1. Espacio de ideales primitivos y espectro de una C*-álgebra
   - Representaciones irreducibles de $K(\mathcal{H})$
   - Espacio de ideales primitivos
   - Espectro de una C*-álgebra

1. Espacio de ideales primitivos y espectro de una C*-álgebra
   - Representaciones irreducibles de $K(\mathcal{H})$
   - Espacio de ideales primitivos
   - Espectro de una C*-álgebra

2. Un par de Ejemplos
   - $M_n(C(X))$
   - Álgebra de Toeplitz $\mathcal{T}$

Representaciones irreducibles de K($\mathcal{H}$)

Lema

Dados $\xi, \eta \in \mathcal{H}$,

Representaciones irreducibles de K($\mathcal{H}$)

Lema

Dados $\xi, \eta \in \mathcal{H}$,

Representaciones irreducibles de K($\mathcal{H}$)

Lema

Dados $\xi, \eta \in \mathcal{H}$*, sea* $\theta_{\xi,\eta} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *dada por*

Representaciones irreducibles de K($\mathcal{H}$)

Lema

Dados $\xi, \eta \in \mathcal{H}$*, sea* $\theta_{\xi,\eta} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *dada por*

$$\theta_{\xi,\eta}(\zeta) = \langle \zeta, \eta \rangle \xi.$$

Representaciones irreducibles de K($\mathcal{H}$)

Lema

Dados $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, *sea* $\theta_{\xi,\eta} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *dada por*

$$\theta_{\xi,\eta}(\zeta) = \langle \zeta, \eta \rangle \xi.$$

Entonces

Representaciones irreducibles de $K(\mathcal{H})$

Lema

Dados $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, *sea* $\theta_{\xi,\eta} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *dada por*

$$\theta_{\xi,\eta}(\zeta) = \langle \zeta, \eta \rangle \xi.$$

Entonces

(i) *Si* $\xi, \eta \neq 0$, *entonces* $\theta_{\xi,\eta}$ *es un operador de rango 1 y* $\|\theta_{\xi,\eta}\| = \|\xi\| \, \|\eta\|$.

Representaciones irreducibles de $K(\mathcal{H})$

Lema

Dados $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, *sea* $\theta_{\xi,\eta} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *dada por*

$$\theta_{\xi,\eta}(\zeta) = \langle \zeta, \eta \rangle \xi.$$

Entonces

(i) *Si* $\xi, \eta \neq 0$, *entonces* $\theta_{\xi,\eta}$ *es un operador de rango 1 y* $\|\theta_{\xi,\eta}\| = \|\xi\| \, \|\eta\|$.

(ii) *Todo operador de rango* $n \in \mathbb{Z}^+$ *es combinación lineal de* n *operadores* $\theta_{\xi,\eta}$.

Representaciones irreducibles de $K(\mathcal{H})$

Lema

Dados $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, *sea* $\theta_{\xi,\eta} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *dada por*

$$\theta_{\xi,\eta}(\zeta) = \langle \zeta, \eta \rangle \xi.$$

Entonces

(i) *Si* $\xi, \eta \neq 0$, *entonces* $\theta_{\xi,\eta}$ *es un operador de rango 1 y* $\|\theta_{\xi,\eta}\| = \|\xi\| \, \|\eta\|$.

(ii) *Todo operador de rango* $n \in \mathbb{Z}^+$ *es combinación lineal de* n *operadores* $\theta_{\xi,\eta}$.

(iii) $K(\mathcal{H}) = \overline{\operatorname{span}}\{\theta_{\xi,\eta} : \xi, \eta \in \mathcal{H}\}$.

Representaciones irreducibles de $\mathrm{K}(\mathcal{H})$

Lema

Dados $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, *sea* $\theta_{\xi,\eta} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *dada por*

$$\theta_{\xi,\eta}(\zeta) = \langle \zeta, \eta \rangle \xi.$$

Entonces

(i) *Si* $\xi, \eta \neq 0$, *entonces* $\theta_{\xi,\eta}$ *es un operador de rango 1 y* $\|\theta_{\xi,\eta}\| = \|\xi\| \, \|\eta\|$.

(ii) *Todo operador de rango* $n \in \mathbb{Z}^+$ *es combinación lineal de* n *operadores* $\theta_{\xi,\eta}$.

(iii) $\mathrm{K}(\mathcal{H}) = \overline{\mathrm{span}}\{\theta_{\xi,\eta} : \xi, \eta \in \mathcal{H}\}$.

(iv) $\theta^*_{\xi,\eta} = \theta_{\eta,\xi}$, *y el mapa* $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathrm{K}(\mathcal{H})$ *tal que* $(\xi, \eta) \mapsto \theta_{\xi,\eta}$ *es sesquilineal.*

Representaciones irreducibles de $\mathrm{K}(\mathcal{H})$

Lema

Dados $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, sea $\theta_{\xi,\eta} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dada por

$$\theta_{\xi,\eta}(\zeta) = \langle \zeta, \eta \rangle \xi.$$

Entonces

(i) *Si $\xi, \eta \neq 0$, entonces $\theta_{\xi,\eta}$ es un operador de rango 1 y $\|\theta_{\xi,\eta}\| = \|\xi\| \, \|\eta\|$.*

(ii) *Todo operador de rango $n \in \mathbb{Z}^+$ es combinación lineal de n operadores $\theta_{\xi,\eta}$.*

(iii) $\mathrm{K}(\mathcal{H}) = \overline{\mathrm{span}}\{\theta_{\xi,\eta} : \xi, \eta \in \mathcal{H}\}$.

(iv) $\theta^*_{\xi,\eta} = \theta_{\eta,\xi}$, *y el mapa $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathrm{K}(\mathcal{H})$ tal que $(\xi, \eta) \mapsto \theta_{\xi,\eta}$ es sesquilineal.*

(v) $T\theta_{\xi,\eta} = \theta_{T\xi,\eta}$ *y* $\theta_{\xi,\eta}T = \theta_{\xi,T^*\eta}$, *para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$.*

Representaciones irreducibles de $\mathrm{K}(\mathcal{H})$

Lema

Dados $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, sea $\theta_{\xi,\eta} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dada por

$$\theta_{\xi,\eta}(\zeta) = \langle \zeta, \eta \rangle \xi.$$

Entonces

(i) *Si $\xi, \eta \neq 0$, entonces $\theta_{\xi,\eta}$ es un operador de rango 1 y $\|\theta_{\xi,\eta}\| = \|\xi\| \, \|\eta\|$.*

(ii) *Todo operador de rango $n \in \mathbb{Z}^+$ es combinación lineal de n operadores $\theta_{\xi,\eta}$.*

(iii) $\mathrm{K}(\mathcal{H}) = \overline{\mathrm{span}}\{\theta_{\xi,\eta} : \xi, \eta \in \mathcal{H}\}$.

(iv) $\theta^*_{\xi,\eta} = \theta_{\eta,\xi}$, *y el mapa $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathrm{K}(\mathcal{H})$ tal que $(\xi, \eta) \mapsto \theta_{\xi,\eta}$ es sesquilineal.*

(v) $T\theta_{\xi,\eta} = \theta_{T\xi,\eta}$ *y* $\theta_{\xi,\eta}T = \theta_{\xi,T^*\eta}$, *para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$.*

(vi) $\theta_{\xi,\eta}\theta_{\xi',\eta'} = \langle \xi', \eta \rangle \theta_{\xi,\eta'}$ *para todos $\xi, \xi', \eta, \eta' \in \mathcal{H}$.*

Representaciones irreducibles de $\mathrm{K}(\mathcal{H})$

Lema

Dados $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, sea $\theta_{\xi,\eta} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dada por

$$\theta_{\xi,\eta}(\zeta) = \langle \zeta, \eta \rangle \xi.$$

Entonces

(i) *Si $\xi, \eta \neq 0$, entonces $\theta_{\xi,\eta}$ es un operador de rango 1 y $\|\theta_{\xi,\eta}\| = \|\xi\| \, \|\eta\|$.*

(ii) *Todo operador de rango $n \in \mathbb{Z}^+$ es combinación lineal de n operadores $\theta_{\xi,\eta}$.*

(iii) $\mathrm{K}(\mathcal{H}) = \overline{\mathrm{span}}\{\theta_{\xi,\eta} : \xi, \eta \in \mathcal{H}\}$.

(iv) $\theta^*_{\xi,\eta} = \theta_{\eta,\xi}$, *y el mapa $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathrm{K}(\mathcal{H})$ tal que $(\xi, \eta) \mapsto \theta_{\xi,\eta}$ es sesquilineal.*

(v) $T\theta_{\xi,\eta} = \theta_{T\xi,\eta}$ *y* $\theta_{\xi,\eta} T = \theta_{\xi,T^*\eta}$, *para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$.*

(vi) $\theta_{\xi,\eta}\theta_{\xi',\eta'} = \langle \xi', \eta \rangle \theta_{\xi,\eta'}$ *para todos $\xi, \xi', \eta, \eta' \in \mathcal{H}$.*

(vii) $\theta_{\xi,\xi} \in \mathrm{K}(\mathcal{H})^+$, *y $\theta_{\xi,\xi} = 0$ si y sólo si $\xi = 0$.*

Demostración.

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta, \eta\rangle\xi\|$

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta, \eta\rangle\xi\|$

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta,\eta\rangle\xi\| = |\langle\zeta,\eta\rangle|\,\|\xi\|$

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta,\eta\rangle\xi\| = |\langle\zeta,\eta\rangle| \,\|\xi\| \leq \|\zeta\| \,\|\eta\| \,\|\xi\|$.

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta,\eta\rangle\xi\| = |\langle\zeta,\eta\rangle|\,\|\xi\| \leq \|\zeta\|\,\|\eta\|\,\|\xi\|$. Entonces $\|\theta_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$.

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta,\eta\rangle\xi\| = |\langle\zeta,\eta\rangle|\,\|\xi\| \leq \|\zeta\|\,\|\eta\|\,\|\xi\|$. Entonces $\|\theta_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$. Además $\theta_{\xi,\eta}(\frac{\eta}{\|\eta\|}) = \|\xi\|\,\|\eta\|$.

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta,\eta\rangle\xi\| = |\langle\zeta,\eta\rangle|\,\|\xi\| \leq \|\zeta\|\,\|\eta\|\,\|\xi\|$. Entonces $\|\theta_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$. Además $\theta_{\xi,\eta}(\frac{\eta}{\|\eta\|}) = \|\xi\|\,\|\eta\|$. Es claro que $\mathrm{Im}(\theta_{\xi,\eta}) = \mathbb{C}\xi$, de modo que $\theta_{\xi,\eta}$ es de rango 1.

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta,\eta\rangle\xi\| = |\langle\zeta,\eta\rangle| \, \|\xi\| \leq \|\zeta\| \, \|\eta\| \, \|\xi\|$. Entonces $\|\theta_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\| \|\eta\|$. Además $\theta_{\xi,\eta}(\frac{\eta}{\|\eta\|}) = \|\xi\| \, \|\eta\|$. Es claro que $\mathrm{Im}(\theta_{\xi,\eta}) = \mathbb{C}\xi$, de modo que $\theta_{\xi,\eta}$ es de rango 1.

(ii) Si $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathrm{Im}\, T$ es de dimensión n, sea $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ una base ortonormal de $\mathrm{Im}\, T$.

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta,\eta\rangle\xi\| = |\langle\zeta,\eta\rangle|\,\|\xi\| \leq \|\zeta\|\,\|\eta\|\,\|\xi\|$. Entonces $\|\theta_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$. Además $\theta_{\xi,\eta}(\frac{\eta}{\|\eta\|}) = \|\xi\|\,\|\eta\|$. Es claro que $\mathrm{Im}(\theta_{\xi,\eta}) = \mathbb{C}\xi$, de modo que $\theta_{\xi,\eta}$ es de rango 1.

(ii) Si $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathrm{Im}\,T$ es de dimensión n, sea $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ una base ortonormal de $\mathrm{Im}\,T$.

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta,\eta\rangle\xi\| = |\langle\zeta,\eta\rangle|\,\|\xi\| \leq \|\zeta\|\,\|\eta\|\,\|\xi\|$. Entonces $\|\theta_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$. Además $\theta_{\xi,\eta}(\frac{\eta}{\|\eta\|}) = \|\xi\|\,\|\eta\|$. Es claro que $\mathrm{Im}(\theta_{\xi,\eta}) = \mathbb{C}\xi$, de modo que $\theta_{\xi,\eta}$ es de rango 1.

(ii) Si $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathrm{Im}\,T$ es de dimensión n, sea $\{\eta_1,\ldots,\eta_n\}$ una base ortonormal de $\mathrm{Im}\,T$. Entonces, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta,\eta\rangle\xi\| = |\langle\zeta,\eta\rangle|\,\|\xi\| \leq \|\zeta\|\,\|\eta\|\,\|\xi\|$. Entonces $\|\theta_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$. Además $\theta_{\xi,\eta}(\frac{\eta}{\|\eta\|}) = \|\xi\|\,\|\eta\|$. Es claro que $\mathrm{Im}(\theta_{\xi,\eta}) = \mathbb{C}\xi$, de modo que $\theta_{\xi,\eta}$ es de rango 1.

