de su clausura retirando el homomorfismo nulo, y por lo tanto es localmente compacto.

Observación

Notar que $\widehat{A} \neq \emptyset$ si A admite algún ideal modular. Esto ocurre por ejemplo si A tiene unidad. Si A es un álgebra de Banach con producto nulo, entonces $\widehat{A} = \emptyset$.

Corolario

El mapa $\widehat{\tilde{A}} \rightarrow \widehat{A} \cup \{0\}$ dado por $\tilde{h} \rightarrow \tilde{h}|_A$ es un homeomorfismo. Por lo tanto $\widehat{\tilde{A}}$ es la compactificación con un punto de \widehat{A} .

Demostración. Como dominio y codominio son compactos de Hausdorff y el mapa $\tilde{h} \rightarrow \tilde{h}|_A$ es claramente biyectivo y continuo, entonces es un homeomorfismo. La segunda afirmación sigue del hecho de que \widehat{A} es abierto en $\widehat{A} \cup \{0\}$.

Definición

Sean A un álgebra de Banach y $a \in A$. La **transformada de Gelfand de a** es $\hat{a} : \widehat{A} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\hat{a}(h) := h(a), \quad \forall h \in \widehat{A}.$$

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$.

- 1 Si A tiene unidad, entonces $\sigma(a) = \overline{Im(\hat{a})} = Im(\hat{a}) = \{h(a) : h \in \hat{A}\}$.
- 2 Si A no tiene unidad, entonces $\sigma(a) = \{h(a) : h \in \hat{A}\} \cup \{0\}$.
En particular si \hat{A} no es compacto, entonces $\sigma(a) = \overline{Im(\hat{a})}$.

Demostración. La segunda afirmación se deduce de la primera y del último Corolario. Supongamos que A tiene unidad. Si $h \in \hat{A}$, entonces $a - h(a) \in \ker h$, y por lo tanto no es invertible, o sea $h(a) \in \sigma(a)$. Recíprocamente, si $\lambda \in \sigma(a)$, entonces $A(a - \lambda)$ es un ideal modular propio, y por lo tanto está contenido en un ideal modular maximal $M = \ker h_M$, para cierto -único- $h_M \in \hat{A}$; luego $\lambda = h_M(a)$.

Proposición

Sean A un álgebra de Banach conmutativa y $a \in A$. Entonces

- 1 \hat{a} es continua y $\|\hat{a}\|_\infty \leq \|a\|$.
- 2 $\hat{a} \in C_0(\hat{A})$.
- 3 $\mathcal{G} : A \rightarrow C_0(\hat{A})$, dada por $a \mapsto \hat{a}$ para todo $a \in A$, es un homomorfismo de álgebras (unital si $A \ni 1$).
- 4 $\ker(\mathcal{G}) = \text{rad}(A)$.
- 5 $\|\hat{a}\|_\infty = r(a) = \lim_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Demostración. Las partes (1) y (3) son simples ejercicios, y la parte (5) es consecuencia directa de la Proposición previa. Para ver (4), notar que $a \in \ker \mathcal{G}$ sii $\hat{a}(h) = 0 \forall h \in \hat{A}$, es decir, sii $h(a) = 0 \forall h \in \hat{A}$. Pero esto último es equivalente a $a \in \bigcap_{h \in \hat{A}} \ker h = \text{rad}(A)$. La parte (2) es obvia si \hat{A} es compacto. Si no lo es, su compactificación con un punto es $\hat{A} \cup \{0\}$, y si $h_i \xrightarrow{i} 0$ en la topología w^* , entonces $\hat{a}(h_i) = h_i(a) \xrightarrow{i} 0(a) = 0$, así que $\hat{a} \in C_0(\hat{A})$.