(ii) Si $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathrm{Im}\,T$ es de dimensión n, sea $\{\eta_1,\ldots,\eta_n\}$ una base ortonormal de $\mathrm{Im}\,T$. Entonces, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

$$T\zeta = \sum_{j=1}^{n}\langle T\zeta,\eta_j\rangle\eta_j$$

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta,\eta\rangle\xi\| = |\langle\zeta,\eta\rangle|\,\|\xi\| \leq \|\zeta\|\,\|\eta\|\,\|\xi\|$. Entonces $\|\theta_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$. Además $\theta_{\xi,\eta}(\frac{\eta}{\|\eta\|}) = \|\xi\|\,\|\eta\|$. Es claro que $\mathrm{Im}(\theta_{\xi,\eta}) = \mathbb{C}\xi$, de modo que $\theta_{\xi,\eta}$ es de rango 1.

(ii) Si $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathrm{Im}\,T$ es de dimensión n, sea $\{\eta_1,\ldots,\eta_n\}$ una base ortonormal de $\mathrm{Im}\,T$. Entonces, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

$$T\zeta = \sum_{j=1}^n \langle T\zeta,\eta_j\rangle\eta_j = \sum_{j=1}^n \langle \zeta, T^*\eta_j\rangle\eta_j$$

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta,\eta\rangle\xi\| = |\langle\zeta,\eta\rangle|\,\|\xi\| \leq \|\zeta\|\,\|\eta\|\,\|\xi\|$. Entonces $\|\theta_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$. Además $\theta_{\xi,\eta}(\frac{\eta}{\|\eta\|}) = \|\xi\|\,\|\eta\|$. Es claro que $\mathrm{Im}(\theta_{\xi,\eta}) = \mathbb{C}\xi$, de modo que $\theta_{\xi,\eta}$ es de rango 1.

(ii) Si $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathrm{Im}\,T$ es de dimensión n, sea $\{\eta_1,\ldots,\eta_n\}$ una base ortonormal de $\mathrm{Im}\,T$. Entonces, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

$$T\zeta = \sum_{j=1}^n \langle T\zeta,\eta_j\rangle\eta_j = \sum_{j=1}^n \langle\zeta, T^*\eta_j\rangle\eta_j = \left(\sum_{j=1}^n \theta_{\eta_j,T^*\eta_j}\right)\zeta.$$

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta,\eta\rangle\xi\| = |\langle\zeta,\eta\rangle|\,\|\xi\| \leq \|\zeta\|\,\|\eta\|\,\|\xi\|$. Entonces $\|\theta_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$. Además $\theta_{\xi,\eta}(\frac{\eta}{\|\eta\|}) = \|\xi\|\,\|\eta\|$. Es claro que $\mathrm{Im}(\theta_{\xi,\eta}) = \mathbb{C}\xi$, de modo que $\theta_{\xi,\eta}$ es de rango 1.

(ii) Si $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathrm{Im}\,T$ es de dimensión n, sea $\{\eta_1,\ldots,\eta_n\}$ una base ortonormal de $\mathrm{Im}\,T$. Entonces, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

$$T\zeta = \sum_{j=1}^{n}\langle T\zeta,\eta_j\rangle\eta_j = \sum_{j=1}^{n}\langle\zeta, T^*\eta_j\rangle\eta_j = \left(\sum_{j=1}^{n}\theta_{\eta_j,T^*\eta_j}\right)\zeta.$$

(iii) Los operadores de rango finito son densos en K.

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta,\eta\rangle\xi\| = |\langle\zeta,\eta\rangle|\,\|\xi\| \leq \|\zeta\|\,\|\eta\|\,\|\xi\|$. Entonces $\|\theta_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$. Además $\theta_{\xi,\eta}(\frac{\eta}{\|\eta\|}) = \|\xi\|\,\|\eta\|$. Es claro que $\mathrm{Im}(\theta_{\xi,\eta}) = \mathbb{C}\xi$, de modo que $\theta_{\xi,\eta}$ es de rango 1.

(ii) Si $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathrm{Im}\,T$ es de dimensión n, sea $\{\eta_1,\ldots,\eta_n\}$ una base ortonormal de $\mathrm{Im}\,T$. Entonces, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

$$T\zeta = \sum_{j=1}^n \langle T\zeta,\eta_j\rangle\eta_j = \sum_{j=1}^n \langle\zeta, T^*\eta_j\rangle\eta_j = \left(\sum_{j=1}^n \theta_{\eta_j,T^*\eta_j}\right)\zeta.$$

(iii) Los operadores de rango finito son densos en K.

(iv) $\langle\theta_{\xi,\eta}\zeta,\zeta'\rangle$

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta,\eta\rangle\xi\| = |\langle\zeta,\eta\rangle|\,\|\xi\| \le \|\zeta\|\,\|\eta\|\,\|\xi\|$. Entonces $\|\theta_{\xi,\eta}\| \le \|\xi\|\|\eta\|$. Además $\theta_{\xi,\eta}(\frac{\eta}{\|\eta\|}) = \|\xi\|\,\|\eta\|$. Es claro que $\operatorname{Im}(\theta_{\xi,\eta}) = \mathbb{C}\xi$, de modo que $\theta_{\xi,\eta}$ es de rango 1.

(ii) Si $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\operatorname{Im} T$ es de dimensión n, sea $\{\eta_1,\ldots,\eta_n\}$ una base ortonormal de $\operatorname{Im} T$. Entonces, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

$$T\zeta = \sum_{j=1}^{n}\langle T\zeta,\eta_j\rangle\eta_j = \sum_{j=1}^{n}\langle\zeta, T^*\eta_j\rangle\eta_j = \left(\sum_{j=1}^{n}\theta_{\eta_j,T^*\eta_j}\right)\zeta.$$

(iii) Los operadores de rango finito son densos en K.

(iv) $\langle\theta_{\xi,\eta}\zeta,\zeta'\rangle$

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta,\eta\rangle\xi\| = |\langle\zeta,\eta\rangle|\,\|\xi\| \leq \|\zeta\|\,\|\eta\|\,\|\xi\|$. Entonces $\|\theta_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$. Además $\theta_{\xi,\eta}(\frac{\eta}{\|\eta\|}) = \|\xi\|\,\|\eta\|$. Es claro que $\mathrm{Im}(\theta_{\xi,\eta}) = \mathbb{C}\xi$, de modo que $\theta_{\xi,\eta}$ es de rango 1.

(ii) Si $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathrm{Im}\,T$ es de dimensión n, sea $\{\eta_1,\dots,\eta_n\}$ una base ortonormal de $\mathrm{Im}\,T$. Entonces, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

$$T\zeta = \sum_{j=1}^{n}\langle T\zeta,\eta_j\rangle\eta_j = \sum_{j=1}^{n}\langle\zeta,T^*\eta_j\rangle\eta_j = \left(\sum_{j=1}^{n}\theta_{\eta_j,T^*\eta_j}\right)\zeta.$$

(iii) Los operadores de rango finito son densos en K.

(iv) $\langle\theta_{\xi,\eta}\zeta,\zeta'\rangle = \langle\langle\zeta,\eta\rangle\xi,\zeta'\rangle$

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta,\eta\rangle\xi\| = |\langle\zeta,\eta\rangle|\,\|\xi\| \leq \|\zeta\|\,\|\eta\|\,\|\xi\|$. Entonces $\|\theta_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$. Además $\theta_{\xi,\eta}(\frac{\eta}{\|\eta\|}) = \|\xi\|\,\|\eta\|$. Es claro que $\mathrm{Im}(\theta_{\xi,\eta}) = \mathbb{C}\xi$, de modo que $\theta_{\xi,\eta}$ es de rango 1.

(ii) Si $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathrm{Im}\, T$ es de dimensión n, sea $\{\eta_1,\ldots,\eta_n\}$ una base ortonormal de $\mathrm{Im}\, T$. Entonces, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

$$T\zeta = \sum_{j=1}^n \langle T\zeta,\eta_j\rangle\eta_j = \sum_{j=1}^n \langle\zeta, T^*\eta_j\rangle\eta_j = \left(\sum_{j=1}^n \theta_{\eta_j,T^*\eta_j}\right)\zeta.$$

(iii) Los operadores de rango finito son densos en K.

(iv) $\langle\theta_{\xi,\eta}\zeta,\zeta'\rangle = \langle\langle\zeta,\eta\rangle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\eta\rangle\langle\xi,\zeta'\rangle$

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta,\eta\rangle\xi\| = |\langle\zeta,\eta\rangle|\,\|\xi\| \leq \|\zeta\|\,\|\eta\|\,\|\xi\|$. Entonces $\|\theta_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$. Además $\theta_{\xi,\eta}(\frac{\eta}{\|\eta\|}) = \|\xi\|\,\|\eta\|$. Es claro que $\mathrm{Im}(\theta_{\xi,\eta}) = \mathbb{C}\xi$, de modo que $\theta_{\xi,\eta}$ es de rango 1.

(ii) Si $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathrm{Im}\,T$ es de dimensión n, sea $\{\eta_1,\ldots,\eta_n\}$ una base ortonormal de $\mathrm{Im}\,T$. Entonces, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

$$T\zeta = \sum_{j=1}^n \langle T\zeta,\eta_j\rangle\eta_j = \sum_{j=1}^n \langle\zeta, T^*\eta_j\rangle\eta_j = \left(\sum_{j=1}^n \theta_{\eta_j,T^*\eta_j}\right)\zeta.$$

(iii) Los operadores de rango finito son densos en K.

(iv) $\langle\theta_{\xi,\eta}\zeta,\zeta'\rangle = \langle\langle\zeta,\eta\rangle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\eta\rangle\langle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\overline{\langle\xi,\zeta'\rangle}\eta\rangle$

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta,\eta\rangle\xi\| = |\langle\zeta,\eta\rangle|\,\|\xi\| \leq \|\zeta\|\,\|\eta\|\,\|\xi\|$. Entonces $\|\theta_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$. Además $\theta_{\xi,\eta}(\frac{\eta}{\|\eta\|}) = \|\xi\|\,\|\eta\|$. Es claro que $\mathrm{Im}(\theta_{\xi,\eta}) = \mathbb{C}\xi$, de modo que $\theta_{\xi,\eta}$ es de rango 1.

(ii) Si $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathrm{Im}\,T$ es de dimensión n, sea $\{\eta_1,\ldots,\eta_n\}$ una base ortonormal de $\mathrm{Im}\,T$. Entonces, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

$$T\zeta = \sum_{j=1}^n \langle T\zeta,\eta_j\rangle\eta_j = \sum_{j=1}^n \langle\zeta, T^*\eta_j\rangle\eta_j = \left(\sum_{j=1}^n \theta_{\eta_j,T^*\eta_j}\right)\zeta.$$

(iii) Los operadores de rango finito son densos en K.

(iv) $\langle\theta_{\xi,\eta}\zeta,\zeta'\rangle = \langle\langle\zeta,\eta\rangle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\eta\rangle\langle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\overline{\langle\xi,\zeta'\rangle}\eta\rangle =$
$\langle\zeta,\langle\zeta',\xi\rangle\eta\rangle$

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta,\eta\rangle\xi\| = |\langle\zeta,\eta\rangle|\,\|\xi\| \leq \|\zeta\|\,\|\eta\|\,\|\xi\|$. Entonces $\|\theta_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$. Además $\theta_{\xi,\eta}(\frac{\eta}{\|\eta\|}) = \|\xi\|\,\|\eta\|$. Es claro que $\mathrm{Im}(\theta_{\xi,\eta}) = \mathbb{C}\xi$, de modo que $\theta_{\xi,\eta}$ es de rango 1.

(ii) Si $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathrm{Im}\,T$ es de dimensión n, sea $\{\eta_1,\ldots,\eta_n\}$ una base ortonormal de $\mathrm{Im}\,T$. Entonces, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

$$T\zeta = \sum_{j=1}^{n}\langle T\zeta,\eta_j\rangle\eta_j = \sum_{j=1}^{n}\langle\zeta, T^*\eta_j\rangle\eta_j = \left(\sum_{j=1}^{n}\theta_{\eta_j,T^*\eta_j}\right)\zeta.$$

(iii) Los operadores de rango finito son densos en K.

(iv) $\langle\theta_{\xi,\eta}\zeta,\zeta'\rangle = \langle\langle\zeta,\eta\rangle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\eta\rangle\langle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\overline{\langle\xi,\zeta'\rangle}\eta\rangle =$
$\langle\zeta,\langle\zeta',\xi\rangle\eta\rangle = \langle\zeta,\theta_{\eta,\xi}\zeta'\rangle$.

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta,\eta\rangle\xi\| = |\langle\zeta,\eta\rangle|\,\|\xi\| \leq \|\zeta\|\,\|\eta\|\,\|\xi\|$. Entonces $\|\theta_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$. Además $\theta_{\xi,\eta}(\frac{\eta}{\|\eta\|}) = \|\xi\|\,\|\eta\|$. Es claro que $\mathrm{Im}(\theta_{\xi,\eta}) = \mathbb{C}\xi$, de modo que $\theta_{\xi,\eta}$ es de rango 1.

(ii) Si $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathrm{Im}\,T$ es de dimensión n, sea $\{\eta_1,\ldots,\eta_n\}$ una base ortonormal de $\mathrm{Im}\,T$. Entonces, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

$$T\zeta = \sum_{j=1}^n \langle T\zeta,\eta_j\rangle\eta_j = \sum_{j=1}^n \langle\zeta,T^*\eta_j\rangle\eta_j = \left(\sum_{j=1}^n \theta_{\eta_j,T^*\eta_j}\right)\zeta.$$

(iii) Los operadores de rango finito son densos en K.

(iv) $\langle\theta_{\xi,\eta}\zeta,\zeta'\rangle = \langle\langle\zeta,\eta\rangle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\eta\rangle\langle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\overline{\langle\xi,\zeta'\rangle}\eta\rangle =$ $\langle\zeta,\langle\zeta',\xi\rangle\eta\rangle = \langle\zeta,\theta_{\eta,\xi}\zeta'\rangle$. Entonces $\theta_{\eta,\xi} = \theta_{\xi,\eta}^*$.

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta,\eta\rangle\xi\| = |\langle\zeta,\eta\rangle|\,\|\xi\| \leq \|\zeta\|\,\|\eta\|\,\|\xi\|$. Entonces $\|\theta_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$. Además $\theta_{\xi,\eta}(\frac{\eta}{\|\eta\|}) = \|\xi\|\,\|\eta\|$. Es claro que $\mathrm{Im}(\theta_{\xi,\eta}) = \mathbb{C}\xi$, de modo que $\theta_{\xi,\eta}$ es de rango 1.

(ii) Si $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathrm{Im}\,T$ es de dimensión n, sea $\{\eta_1,\ldots,\eta_n\}$ una base ortonormal de $\mathrm{Im}\,T$. Entonces, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

$$T\zeta = \textstyle\sum_{j=1}^n \langle T\zeta,\eta_j\rangle\eta_j = \sum_{j=1}^n \langle\zeta, T^*\eta_j\rangle\eta_j = \left(\sum_{j=1}^n \theta_{\eta_j,T^*\eta_j}\right)\zeta.$$

(iii) Los operadores de rango finito son densos en K.

(iv) $\langle\theta_{\xi,\eta}\zeta,\zeta'\rangle = \langle\langle\zeta,\eta\rangle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\eta\rangle\langle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\overline{\langle\xi,\zeta'\rangle}\eta\rangle =$ $\langle\zeta,\langle\zeta',\xi\rangle\eta\rangle = \langle\zeta,\theta_{\eta,\xi}\zeta'\rangle$. Entonces $\theta_{\eta,\xi} = \theta^*_{\xi,\eta}$.

(v) $T\theta_{\xi,\eta}(\zeta) = T(\langle\zeta,\eta\rangle\xi)$

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta,\eta\rangle\xi\| = |\langle\zeta,\eta\rangle|\,\|\xi\| \leq \|\zeta\|\,\|\eta\|\,\|\xi\|$. Entonces $\|\theta_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$. Además $\theta_{\xi,\eta}(\frac{\eta}{\|\eta\|}) = \|\xi\|\,\|\eta\|$. Es claro que $\mathrm{Im}(\theta_{\xi,\eta}) = \mathbb{C}\xi$, de modo que $\theta_{\xi,\eta}$ es de rango 1.

(ii) Si $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathrm{Im}\,T$ es de dimensión n, sea $\{\eta_1,\ldots,\eta_n\}$ una base ortonormal de $\mathrm{Im}\,T$. Entonces, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

$$T\zeta = \sum_{j=1}^n \langle T\zeta,\eta_j\rangle\eta_j = \sum_{j=1}^n \langle\zeta, T^*\eta_j\rangle\eta_j = \left(\sum_{j=1}^n \theta_{\eta_j,T^*\eta_j}\right)\zeta.$$

(iii) Los operadores de rango finito son densos en K.

(iv) $\langle\theta_{\xi,\eta}\zeta,\zeta'\rangle = \langle\langle\zeta,\eta\rangle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\eta\rangle\langle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\overline{\langle\xi,\zeta'\rangle}\eta\rangle =$ $\langle\zeta,\langle\zeta',\xi\rangle\eta\rangle = \langle\zeta,\theta_{\eta,\xi}\zeta'\rangle$. Entonces $\theta_{\eta,\xi} = \theta^*_{\xi,\eta}$.

(v) $T\theta_{\xi,\eta}(\zeta) = T(\langle\zeta,\eta\rangle\xi)$

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta,\eta\rangle\xi\| = |\langle\zeta,\eta\rangle|\,\|\xi\| \leq \|\zeta\|\,\|\eta\|\,\|\xi\|$. Entonces $\|\theta_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$. Además $\theta_{\xi,\eta}(\frac{\eta}{\|\eta\|}) = \|\xi\|\,\|\eta\|$. Es claro que $\mathrm{Im}(\theta_{\xi,\eta}) = \mathbb{C}\xi$, de modo que $\theta_{\xi,\eta}$ es de rango 1.

(ii) Si $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathrm{Im}\,T$ es de dimensión n, sea $\{\eta_1,\ldots,\eta_n\}$ una base ortonormal de $\mathrm{Im}\,T$. Entonces, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

$$T\zeta = \textstyle\sum_{j=1}^n \langle T\zeta,\eta_j\rangle\eta_j = \sum_{j=1}^n \langle\zeta, T^*\eta_j\rangle\eta_j = \left(\sum_{j=1}^n \theta_{\eta_j,T^*\eta_j}\right)\zeta.$$

(iii) Los operadores de rango finito son densos en K.

(iv) $\langle\theta_{\xi,\eta}\zeta,\zeta'\rangle = \langle\langle\zeta,\eta\rangle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\eta\rangle\langle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\overline{\langle\xi,\zeta'\rangle}\eta\rangle =$ $\langle\zeta,\langle\zeta',\xi\rangle\eta\rangle = \langle\zeta,\theta_{\eta,\xi}\zeta'\rangle$. Entonces $\theta_{\eta,\xi} = \theta_{\xi,\eta}^*$.

(v) $T\theta_{\xi,\eta}(\zeta) = T(\langle\zeta,\eta\rangle\xi) = \langle\zeta,\eta\rangle T\xi$

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta,\eta\rangle\xi\| = |\langle\zeta,\eta\rangle|\,\|\xi\| \leq \|\zeta\|\,\|\eta\|\,\|\xi\|$. Entonces $\|\theta_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$. Además $\theta_{\xi,\eta}(\frac{\eta}{\|\eta\|}) = \|\xi\|\,\|\eta\|$. Es claro que $\mathrm{Im}(\theta_{\xi,\eta}) = \mathbb{C}\xi$, de modo que $\theta_{\xi,\eta}$ es de rango 1.

(ii) Si $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathrm{Im}\, T$ es de dimensión n, sea $\{\eta_1,\dots,\eta_n\}$ una base ortonormal de $\mathrm{Im}\, T$. Entonces, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

$$T\zeta = \sum_{j=1}^n \langle T\zeta,\eta_j\rangle\eta_j = \sum_{j=1}^n \langle\zeta,T^*\eta_j\rangle\eta_j = \left(\sum_{j=1}^n \theta_{\eta_j,T^*\eta_j}\right)\zeta.$$

(iii) Los operadores de rango finito son densos en K.

(iv) $\langle\theta_{\xi,\eta}\zeta,\zeta'\rangle = \langle\langle\zeta,\eta\rangle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\eta\rangle\langle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\overline{\langle\xi,\zeta'\rangle}\eta\rangle =$ $\langle\zeta,\langle\zeta',\xi\rangle\eta\rangle = \langle\zeta,\theta_{\eta,\xi}\zeta'\rangle$. Entonces $\theta_{\eta,\xi} = \theta_{\xi,\eta}^*$.

(v) $T\theta_{\xi,\eta}(\zeta) = T(\langle\zeta,\eta\rangle\xi) = \langle\zeta,\eta\rangle T\xi = \theta_{T\xi,\eta}(\zeta)$.

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta,\eta\rangle\xi\| = |\langle\zeta,\eta\rangle|\,\|\xi\| \leq \|\zeta\|\,\|\eta\|\,\|\xi\|$. Entonces $\|\theta_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$. Además $\theta_{\xi,\eta}(\frac{\eta}{\|\eta\|}) = \|\xi\|\,\|\eta\|$. Es claro que $\operatorname{Im}(\theta_{\xi,\eta}) = \mathbb{C}\xi$, de modo que $\theta_{\xi,\eta}$ es de rango 1.

(ii) Si $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\operatorname{Im} T$ es de dimensión n, sea $\{\eta_1,\dots,\eta_n\}$ una base ortonormal de $\operatorname{Im} T$. Entonces, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

$$T\zeta = \sum_{j=1}^n \langle T\zeta,\eta_j\rangle\eta_j = \sum_{j=1}^n \langle\zeta, T^*\eta_j\rangle\eta_j = \left(\sum_{j=1}^n \theta_{\eta_j,T^*\eta_j}\right)\zeta.$$

(iii) Los operadores de rango finito son densos en K.

(iv) $\langle\theta_{\xi,\eta}\zeta,\zeta'\rangle = \langle\langle\zeta,\eta\rangle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\eta\rangle\langle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\overline{\langle\xi,\zeta'\rangle}\eta\rangle =$ $\langle\zeta,\langle\zeta',\xi\rangle\eta\rangle = \langle\zeta,\theta_{\eta,\xi}\zeta'\rangle$. Entonces $\theta_{\eta,\xi} = \theta_{\xi,\eta}^*$.

(v) $T\theta_{\xi,\eta}(\zeta) = T(\langle\zeta,\eta\rangle\xi) = \langle\zeta,\eta\rangle T\xi = \theta_{T\xi,\eta}(\zeta)$. Luego $T\theta_{\xi,\eta} = \theta_{T\xi,\eta}$.

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta,\eta\rangle\xi\| = |\langle\zeta,\eta\rangle|\,\|\xi\| \leq \|\zeta\|\,\|\eta\|\,\|\xi\|$. Entonces $\|\theta_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$. Además $\theta_{\xi,\eta}(\frac{\eta}{\|\eta\|}) = \|\xi\|\,\|\eta\|$. Es claro que $\mathrm{Im}(\theta_{\xi,\eta}) = \mathbb{C}\xi$, de modo que $\theta_{\xi,\eta}$ es de rango 1.

(ii) Si $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathrm{Im}\,T$ es de dimensión n, sea $\{\eta_1,\ldots,\eta_n\}$ una base ortonormal de $\mathrm{Im}\,T$. Entonces, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

$$T\zeta = \textstyle\sum_{j=1}^{n}\langle T\zeta,\eta_j\rangle\eta_j = \sum_{j=1}^{n}\langle\zeta, T^*\eta_j\rangle\eta_j = \left(\sum_{j=1}^{n}\theta_{\eta_j,T^*\eta_j}\right)\zeta.$$

(iii) Los operadores de rango finito son densos en K.

(iv) $\langle\theta_{\xi,\eta}\zeta,\zeta'\rangle = \langle\langle\zeta,\eta\rangle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\eta\rangle\langle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\overline{\langle\xi,\zeta'\rangle}\eta\rangle =$ $\langle\zeta,\langle\zeta',\xi\rangle\eta\rangle = \langle\zeta,\theta_{\eta,\xi}\zeta'\rangle$. Entonces $\theta_{\eta,\xi} = \theta^*_{\xi,\eta}$.

(v) $T\theta_{\xi,\eta}(\zeta) = T(\langle\zeta,\eta\rangle\xi) = \langle\zeta,\eta\rangle T\xi = \theta_{T\xi,\eta}(\zeta)$. Luego $T\theta_{\xi,\eta} = \theta_{T\xi,\eta}$. Tomando adjuntos: $\theta_{\eta,\xi}T^* = \theta_{\eta,T\xi}$.

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta,\eta\rangle\xi\| = |\langle\zeta,\eta\rangle|\,\|\xi\| \leq \|\zeta\|\,\|\eta\|\,\|\xi\|$. Entonces $\|\theta_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$. Además $\theta_{\xi,\eta}(\frac{\eta}{\|\eta\|}) = \|\xi\|\,\|\eta\|$. Es claro que $\mathrm{Im}(\theta_{\xi,\eta}) = \mathbb{C}\xi$, de modo que $\theta_{\xi,\eta}$ es de rango 1.

(ii) Si $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathrm{Im}\,T$ es de dimensión n, sea $\{\eta_1,\ldots,\eta_n\}$ una base ortonormal de $\mathrm{Im}\,T$. Entonces, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

$$T\zeta = \sum_{j=1}^n \langle T\zeta,\eta_j\rangle\eta_j = \sum_{j=1}^n \langle\zeta, T^*\eta_j\rangle\eta_j = \left(\sum_{j=1}^n \theta_{\eta_j,T^*\eta_j}\right)\zeta.$$

(iii) Los operadores de rango finito son densos en K.

(iv) $\langle\theta_{\xi,\eta}\zeta,\zeta'\rangle = \langle\langle\zeta,\eta\rangle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\eta\rangle\langle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\overline{\langle\xi,\zeta'\rangle}\eta\rangle =$ $\langle\zeta,\langle\zeta',\xi\rangle\eta\rangle = \langle\zeta,\theta_{\eta,\xi}\zeta'\rangle$. Entonces $\theta_{\eta,\xi} = \theta^*_{\xi,\eta}$.

(v) $T\theta_{\xi,\eta}(\zeta) = T(\langle\zeta,\eta\rangle\xi) = \langle\zeta,\eta\rangle T\xi = \theta_{T\xi,\eta}(\zeta)$. Luego $T\theta_{\xi,\eta} = \theta_{T\xi,\eta}$. Tomando adjuntos: $\theta_{\eta,\xi}T^* = \theta_{\eta,T\xi}$. Entonces $\theta_{\xi,\eta}T = \theta_{\xi,T^*\eta}$.

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta,\eta\rangle\xi\| = |\langle\zeta,\eta\rangle|\,\|\xi\| \leq \|\zeta\|\,\|\eta\|\,\|\xi\|$. Entonces $\|\theta_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$. Además $\theta_{\xi,\eta}(\frac{\eta}{\|\eta\|}) = \|\xi\|\,\|\eta\|$. Es claro que $\mathrm{Im}(\theta_{\xi,\eta}) = \mathbb{C}\xi$, de modo que $\theta_{\xi,\eta}$ es de rango 1.

(ii) Si $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathrm{Im}\, T$ es de dimensión n, sea $\{\eta_1,\ldots,\eta_n\}$ una base ortonormal de $\mathrm{Im}\, T$. Entonces, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

$$T\zeta = \sum_{j=1}^n \langle T\zeta,\eta_j\rangle\eta_j = \sum_{j=1}^n \langle\zeta, T^*\eta_j\rangle\eta_j = \left(\sum_{j=1}^n \theta_{\eta_j,T^*\eta_j}\right)\zeta.$$

(iii) Los operadores de rango finito son densos en K.

(iv) $\langle\theta_{\xi,\eta}\zeta,\zeta'\rangle = \langle\langle\zeta,\eta\rangle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\eta\rangle\langle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\overline{\langle\xi,\zeta'\rangle}\eta\rangle =$ $\langle\zeta,\langle\zeta',\xi\rangle\eta\rangle = \langle\zeta,\theta_{\eta,\xi}\zeta'\rangle$. Entonces $\theta_{\eta,\xi} = \theta_{\xi,\eta}^*$.

(v) $T\theta_{\xi,\eta}(\zeta) = T(\langle\zeta,\eta\rangle\xi) = \langle\zeta,\eta\rangle T\xi = \theta_{T\xi,\eta}(\zeta)$. Luego $T\theta_{\xi,\eta} = \theta_{T\xi,\eta}$. Tomando adjuntos: $\theta_{\eta,\xi}T^* = \theta_{\eta,T\xi}$. Entonces $\theta_{\xi,\eta}T = \theta_{\xi,T^*\eta}$.

(vi) $\theta_{\xi,\eta}\theta_{\xi',\eta'}$

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta,\eta\rangle\xi\| = |\langle\zeta,\eta\rangle|\,\|\xi\| \leq \|\zeta\|\,\|\eta\|\,\|\xi\|$. Entonces $\|\theta_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$. Además $\theta_{\xi,\eta}(\frac{\eta}{\|\eta\|}) = \|\xi\|\,\|\eta\|$. Es claro que $\mathrm{Im}(\theta_{\xi,\eta}) = \mathbb{C}\xi$, de modo que $\theta_{\xi,\eta}$ es de rango 1.

(ii) Si $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathrm{Im}\,T$ es de dimensión n, sea $\{\eta_1,\ldots,\eta_n\}$ una base ortonormal de $\mathrm{Im}\,T$. Entonces, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

$$T\zeta = \sum_{j=1}^n \langle T\zeta,\eta_j\rangle\eta_j = \sum_{j=1}^n \langle\zeta,T^*\eta_j\rangle\eta_j = \left(\sum_{j=1}^n \theta_{\eta_j,T^*\eta_j}\right)\zeta.$$

(iii) Los operadores de rango finito son densos en K.

(iv) $\langle\theta_{\xi,\eta}\zeta,\zeta'\rangle = \langle\langle\zeta,\eta\rangle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\eta\rangle\langle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\overline{\langle\xi,\zeta'\rangle}\eta\rangle = \langle\zeta,\langle\zeta',\xi\rangle\eta\rangle = \langle\zeta,\theta_{\eta,\xi}\zeta'\rangle$. Entonces $\theta_{\eta,\xi} = \theta_{\xi,\eta}^*$.

(v) $T\theta_{\xi,\eta}(\zeta) = T(\langle\zeta,\eta\rangle\xi) = \langle\zeta,\eta\rangle T\xi = \theta_{T\xi,\eta}(\zeta)$. Luego $T\theta_{\xi,\eta} = \theta_{T\xi,\eta}$. Tomando adjuntos: $\theta_{\eta,\xi}T^* = \theta_{\eta,T\xi}$. Entonces $\theta_{\xi,\eta}T = \theta_{\xi,T^*\eta}$.

(vi) $\theta_{\xi,\eta}\theta_{\xi',\eta'}$

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle \zeta, \eta\rangle \xi\| = |\langle \zeta, \eta\rangle|\, \|\xi\| \leq \|\zeta\|\, \|\eta\|\, \|\xi\|$. Entonces $\|\theta_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\| \|\eta\|$. Además $\theta_{\xi,\eta}(\frac{\eta}{\|\eta\|}) = \|\xi\|\, \|\eta\|$. Es claro que $\mathrm{Im}(\theta_{\xi,\eta}) = \mathbb{C}\xi$, de modo que $\theta_{\xi,\eta}$ es de rango 1.

(ii) Si $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathrm{Im}\, T$ es de dimensión n, sea $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ una base ortonormal de $\mathrm{Im}\, T$. Entonces, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

$$T\zeta = \sum_{j=1}^{n} \langle T\zeta, \eta_j\rangle \eta_j = \sum_{j=1}^{n} \langle \zeta, T^*\eta_j\rangle \eta_j = \left(\sum_{j=1}^{n} \theta_{\eta_j, T^*\eta_j} \right) \zeta.$$

(iii) Los operadores de rango finito son densos en K.

(iv) $\langle \theta_{\xi,\eta}\zeta, \zeta'\rangle = \langle \langle \zeta, \eta\rangle \xi, \zeta'\rangle = \langle \zeta, \eta\rangle \langle \xi, \zeta'\rangle = \langle \zeta, \overline{\langle \xi, \zeta'\rangle} \eta\rangle =$ $\langle \zeta, \langle \zeta', \xi\rangle \eta\rangle = \langle \zeta, \theta_{\eta,\xi}\zeta'\rangle$. Entonces $\theta_{\eta,\xi} = \theta^*_{\xi,\eta}$.

(v) $T\theta_{\xi,\eta}(\zeta) = T(\langle \zeta, \eta\rangle \xi) = \langle \zeta, \eta\rangle T\xi = \theta_{T\xi,\eta}(\zeta)$. Luego $T\theta_{\xi,\eta} = \theta_{T\xi,\eta}$. Tomando adjuntos: $\theta_{\eta,\xi} T^* = \theta_{\eta, T\xi}$. Entonces $\theta_{\xi,\eta} T = \theta_{\xi, T^*\eta}$.

(vi) $\theta_{\xi,\eta}\theta_{\xi',\eta'} = \theta_{\theta_{\xi,\eta}(\xi'),\eta'}$

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta,\eta\rangle\xi\| = |\langle\zeta,\eta\rangle|\,\|\xi\| \leq \|\zeta\|\,\|\eta\|\,\|\xi\|$. Entonces $\|\theta_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$. Además $\theta_{\xi,\eta}(\frac{\eta}{\|\eta\|}) = \|\xi\|\,\|\eta\|$. Es claro que $\mathrm{Im}(\theta_{\xi,\eta}) = \mathbb{C}\xi$, de modo que $\theta_{\xi,\eta}$ es de rango 1.

(ii) Si $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathrm{Im}\, T$ es de dimensión n, sea $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ una base ortonormal de $\mathrm{Im}\, T$. Entonces, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

$$T\zeta = \sum_{j=1}^n \langle T\zeta, \eta_j\rangle\eta_j = \sum_{j=1}^n \langle\zeta, T^*\eta_j\rangle\eta_j = \Big(\sum_{j=1}^n \theta_{\eta_j, T^*\eta_j}\Big)\,\zeta.$$

(iii) Los operadores de rango finito son densos en K.

(iv) $\langle\theta_{\xi,\eta}\zeta,\zeta'\rangle = \langle\langle\zeta,\eta\rangle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\eta\rangle\langle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\overline{\langle\xi,\zeta'\rangle}\eta\rangle =$ $\langle\zeta,\langle\zeta',\xi\rangle\eta\rangle = \langle\zeta,\theta_{\eta,\xi}\zeta'\rangle$. Entonces $\theta_{\eta,\xi} = \theta_{\xi,\eta}^*$.

(v) $T\theta_{\xi,\eta}(\zeta) = T(\langle\zeta,\eta\rangle\xi) = \langle\zeta,\eta\rangle T\xi = \theta_{T\xi,\eta}(\zeta)$. Luego $T\theta_{\xi,\eta} = \theta_{T\xi,\eta}$. Tomando adjuntos: $\theta_{\eta,\xi}T^* = \theta_{\eta,T\xi}$. Entonces $\theta_{\xi,\eta}T = \theta_{\xi,T^*\eta}$.

(vi) $\theta_{\xi,\eta}\theta_{\xi',\eta'} = \theta_{\theta_{\xi,\eta}(\xi'),\eta'} = \theta_{\langle\xi',\eta\rangle\xi,\eta'}$

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta,\eta\rangle\xi\| = |\langle\zeta,\eta\rangle|\,\|\xi\| \leq \|\zeta\|\,\|\eta\|\,\|\xi\|$. Entonces $\|\theta_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$. Además $\theta_{\xi,\eta}(\frac{\eta}{\|\eta\|}) = \|\xi\|\,\|\eta\|$. Es claro que $\operatorname{Im}(\theta_{\xi,\eta}) = \mathbb{C}\xi$, de modo que $\theta_{\xi,\eta}$ es de rango 1.

(ii) Si $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\operatorname{Im} T$ es de dimensión n, sea $\{\eta_1,\ldots,\eta_n\}$ una base ortonormal de $\operatorname{Im} T$. Entonces, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

$$T\zeta = \sum_{j=1}^n \langle T\zeta,\eta_j\rangle\eta_j = \sum_{j=1}^n \langle\zeta, T^*\eta_j\rangle\eta_j = \left(\sum_{j=1}^n \theta_{\eta_j,T^*\eta_j}\right)\zeta.$$

(iii) Los operadores de rango finito son densos en K.

(iv) $\langle\theta_{\xi,\eta}\zeta,\zeta'\rangle = \langle\langle\zeta,\eta\rangle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\eta\rangle\langle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\overline{\langle\xi,\zeta'\rangle}\eta\rangle =$ $\langle\zeta,\langle\zeta',\xi\rangle\eta\rangle = \langle\zeta,\theta_{\eta,\xi}\zeta'\rangle$. Entonces $\theta_{\eta,\xi} = \theta_{\xi,\eta}^*$.

(v) $T\theta_{\xi,\eta}(\zeta) = T(\langle\zeta,\eta\rangle\xi) = \langle\zeta,\eta\rangle T\xi = \theta_{T\xi,\eta}(\zeta)$. Luego $T\theta_{\xi,\eta} = \theta_{T\xi,\eta}$. Tomando adjuntos: $\theta_{\eta,\xi}T^* = \theta_{\eta,T\xi}$. Entonces $\theta_{\xi,\eta}T = \theta_{\xi,T^*\eta}$.

(vi) $\theta_{\xi,\eta}\theta_{\xi',\eta'} = \theta_{\theta_{\xi,\eta}(\xi'),\eta'} = \theta_{\langle\xi',\eta\rangle\xi,\eta'} = \langle\xi',\eta\rangle\theta_{\xi,\eta'}$.

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta,\eta\rangle\xi\| = |\langle\zeta,\eta\rangle|\,\|\xi\| \leq \|\zeta\|\,\|\eta\|\,\|\xi\|$. Entonces $\|\theta_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$. Además $\theta_{\xi,\eta}(\frac{\eta}{\|\eta\|}) = \|\xi\|\,\|\eta\|$. Es claro que $\mathrm{Im}(\theta_{\xi,\eta}) = \mathbb{C}\xi$, de modo que $\theta_{\xi,\eta}$ es de rango 1.

(ii) Si $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathrm{Im}\,T$ es de dimensión n, sea $\{\eta_1,\ldots,\eta_n\}$ una base ortonormal de $\mathrm{Im}\,T$. Entonces, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

$$T\zeta = \textstyle\sum_{j=1}^n \langle T\zeta,\eta_j\rangle\eta_j = \sum_{j=1}^n \langle\zeta, T^*\eta_j\rangle\eta_j = \left(\sum_{j=1}^n \theta_{\eta_j,T^*\eta_j}\right)\zeta.$$

(iii) Los operadores de rango finito son densos en K.

(iv) $\langle\theta_{\xi,\eta}\zeta,\zeta'\rangle = \langle\langle\zeta,\eta\rangle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\eta\rangle\langle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\overline{\langle\xi,\zeta'\rangle}\eta\rangle =$ $\langle\zeta,\langle\zeta',\xi\rangle\eta\rangle = \langle\zeta,\theta_{\eta,\xi}\zeta'\rangle$. Entonces $\theta_{\eta,\xi} = \theta_{\xi,\eta}^*$.

(v) $T\theta_{\xi,\eta}(\zeta) = T(\langle\zeta,\eta\rangle\xi) = \langle\zeta,\eta\rangle T\xi = \theta_{T\xi,\eta}(\zeta)$. Luego $T\theta_{\xi,\eta} = \theta_{T\xi,\eta}$. Tomando adjuntos: $\theta_{\eta,\xi}T^* = \theta_{\eta,T\xi}$. Entonces $\theta_{\xi,\eta}T = \theta_{\xi,T^*\eta}$.

(vi) $\theta_{\xi,\eta}\theta_{\xi',\eta'} = \theta_{\theta_{\xi,\eta}(\xi'),\eta'} = \theta_{\langle\xi',\eta\rangle\xi,\eta'} = \langle\xi',\eta\rangle\theta_{\xi,\eta'}$.

(vii) Por (iv) y (vi) es $\theta_{\xi,\xi}^*\theta_{\xi,\xi} = \theta_{\xi,\xi}\theta_{\xi,\xi} = \|\xi\|^2\theta_{\xi,\xi}$.

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta,\eta\rangle\xi\| = |\langle\zeta,\eta\rangle|\,\|\xi\| \leq \|\zeta\|\,\|\eta\|\,\|\xi\|$. Entonces $\|\theta_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$. Además $\theta_{\xi,\eta}(\frac{\eta}{\|\eta\|}) = \|\xi\|\,\|\eta\|$. Es claro que $\mathrm{Im}(\theta_{\xi,\eta}) = \mathbb{C}\xi$, de modo que $\theta_{\xi,\eta}$ es de rango 1.

(ii) Si $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathrm{Im}\,T$ es de dimensión n, sea $\{\eta_1,\ldots,\eta_n\}$ una base ortonormal de $\mathrm{Im}\,T$. Entonces, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

$$T\zeta = \textstyle\sum_{j=1}^n \langle T\zeta,\eta_j\rangle\eta_j = \sum_{j=1}^n \langle\zeta, T^*\eta_j\rangle\eta_j = \left(\sum_{j=1}^n \theta_{\eta_j,T^*\eta_j}\right)\zeta.$$

(iii) Los operadores de rango finito son densos en K.

(iv) $\langle\theta_{\xi,\eta}\zeta,\zeta'\rangle = \langle\langle\zeta,\eta\rangle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\eta\rangle\langle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\overline{\langle\xi,\zeta'\rangle}\eta\rangle =$ $\langle\zeta,\langle\zeta',\xi\rangle\eta\rangle = \langle\zeta,\theta_{\eta,\xi}\zeta'\rangle$. Entonces $\theta_{\eta,\xi} = \theta^*_{\xi,\eta}$.

(v) $T\theta_{\xi,\eta}(\zeta) = T(\langle\zeta,\eta\rangle\xi) = \langle\zeta,\eta\rangle T\xi = \theta_{T\xi,\eta}(\zeta)$. Luego $T\theta_{\xi,\eta} = \theta_{T\xi,\eta}$. Tomando adjuntos: $\theta_{\eta,\xi}T^* = \theta_{\eta,T\xi}$. Entonces $\theta_{\xi,\eta}T = \theta_{\xi,T^*\eta}$.

(vi) $\theta_{\xi,\eta}\theta_{\xi',\eta'} = \theta_{\theta_{\xi,\eta}(\xi'),\eta'} = \theta_{\langle\xi',\eta\rangle\xi,\eta'} = \langle\xi',\eta\rangle\theta_{\xi,\eta'}$.

(vii) Por (iv) y (vi) es $\theta^*_{\xi,\xi}\theta_{\xi,\xi} = \theta_{\xi,\xi}\theta_{\xi,\xi} = \|\xi\|^2\theta_{\xi,\xi}$.

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta,\eta\rangle\xi\| = |\langle\zeta,\eta\rangle|\,\|\xi\| \leq \|\zeta\|\,\|\eta\|\,\|\xi\|$. Entonces $\|\theta_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$. Además $\theta_{\xi,\eta}(\frac{\eta}{\|\eta\|}) = \|\xi\|\,\|\eta\|$. Es claro que $\mathrm{Im}(\theta_{\xi,\eta}) = \mathbb{C}\xi$, de modo que $\theta_{\xi,\eta}$ es de rango 1.

(ii) Si $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathrm{Im}\,T$ es de dimensión n, sea $\{\eta_1,\ldots,\eta_n\}$ una base ortonormal de $\mathrm{Im}\,T$. Entonces, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

$$T\zeta = \textstyle\sum_{j=1}^n \langle T\zeta,\eta_j\rangle\eta_j = \sum_{j=1}^n \langle\zeta, T^*\eta_j\rangle\eta_j = \left(\sum_{j=1}^n \theta_{\eta_j,T^*\eta_j}\right)\zeta.$$

(iii) Los operadores de rango finito son densos en K.

(iv) $\langle\theta_{\xi,\eta}\zeta,\zeta'\rangle = \langle\langle\zeta,\eta\rangle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\eta\rangle\langle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\overline{\langle\xi,\zeta'\rangle}\eta\rangle =$ $\langle\zeta,\langle\zeta',\xi\rangle\eta\rangle = \langle\zeta,\theta_{\eta,\xi}\zeta'\rangle$. Entonces $\theta_{\eta,\xi} = \theta^*_{\xi,\eta}$.

(v) $T\theta_{\xi,\eta}(\zeta) = T(\langle\zeta,\eta\rangle\xi) = \langle\zeta,\eta\rangle T\xi = \theta_{T\xi,\eta}(\zeta)$. Luego $T\theta_{\xi,\eta} = \theta_{T\xi,\eta}$. Tomando adjuntos: $\theta_{\eta,\xi}T^* = \theta_{\eta,T\xi}$. Entonces $\theta_{\xi,\eta}T = \theta_{\xi,T^*\eta}$.

(vi) $\theta_{\xi,\eta}\theta_{\xi',\eta'} = \theta_{\theta_{\xi,\eta}(\xi'),\eta'} = \theta_{\langle\xi',\eta\rangle\xi,\eta'} = \langle\xi',\eta\rangle\theta_{\xi,\eta'}$.

(vii) Por (iv) y (vi) es $\theta^*_{\xi,\xi}\theta_{\xi,\xi} = \theta_{\xi,\xi}\theta_{\xi,\xi} = \|\xi\|^2\theta_{\xi,\xi}$. Notar que si $\|\xi\| = 1$,

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle\zeta,\eta\rangle\xi\| = |\langle\zeta,\eta\rangle|\,\|\xi\| \leq \|\zeta\|\,\|\eta\|\,\|\xi\|$. Entonces $\|\theta_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$. Además $\theta_{\xi,\eta}(\frac{\eta}{\|\eta\|}) = \|\xi\|\,\|\eta\|$. Es claro que $\mathrm{Im}(\theta_{\xi,\eta}) = \mathbb{C}\xi$, de modo que $\theta_{\xi,\eta}$ es de rango 1.

(ii) Si $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathrm{Im}\,T$ es de dimensión n, sea $\{\eta_1,\ldots,\eta_n\}$ una base ortonormal de $\mathrm{Im}\,T$. Entonces, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

$$T\zeta = \sum_{j=1}^n \langle T\zeta,\eta_j\rangle\eta_j = \sum_{j=1}^n \langle\zeta, T^*\eta_j\rangle\eta_j = \left(\sum_{j=1}^n \theta_{\eta_j,T^*\eta_j}\right)\zeta.$$

(iii) Los operadores de rango finito son densos en K.

(iv) $\langle\theta_{\xi,\eta}\zeta,\zeta'\rangle = \langle\langle\zeta,\eta\rangle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\eta\rangle\langle\xi,\zeta'\rangle = \langle\zeta,\overline{\langle\xi,\zeta'\rangle}\eta\rangle =$ $\langle\zeta,\langle\zeta',\xi\rangle\eta\rangle = \langle\zeta,\theta_{\eta,\xi}\zeta'\rangle$. Entonces $\theta_{\eta,\xi} = \theta_{\xi,\eta}^*$.

(v) $T\theta_{\xi,\eta}(\zeta) = T(\langle\zeta,\eta\rangle\xi) = \langle\zeta,\eta\rangle T\xi = \theta_{T\xi,\eta}(\zeta)$. Luego $T\theta_{\xi,\eta} = \theta_{T\xi,\eta}$. Tomando adjuntos: $\theta_{\eta,\xi}T^* = \theta_{\eta,T\xi}$. Entonces $\theta_{\xi,\eta}T = \theta_{\xi,T^*\eta}$.

(vi) $\theta_{\xi,\eta}\theta_{\xi',\eta'} = \theta_{\theta_{\xi,\eta}(\xi'),\eta'} = \theta_{\langle\xi',\eta\rangle\xi,\eta'} = \langle\xi',\eta\rangle\theta_{\xi,\eta'}$.

(vii) Por (iv) y (vi) es $\theta_{\xi,\xi}^*\theta_{\xi,\xi} = \theta_{\xi,\xi}\theta_{\xi,\xi} = \|\xi\|^2\theta_{\xi,\xi}$. Notar que si $\|\xi\| = 1$, entonces $\theta_{\xi,\xi}$ es una proyección de rango 1.

$\square$

Teorema

Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathrm{K}(\mathcal{H})$ la C-álgebra de operadores compactos en $\mathcal{H}$.*

Teorema

Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathrm{K}(\mathcal{H})$ la C-álgebra de operadores compactos en $\mathcal{H}$.*

Teorema

Sean $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert y* $\mathsf{K}(\mathcal{H})$ *la C*-álgebra de operadores compactos en* $\mathcal{H}$*. Si* $\pi : \mathsf{K}(\mathcal{H}) \to \mathsf{B}(\mathcal{H}_\pi)$ *es una representación irreducible,*

Teorema

Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathrm{K}(\mathcal{H})$ la C-álgebra de operadores compactos en $\mathcal{H}$. Si $\pi : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es una representación irreducible, entonces existe un operador unitario $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ tal que $\pi(T) = UTU^*$ para todo $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$.*

Teorema

Sean $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert y* $\mathrm{K}(\mathcal{H})$ *la C*-álgebra de operadores compactos en* $\mathcal{H}$*. Si* $\pi : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ *es una representación irreducible, entonces existe un operador unitario* $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ *tal que* $\pi(T) = UTU^*$ *para todo* $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$*. En otras palabras,*

Teorema

Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathrm{K}(\mathcal{H})$ la C-álgebra de operadores compactos en $\mathcal{H}$. Si $\pi : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es una representación irreducible, entonces existe un operador unitario $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ tal que $\pi(T) = UTU^*$ para todo $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$. En otras palabras, si $\iota : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es la inclusión, entonces $\pi \underset{u}{\sim} \iota$.*

Teorema

Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathrm{K}(\mathcal{H})$ la C-álgebra de operadores compactos en $\mathcal{H}$. Si $\pi : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es una representación irreducible, entonces existe un operador unitario $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ tal que $\pi(T) = UTU^*$ para todo $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$. En otras palabras, si $\iota : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es la inclusión, entonces $\pi \underset{u}{\sim} \iota$.*

Demostración.

Sea $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\|\xi\| = 1$.

Teorema

Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathrm{K}(\mathcal{H})$ la C-álgebra de operadores compactos en $\mathcal{H}$. Si $\pi : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es una representación irreducible, entonces existe un operador unitario $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ tal que $\pi(T) = UTU^*$ para todo $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$. En otras palabras, si $\iota : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es la inclusión, entonces $\pi \underset{u}{\sim} \iota$.*

Demostración.

Sea $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\|\xi\| = 1$.

Teorema

Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathrm{K}(\mathcal{H})$ la C-álgebra de operadores compactos en $\mathcal{H}$. Si $\pi : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es una representación irreducible, entonces existe un operador unitario $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ tal que $\pi(T) = UTU^*$ para todo $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$. En otras palabras, si $\iota : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es la inclusión, entonces $\pi \underset{u}{\sim} \iota$.*

Demostración.

Sea $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\|\xi\| = 1$. Entonces $\theta_{\xi,\xi}$ es una proyección de rango 1,

Teorema

Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathrm{K}(\mathcal{H})$ la C-álgebra de operadores compactos en $\mathcal{H}$. Si $\pi : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es una representación irreducible, entonces existe un operador unitario $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ tal que $\pi(T) = UTU^*$ para todo $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$. En otras palabras, si $\iota : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es la inclusión, entonces $\pi \underset{u}{\sim} \iota$.*

Demostración.

Sea $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\|\xi\| = 1$. Entonces $\theta_{\xi,\xi}$ es una proyección de rango 1, y por lo tanto $P := \pi(\theta_{\xi,\xi})$ es una proyección:

Teorema

Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathrm{K}(\mathcal{H})$ la C-álgebra de operadores compactos en $\mathcal{H}$. Si $\pi : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es una representación irreducible, entonces existe un operador unitario $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ tal que $\pi(T) = UTU^*$ para todo $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$. En otras palabras, si $\iota : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es la inclusión, entonces $\pi \underset{u}{\sim} \iota$.*

Demostración.

Sea $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\|\xi\| = 1$. Entonces $\theta_{\xi,\xi}$ es una proyección de rango 1, y por lo tanto $P := \pi(\theta_{\xi,\xi})$ es una proyección:

$$P^*P = \pi(\theta_{\xi,\xi}^*\theta_{\xi,\xi})$$

Teorema

Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathrm{K}(\mathcal{H})$ la C-álgebra de operadores compactos en $\mathcal{H}$. Si $\pi : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es una representación irreducible, entonces existe un operador unitario $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ tal que $\pi(T) = UTU^*$ para todo $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$. En otras palabras, si $\iota : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es la inclusión, entonces $\pi \underset{u}{\sim} \iota$.*

Demostración.

Sea $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\|\xi\| = 1$. Entonces $\theta_{\xi,\xi}$ es una proyección de rango 1, y por lo tanto $P := \pi(\theta_{\xi,\xi})$ es una proyección:

$$P^*P = \pi(\theta_{\xi,\xi}^*\theta_{\xi,\xi}) = \pi(\theta_{\xi,\xi}) = P.$$

Teorema

Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathrm{K}(\mathcal{H})$ la C-álgebra de operadores compactos en $\mathcal{H}$. Si $\pi : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es una representación irreducible, entonces existe un operador unitario $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ tal que $\pi(T) = UTU^*$ para todo $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$. En otras palabras, si $\iota : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es la inclusión, entonces $\pi \underset{u}{\sim} \iota$.*

Demostración.

Sea $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\|\xi\| = 1$. Entonces $\theta_{\xi,\xi}$ es una proyección de rango 1, y por lo tanto $P := \pi(\theta_{\xi,\xi})$ es una proyección:

$$P^*P = \pi(\theta_{\xi,\xi}^*\theta_{\xi,\xi}) = \pi(\theta_{\xi,\xi}) = P.$$

Además $P \neq 0$:

Teorema

Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathrm{K}(\mathcal{H})$ la C^*-álgebra de operadores compactos en $\mathcal{H}$. Si $\pi : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es una representación irreducible, entonces existe un operador unitario $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ tal que $\pi(T) = UTU^*$ para todo $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$. En otras palabras, si $\iota : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es la inclusión, entonces $\pi \underset{u}{\sim} \iota$.

Demostración.

Sea $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\|\xi\| = 1$. Entonces $\theta_{\xi,\xi}$ es una proyección de rango 1, y por lo tanto $P := \pi(\theta_{\xi,\xi})$ es una proyección:

$$P^* P = \pi(\theta_{\xi,\xi}^* \theta_{\xi,\xi}) = \pi(\theta_{\xi,\xi}) = P.$$

Además $P \neq 0$: si fuera $P = 0$ entonces $\theta_{\xi,\xi} \in \ker(\pi)$,

Teorema

Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathrm{K}(\mathcal{H})$ la C^*-álgebra de operadores compactos en $\mathcal{H}$. Si $\pi : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es una representación irreducible, entonces existe un operador unitario $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ tal que $\pi(T) = UTU^*$ para todo $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$. En otras palabras, si $\iota : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es la inclusión, entonces $\pi \underset{u}{\sim} \iota$.

Demostración.

Sea $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\|\xi\| = 1$. Entonces $\theta_{\xi,\xi}$ es una proyección de rango 1, y por lo tanto $P := \pi(\theta_{\xi,\xi})$ es una proyección:

$$P^*P = \pi(\theta_{\xi,\xi}^*\theta_{\xi,\xi}) = \pi(\theta_{\xi,\xi}) = P.$$

Además $P \neq 0$: si fuera $P = 0$ entonces $\theta_{\xi,\xi} \in \ker(\pi)$, y por lo tanto $S\theta_{\xi,\xi}T^* = \theta_{S\xi,T\xi} \in \ker\pi$, $\forall S, T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$.

Teorema

Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathrm{K}(\mathcal{H})$ la C-álgebra de operadores compactos en $\mathcal{H}$. Si $\pi : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es una representación irreducible, entonces existe un operador unitario $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ tal que $\pi(T) = UTU^*$ para todo $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$. En otras palabras, si $\iota : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es la inclusión, entonces $\pi \underset{u}{\sim} \iota$.*

Demostración.

Sea $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\|\xi\| = 1$. Entonces $\theta_{\xi,\xi}$ es una proyección de rango 1, y por lo tanto $P := \pi(\theta_{\xi,\xi})$ es una proyección:

$$P^*P = \pi(\theta_{\xi,\xi}^*\theta_{\xi,\xi}) = \pi(\theta_{\xi,\xi}) = P.$$

Además $P \neq 0$: si fuera $P = 0$ entonces $\theta_{\xi,\xi} \in \ker(\pi)$, y por lo tanto $S\theta_{\xi,\xi}T^* = \theta_{S\xi,T\xi} \in \ker\pi$, $\forall S, T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$. Entonces $\theta_{\eta,\zeta} \in \ker\pi$ para todo $\eta, \zeta \in \mathcal{H}$.

Teorema

Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathrm{K}(\mathcal{H})$ la C^*-álgebra de operadores compactos en $\mathcal{H}$. Si $\pi : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es una representación irreducible, entonces existe un operador unitario $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ tal que $\pi(T) = UTU^*$ para todo $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$. En otras palabras, si $\iota : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es la inclusión, entonces $\pi \underset{u}{\sim} \iota$.

Demostración.

Sea $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\|\xi\| = 1$. Entonces $\theta_{\xi,\xi}$ es una proyección de rango 1, y por lo tanto $P := \pi(\theta_{\xi,\xi})$ es una proyección:

$$P^*P = \pi(\theta_{\xi,\xi}^*\theta_{\xi,\xi}) = \pi(\theta_{\xi,\xi}) = P.$$

Además $P \neq 0$: si fuera $P = 0$ entonces $\theta_{\xi,\xi} \in \ker(\pi)$, y por lo tanto $S\theta_{\xi,\xi}T^* = \theta_{S\xi,T\xi} \in \ker\pi$, $\forall S, T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$. Entonces $\theta_{\eta,\zeta} \in \ker\pi$ para todo $\eta, \zeta \in \mathcal{H}$. Luego se tendría $\mathrm{K}(\mathcal{H}) \subseteq \ker\pi$, es decir $\pi = 0$, y esto es absurdo.

Teorema

Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathrm{K}(\mathcal{H})$ la C-álgebra de operadores compactos en $\mathcal{H}$. Si $\pi : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es una representación irreducible, entonces existe un operador unitario $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ tal que $\pi(T) = UTU^*$ para todo $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$. En otras palabras, si $\iota : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es la inclusión, entonces $\pi \underset{u}{\sim} \iota$.*

Demostración.

Sea $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\|\xi\| = 1$. Entonces $\theta_{\xi,\xi}$ es una proyección de rango 1, y por lo tanto $P := \pi(\theta_{\xi,\xi})$ es una proyección:

$$P^* P = \pi(\theta_{\xi,\xi}^* \theta_{\xi,\xi}) = \pi(\theta_{\xi,\xi}) = P.$$

Además $P \neq 0$: si fuera $P = 0$ entonces $\theta_{\xi,\xi} \in \ker(\pi)$, y por lo tanto $S\theta_{\xi,\xi}T^* = \theta_{S\xi,T\xi} \in \ker\pi$, $\forall S, T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$. Entonces $\theta_{\eta,\zeta} \in \ker\pi$ para todo $\eta, \zeta \in \mathcal{H}$. Luego se tendría $\mathrm{K}(\mathcal{H}) \subseteq \ker\pi$, es decir $\pi = 0$, y esto es absurdo.

Considérese ahora $x \in \mathcal{H}_\pi$ tal que $x = P(x)$ y $\|x\| = 1$.

Considérese ahora $x \in \mathcal{H}_\pi$ tal que $x = P(x)$ y $\|x\| = 1$.

Considérese ahora $x \in \mathcal{H}_\pi$ tal que $x = P(x)$ y $\|x\| = 1$. Definimos $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ como $U(\eta) = \pi(\theta_{\eta,\xi})x$.

Considérese ahora $x \in \mathcal{H}_\pi$ tal que $x = P(x)$ y $\|x\| = 1$. Definimos $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ como $U(\eta) = \pi(\theta_{\eta,\xi})x$. Entonces U es lineal,

Considérese ahora $x \in \mathcal{H}_\pi$ tal que $x = P(x)$ y $\|x\| = 1$. Definimos $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ como $U(\eta) = \pi(\theta_{\eta,\xi})x$. Entonces U es lineal, y como $\pi(\theta_{\xi,\xi})x = P(x) = x$:

Considérese ahora $x \in \mathcal{H}_\pi$ tal que $x = P(x)$ y $\|x\| = 1$. Definimos $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ como $U(\eta) = \pi(\theta_{\eta,\xi})x$. Entonces U es lineal, y como $\pi(\theta_{\xi,\xi})x = P(x) = x$:

$$\langle U\eta, U\eta' \rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \pi(\theta_{\eta,\xi})x, \pi(\theta_{\eta',\xi})x \rangle_{\mathcal{H}_\pi}$$

Considérese ahora $x \in \mathcal{H}_\pi$ tal que $x = P(x)$ y $\|x\| = 1$. Definimos $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ como $U(\eta) = \pi(\theta_{\eta,\xi})x$. Entonces U es lineal, y como $\pi(\theta_{\xi,\xi})x = P(x) = x$:

$$\langle U\eta, U\eta' \rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \pi(\theta_{\eta,\xi})x, \pi(\theta_{\eta',\xi})x \rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \pi(\theta_{\xi,\eta'}\theta_{\eta,\xi})x, x \rangle_{\mathcal{H}_\pi}$$

Considérese ahora $x \in \mathcal{H}_\pi$ tal que $x = P(x)$ y $\|x\| = 1$. Definimos $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ como $U(\eta) = \pi(\theta_{\eta,\xi})x$. Entonces U es lineal, y como $\pi(\theta_{\xi,\xi})x = P(x) = x$:

$$\langle U\eta, U\eta' \rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \pi(\theta_{\eta,\xi})x, \pi(\theta_{\eta',\xi})x \rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \pi(\theta_{\xi,\eta'}\theta_{\eta,\xi})x, x \rangle_{\mathcal{H}_\pi}$$

Considérese ahora $x \in \mathcal{H}_\pi$ tal que $x = P(x)$ y $\|x\| = 1$. Definimos $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ como $U(\eta) = \pi(\theta_{\eta,\xi})x$. Entonces U es lineal, y como $\pi(\theta_{\xi,\xi})x = P(x) = x$:

$$\begin{aligned}\langle U\eta, U\eta'\rangle_{\mathcal{H}_\pi} &= \langle \pi(\theta_{\eta,\xi})x, \pi(\theta_{\eta',\xi})x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \pi(\theta_{\xi,\eta'}\theta_{\eta,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\ &= \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}}\langle \pi(\theta_{\xi,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi}\end{aligned}$$

Considérese ahora $x \in \mathcal{H}_\pi$ tal que $x = P(x)$ y $\|x\| = 1$. Definimos $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ como $U(\eta) = \pi(\theta_{\eta,\xi})x$. Entonces U es lineal, y como $\pi(\theta_{\xi,\xi})x = P(x) = x$:

$$\begin{aligned}\langle U\eta, U\eta' \rangle_{\mathcal{H}_\pi} &= \langle \pi(\theta_{\eta,\xi})x, \pi(\theta_{\eta',\xi})x \rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \pi(\theta_{\xi,\eta'}\theta_{\eta,\xi})x, x \rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\ &= \langle \eta, \eta' \rangle_{\mathcal{H}} \langle \pi(\theta_{\xi,\xi})x, x \rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \eta, \eta' \rangle_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

Considérese ahora $x \in \mathcal{H}_\pi$ tal que $x = P(x)$ y $\|x\| = 1$. Definimos $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ como $U(\eta) = \pi(\theta_{\eta,\xi})x$. Entonces U es lineal, y como $\pi(\theta_{\xi,\xi})x = P(x) = x$:

$$\begin{aligned}\langle U\eta, U\eta'\rangle_{\mathcal{H}_\pi} &= \langle \pi(\theta_{\eta,\xi})x, \pi(\theta_{\eta',\xi})x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \pi(\theta_{\xi,\eta'}\theta_{\eta,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\ &= \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}}\langle \pi(\theta_{\xi,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

Entonces U es una isometría.

Considérese ahora $x \in \mathcal{H}_\pi$ tal que $x = P(x)$ y $\|x\| = 1$. Definimos $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ como $U(\eta) = \pi(\theta_{\eta,\xi})x$. Entonces U es lineal, y como $\pi(\theta_{\xi,\xi})x = P(x) = x$:

$$\begin{aligned}\langle U\eta, U\eta'\rangle_{\mathcal{H}_\pi} &= \langle \pi(\theta_{\eta,\xi})x, \pi(\theta_{\eta',\xi})x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \pi(\theta_{\xi,\eta'}\theta_{\eta,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\ &= \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}} \langle \pi(\theta_{\xi,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

Entonces U es una isometría. Sea $\mathcal{H}' = \overline{\operatorname{span}}\{\pi(\theta_{\eta,\xi})x : \eta \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{H}_\pi$.

Considérese ahora $x \in \mathcal{H}_\pi$ tal que $x = P(x)$ y $\|x\| = 1$. Definimos $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ como $U(\eta) = \pi(\theta_{\eta,\xi})x$. Entonces U es lineal, y como $\pi(\theta_{\xi,\xi})x = P(x) = x$:

$$\begin{aligned}\langle U\eta, U\eta'\rangle_{\mathcal{H}_\pi} &= \langle \pi(\theta_{\eta,\xi})x, \pi(\theta_{\eta',\xi})x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \pi(\theta_{\xi,\eta'}\theta_{\eta,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi}\\ &= \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}}\langle \pi(\theta_{\xi,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

Entonces U es una isometría. Sea $\mathcal{H}' = \overline{\operatorname{span}}\{\pi(\theta_{\eta,\xi})x : \eta \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{H}_\pi$. Entonces $x \in \mathcal{H}'$ porque $x = \pi(\theta_{\xi,\xi})x$.

Considérese ahora $x \in \mathcal{H}_\pi$ tal que $x = P(x)$ y $\|x\| = 1$. Definimos $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ como $U(\eta) = \pi(\theta_{\eta,\xi})x$. Entonces U es lineal, y como $\pi(\theta_{\xi,\xi})x = P(x) = x$:

$$\begin{aligned}\langle U\eta, U\eta' \rangle_{\mathcal{H}_\pi} &= \langle \pi(\theta_{\eta,\xi})x, \pi(\theta_{\eta',\xi})x \rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \pi(\theta_{\xi,\eta'}\theta_{\eta,\xi})x, x \rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\ &= \langle \eta, \eta' \rangle_{\mathcal{H}} \langle \pi(\theta_{\xi,\xi})x, x \rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \eta, \eta' \rangle_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

Entonces U es una isometría. Sea $\mathcal{H}' = \overline{\text{span}}\{\pi(\theta_{\eta,\xi})x : \eta \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{H}_\pi$. Entonces $x \in \mathcal{H}'$ porque $x = \pi(\theta_{\xi,\xi})x$. Además $\mathcal{H}'$ es π-invariante:

Considérese ahora $x \in \mathcal{H}_\pi$ tal que $x = P(x)$ y $\|x\| = 1$. Definimos $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ como $U(\eta) = \pi(\theta_{\eta,\xi})x$. Entonces U es lineal, y como $\pi(\theta_{\xi,\xi})x = P(x) = x$:

$$\begin{aligned}\langle U\eta, U\eta'\rangle_{\mathcal{H}_\pi} &= \langle \pi(\theta_{\eta,\xi})x, \pi(\theta_{\eta',\xi})x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \pi(\theta_{\xi,\eta'}\theta_{\eta,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\ &= \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}}\langle \pi(\theta_{\xi,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

Entonces U es una isometría. Sea $\mathcal{H}' = \overline{\text{span}}\{\pi(\theta_{\eta,\xi})x : \eta \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{H}_\pi$. Entonces $x \in \mathcal{H}'$ porque $x = \pi(\theta_{\xi,\xi})x$. Además $\mathcal{H}'$ es π-invariante: si $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$:

Considérese ahora $x \in \mathcal{H}_\pi$ tal que $x = P(x)$ y $\|x\| = 1$. Definimos $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ como $U(\eta) = \pi(\theta_{\eta,\xi})x$. Entonces U es lineal, y como $\pi(\theta_{\xi,\xi})x = P(x) = x$:

$$\begin{aligned}\langle U\eta, U\eta'\rangle_{\mathcal{H}_\pi} &= \langle \pi(\theta_{\eta,\xi})x, \pi(\theta_{\eta',\xi})x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \pi(\theta_{\xi,\eta'}\theta_{\eta,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\ &= \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}}\langle \pi(\theta_{\xi,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

Entonces U es una isometría. Sea $\mathcal{H}' = \overline{\operatorname{span}}\{\pi(\theta_{\eta,\xi})x : \eta \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{H}_\pi$. Entonces $x \in \mathcal{H}'$ porque $x = \pi(\theta_{\xi,\xi})x$. Además $\mathcal{H}'$ es π-invariante: si $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$:

$$\pi(T)(\pi(\theta_{\eta,\xi})x) = \pi(T\theta_{\eta,\xi})x$$

Considérese ahora $x \in \mathcal{H}_\pi$ tal que $x = P(x)$ y $\|x\| = 1$. Definimos $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ como $U(\eta) = \pi(\theta_{\eta,\xi})x$. Entonces U es lineal, y como $\pi(\theta_{\xi,\xi})x = P(x) = x$:

$$\begin{aligned}\langle U\eta, U\eta'\rangle_{\mathcal{H}_\pi} &= \langle \pi(\theta_{\eta,\xi})x, \pi(\theta_{\eta',\xi})x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \pi(\theta_{\xi,\eta'}\theta_{\eta,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\ &= \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}}\langle \pi(\theta_{\xi,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

Entonces U es una isometría. Sea $\mathcal{H}' = \overline{\operatorname{span}}\{\pi(\theta_{\eta,\xi})x : \eta \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{H}_\pi$. Entonces $x \in \mathcal{H}'$ porque $x = \pi(\theta_{\xi,\xi})x$. Además $\mathcal{H}'$ es π-invariante: si $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$:

$$\pi(T)(\pi(\theta_{\eta,\xi})x) = \pi(T\theta_{\eta,\xi})x = \pi(\theta_{T\eta,\xi})x \in \mathcal{H}'.$$

Considérese ahora $x \in \mathcal{H}_\pi$ tal que $x = P(x)$ y $\|x\| = 1$. Definimos $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ como $U(\eta) = \pi(\theta_{\eta,\xi})x$. Entonces U es lineal, y como $\pi(\theta_{\xi,\xi})x = P(x) = x$:

$$\begin{aligned}\langle U\eta, U\eta'\rangle_{\mathcal{H}_\pi} &= \langle \pi(\theta_{\eta,\xi})x, \pi(\theta_{\eta',\xi})x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \pi(\theta_{\xi,\eta'}\theta_{\eta,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\ &= \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}} \langle \pi(\theta_{\xi,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

Entonces U es una isometría. Sea $\mathcal{H}' = \overline{\text{span}}\{\pi(\theta_{\eta,\xi})x : \eta \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{H}_\pi$. Entonces $x \in \mathcal{H}'$ porque $x = \pi(\theta_{\xi,\xi})x$. Además $\mathcal{H}'$ es π-invariante: si $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$:

$$\pi(T)(\pi(\theta_{\eta,\xi})x) = \pi(T\theta_{\eta,\xi})x = \pi(\theta_{T\eta,\xi})x \in \mathcal{H}'.$$

Luego $\pi(T)\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}'$ para todo $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$.

Considérese ahora $x \in \mathcal{H}_\pi$ tal que $x = P(x)$ y $\|x\| = 1$. Definimos $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ como $U(\eta) = \pi(\theta_{\eta,\xi})x$. Entonces U es lineal, y como $\pi(\theta_{\xi,\xi})x = P(x) = x$:

$$\begin{aligned}\langle U\eta, U\eta'\rangle_{\mathcal{H}_\pi} &= \langle \pi(\theta_{\eta,\xi})x, \pi(\theta_{\eta',\xi})x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \pi(\theta_{\xi,\eta'}\theta_{\eta,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\ &= \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}}\langle \pi(\theta_{\xi,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

Entonces U es una isometría. Sea $\mathcal{H}' = \overline{\operatorname{span}}\{\pi(\theta_{\eta,\xi})x : \eta \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{H}_\pi$. Entonces $x \in \mathcal{H}'$ porque $x = \pi(\theta_{\xi,\xi})x$. Además $\mathcal{H}'$ es π-invariante: si $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$:

$$\pi(T)(\pi(\theta_{\eta,\xi})x) = \pi(T\theta_{\eta,\xi})x = \pi(\theta_{T\eta,\xi})x \in \mathcal{H}'.$$

Luego $\pi(T)\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}'$ para todo $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$. Pero π es irreducible y $\mathcal{H}' \neq 0$, de donde $\mathcal{H}' = \mathcal{H}_\pi$.

Considérese ahora $x \in \mathcal{H}_\pi$ tal que $x = P(x)$ y $\|x\| = 1$. Definimos $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ como $U(\eta) = \pi(\theta_{\eta,\xi})x$. Entonces U es lineal, y como $\pi(\theta_{\xi,\xi})x = P(x) = x$:

$$\begin{aligned}\langle U\eta, U\eta'\rangle_{\mathcal{H}_\pi} &= \langle \pi(\theta_{\eta,\xi})x, \pi(\theta_{\eta',\xi})x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \pi(\theta_{\xi,\eta'}\theta_{\eta,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\ &= \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}}\langle \pi(\theta_{\xi,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

Entonces U es una isometría. Sea $\mathcal{H}' = \overline{\operatorname{span}}\{\pi(\theta_{\eta,\xi})x : \eta \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{H}_\pi$. Entonces $x \in \mathcal{H}'$ porque $x = \pi(\theta_{\xi,\xi})x$. Además $\mathcal{H}'$ es π-invariante: si $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$:

$$\pi(T)(\pi(\theta_{\eta,\xi})x) = \pi(T\theta_{\eta,\xi})x = \pi(\theta_{T\eta,\xi})x \in \mathcal{H}'.$$

Luego $\pi(T)\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}'$ para todo $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$. Pero π es irreducible y $\mathcal{H}' \neq 0$, de donde $\mathcal{H}' = \mathcal{H}_\pi$. Luego U es sobreyectivo y por lo tanto $\mathcal{H} \underset{\cong}{\overset{U}{\to}} \mathcal{H}_\pi$.

Considérese ahora $x \in \mathcal{H}_\pi$ tal que $x = P(x)$ y $\|x\| = 1$. Definimos $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ como $U(\eta) = \pi(\theta_{\eta,\xi})x$. Entonces U es lineal, y como $\pi(\theta_{\xi,\xi})x = P(x) = x$:

$$\begin{aligned}\langle U\eta, U\eta'\rangle_{\mathcal{H}_\pi} &= \langle \pi(\theta_{\eta,\xi})x, \pi(\theta_{\eta',\xi})x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \pi(\theta_{\xi,\eta'}\theta_{\eta,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\ &= \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}}\langle \pi(\theta_{\xi,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

Entonces U es una isometría. Sea $\mathcal{H}' = \overline{\operatorname{span}}\{\pi(\theta_{\eta,\xi})x : \eta \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{H}_\pi$. Entonces $x \in \mathcal{H}'$ porque $x = \pi(\theta_{\xi,\xi})x$. Además $\mathcal{H}'$ es π-invariante: si $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$:

$$\pi(T)(\pi(\theta_{\eta,\xi})x) = \pi(T\theta_{\eta,\xi})x = \pi(\theta_{T\eta,\xi})x \in \mathcal{H}'.$$

Luego $\pi(T)\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}'$ para todo $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$. Pero π es irreducible y $\mathcal{H}' \neq 0$, de donde $\mathcal{H}' = \mathcal{H}_\pi$. Luego U es sobreyectivo y por lo tanto $\mathcal{H} \underset{\cong}{\xrightarrow{U}} \mathcal{H}_\pi$.

Para ver que $\pi(T) = UTU^*$ para todo $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$

Considérese ahora $x \in \mathcal{H}_\pi$ tal que $x = P(x)$ y $\|x\| = 1$. Definimos $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ como $U(\eta) = \pi(\theta_{\eta,\xi})x$. Entonces U es lineal, y como $\pi(\theta_{\xi,\xi})x = P(x) = x$:

$$\begin{aligned}\langle U\eta, U\eta'\rangle_{\mathcal{H}_\pi} &= \langle \pi(\theta_{\eta,\xi})x, \pi(\theta_{\eta',\xi})x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \pi(\theta_{\xi,\eta'}\theta_{\eta,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\ &= \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}}\langle \pi(\theta_{\xi,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

Entonces U es una isometría. Sea $\mathcal{H}' = \overline{\operatorname{span}}\{\pi(\theta_{\eta,\xi})x : \eta \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{H}_\pi$. Entonces $x \in \mathcal{H}'$ porque $x = \pi(\theta_{\xi,\xi})x$. Además $\mathcal{H}'$ es π-invariante: si $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$:

$$\pi(T)(\pi(\theta_{\eta,\xi})x) = \pi(T\theta_{\eta,\xi})x = \pi(\theta_{T\eta,\xi})x \in \mathcal{H}'.$$

Luego $\pi(T)\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}'$ para todo $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$. Pero π es irreducible y $\mathcal{H}' \neq 0$, de donde $\mathcal{H}' = \mathcal{H}_\pi$. Luego U es sobreyectivo y por lo tanto $\mathcal{H} \underset{\cong}{\overset{U}{\to}} \mathcal{H}_\pi$.

Para ver que $\pi(T) = UTU^*$ para todo $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$ basta mostrar que $\pi(\theta_{\eta,\tau})U = U\theta_{\eta,\tau}$ para todos $\eta, \tau \in \mathcal{H}$.

Considérese ahora $x \in \mathcal{H}_\pi$ tal que $x = P(x)$ y $\|x\| = 1$. Definimos $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ como $U(\eta) = \pi(\theta_{\eta,\xi})x$. Entonces U es lineal, y como $\pi(\theta_{\xi,\xi})x = P(x) = x$:

$$\begin{aligned}\langle U\eta, U\eta'\rangle_{\mathcal{H}_\pi} &= \langle \pi(\theta_{\eta,\xi})x, \pi(\theta_{\eta',\xi})x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \pi(\theta_{\xi,\eta'}\theta_{\eta,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\ &= \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}}\langle \pi(\theta_{\xi,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

Entonces U es una isometría. Sea $\mathcal{H}' = \overline{\text{span}}\{\pi(\theta_{\eta,\xi})x : \eta \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{H}_\pi$. Entonces $x \in \mathcal{H}'$ porque $x = \pi(\theta_{\xi,\xi})x$. Además $\mathcal{H}'$ es π-invariante: si $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$:

$$\pi(T)(\pi(\theta_{\eta,\xi})x) = \pi(T\theta_{\eta,\xi})x = \pi(\theta_{T\eta,\xi})x \in \mathcal{H}'.$$

Luego $\pi(T)\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}'$ para todo $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$. Pero π es irreducible y $\mathcal{H}' \neq 0$, de donde $\mathcal{H}' = \mathcal{H}_\pi$. Luego U es sobreyectivo y por lo tanto $\mathcal{H} \underset{\cong}{\overset{U}{\to}} \mathcal{H}_\pi$.

Para ver que $\pi(T) = UTU^*$ para todo $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$ basta mostrar que $\pi(\theta_{\eta,\tau})U = U\theta_{\eta,\tau}$ para todos $\eta, \tau \in \mathcal{H}$. Ahora, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

Considérese ahora $x \in \mathcal{H}_\pi$ tal que $x = P(x)$ y $\|x\| = 1$. Definimos $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ como $U(\eta) = \pi(\theta_{\eta,\xi})x$. Entonces U es lineal, y como $\pi(\theta_{\xi,\xi})x = P(x) = x$:

$$\begin{aligned}\langle U\eta, U\eta'\rangle_{\mathcal{H}_\pi} &= \langle \pi(\theta_{\eta,\xi})x, \pi(\theta_{\eta',\xi})x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \pi(\theta_{\xi,\eta'}\theta_{\eta,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi}\\ &= \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}}\langle \pi(\theta_{\xi,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

Entonces U es una isometría. Sea $\mathcal{H}' = \overline{\mathrm{span}}\{\pi(\theta_{\eta,\xi})x : \eta \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{H}_\pi$. Entonces $x \in \mathcal{H}'$ porque $x = \pi(\theta_{\xi,\xi})x$. Además $\mathcal{H}'$ es π-invariante: si $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$:

$$\pi(T)(\pi(\theta_{\eta,\xi})x) = \pi(T\theta_{\eta,\xi})x = \pi(\theta_{T\eta,\xi})x \in \mathcal{H}'.$$

Luego $\pi(T)\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}'$ para todo $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$. Pero π es irreducible y $\mathcal{H}' \neq 0$, de donde $\mathcal{H}' = \mathcal{H}_\pi$. Luego U es sobreyectivo y por lo tanto $\mathcal{H} \underset{\cong}{\overset{U}{\to}} \mathcal{H}_\pi$.

Para ver que $\pi(T) = UTU^*$ para todo $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$ basta mostrar que $\pi(\theta_{\eta,\tau})U = U\theta_{\eta,\tau}$ para todos $\eta, \tau \in \mathcal{H}$. Ahora, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

$$U\theta_{\eta,\tau}(\zeta) = U(\langle \zeta, \tau\rangle \eta)$$

Considérese ahora $x \in \mathcal{H}_\pi$ tal que $x = P(x)$ y $\|x\| = 1$. Definimos $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ como $U(\eta) = \pi(\theta_{\eta,\xi})x$. Entonces U es lineal, y como $\pi(\theta_{\xi,\xi})x = P(x) = x$:

$$\begin{aligned}\langle U\eta, U\eta'\rangle_{\mathcal{H}_\pi} &= \langle \pi(\theta_{\eta,\xi})x, \pi(\theta_{\eta',\xi})x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \pi(\theta_{\xi,\eta'}\theta_{\eta,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\ &= \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}}\langle \pi(\theta_{\xi,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

Entonces U es una isometría. Sea $\mathcal{H}' = \overline{\operatorname{span}}\{\pi(\theta_{\eta,\xi})x : \eta \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{H}_\pi$. Entonces $x \in \mathcal{H}'$ porque $x = \pi(\theta_{\xi,\xi})x$. Además $\mathcal{H}'$ es π-invariante: si $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$:

$$\pi(T)(\pi(\theta_{\eta,\xi})x) = \pi(T\theta_{\eta,\xi})x = \pi(\theta_{T\eta,\xi})x \in \mathcal{H}'.$$

Luego $\pi(T)\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}'$ para todo $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$. Pero π es irreducible y $\mathcal{H}' \neq 0$, de donde $\mathcal{H}' = \mathcal{H}_\pi$. Luego U es sobreyectivo y por lo tanto $\mathcal{H} \underset{\cong}{\overset{U}{\to}} \mathcal{H}_\pi$.

Para ver que $\pi(T) = UTU^*$ para todo $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$ basta mostrar que $\pi(\theta_{\eta,\tau})U = U\theta_{\eta,\tau}$ para todos $\eta, \tau \in \mathcal{H}$. Ahora, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

$$U\theta_{\eta,\tau}(\zeta) = U(\langle \zeta, \tau\rangle \eta) = \langle \zeta, \tau\rangle U(\eta)$$

Considérese ahora $x \in \mathcal{H}_\pi$ tal que $x = P(x)$ y $\|x\| = 1$. Definimos $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ como $U(\eta) = \pi(\theta_{\eta,\xi})x$. Entonces U es lineal, y como $\pi(\theta_{\xi,\xi})x = P(x) = x$:

$$\begin{aligned}\langle U\eta, U\eta' \rangle_{\mathcal{H}_\pi} &= \langle \pi(\theta_{\eta,\xi})x, \pi(\theta_{\eta',\xi})x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \pi(\theta_{\xi,\eta'}\theta_{\eta,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\ &= \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}} \langle \pi(\theta_{\xi,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

Entonces U es una isometría. Sea $\mathcal{H}' = \overline{\mathrm{span}}\{\pi(\theta_{\eta,\xi})x : \eta \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{H}_\pi$. Entonces $x \in \mathcal{H}'$ porque $x = \pi(\theta_{\xi,\xi})x$. Además $\mathcal{H}'$ es π-invariante: si $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$:

$$\pi(T)(\pi(\theta_{\eta,\xi})x) = \pi(T\theta_{\eta,\xi})x = \pi(\theta_{T\eta,\xi})x \in \mathcal{H}'.$$

Luego $\pi(T)\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}'$ para todo $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$. Pero π es irreducible y $\mathcal{H}' \neq 0$, de donde $\mathcal{H}' = \mathcal{H}_\pi$. Luego U es sobreyectivo y por lo tanto $\mathcal{H} \underset{\cong}{\overset{U}{\to}} \mathcal{H}_\pi$.

Para ver que $\pi(T) = UTU^*$ para todo $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$ basta mostrar que $\pi(\theta_{\eta,\tau})U = U\theta_{\eta,\tau}$ para todos $\eta, \tau \in \mathcal{H}$. Ahora, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

$$U\theta_{\eta,\tau}(\zeta) = U(\langle \zeta, \tau\rangle \eta) = \langle \zeta, \tau\rangle U(\eta) = \langle \zeta, \tau\rangle \pi(\theta_{\eta,\xi})x$$

Considérese ahora $x \in \mathcal{H}_\pi$ tal que $x = P(x)$ y $\|x\| = 1$. Definimos $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ como $U(\eta) = \pi(\theta_{\eta,\xi})x$. Entonces U es lineal, y como $\pi(\theta_{\xi,\xi})x = P(x) = x$:

$$\begin{aligned}\langle U\eta, U\eta'\rangle_{\mathcal{H}_\pi} &= \langle \pi(\theta_{\eta,\xi})x, \pi(\theta_{\eta',\xi})x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \pi(\theta_{\xi,\eta'}\theta_{\eta,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\ &= \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}}\langle \pi(\theta_{\xi,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

Entonces U es una isometría. Sea $\mathcal{H}' = \overline{\operatorname{span}}\{\pi(\theta_{\eta,\xi})x : \eta \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{H}_\pi$. Entonces $x \in \mathcal{H}'$ porque $x = \pi(\theta_{\xi,\xi})x$. Además $\mathcal{H}'$ es π-invariante: si $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$:

$$\pi(T)(\pi(\theta_{\eta,\xi})x) = \pi(T\theta_{\eta,\xi})x = \pi(\theta_{T\eta,\xi})x \in \mathcal{H}'.$$

Luego $\pi(T)\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}'$ para todo $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$. Pero π es irreducible y $\mathcal{H}' \neq 0$, de donde $\mathcal{H}' = \mathcal{H}_\pi$. Luego U es sobreyectivo y por lo tanto $\mathcal{H} \underset{\cong}{\overset{U}{\to}} \mathcal{H}_\pi$.

Para ver que $\pi(T) = UTU^*$ para todo $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$ basta mostrar que $\pi(\theta_{\eta,\tau})U = U\theta_{\eta,\tau}$ para todos $\eta, \tau \in \mathcal{H}$. Ahora, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}U\theta_{\eta,\tau}(\zeta) &= U(\langle \zeta, \tau\rangle\eta) = \langle \zeta, \tau\rangle U(\eta) = \langle \zeta, \tau\rangle\pi(\theta_{\eta,\xi})x \\ &= \pi(\theta_{\eta,\tau}\theta_{\zeta,\xi})x\end{aligned}$$

Considérese ahora $x \in \mathcal{H}_\pi$ tal que $x = P(x)$ y $\|x\| = 1$. Definimos $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ como $U(\eta) = \pi(\theta_{\eta,\xi})x$. Entonces U es lineal, y como $\pi(\theta_{\xi,\xi})x = P(x) = x$:

$$\begin{aligned}\langle U\eta, U\eta'\rangle_{\mathcal{H}_\pi} &= \langle \pi(\theta_{\eta,\xi})x, \pi(\theta_{\eta',\xi})x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \pi(\theta_{\xi,\eta'}\theta_{\eta,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\ &= \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}}\langle \pi(\theta_{\xi,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

Entonces U es una isometría. Sea $\mathcal{H}' = \overline{\operatorname{span}}\{\pi(\theta_{\eta,\xi})x : \eta \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{H}_\pi$. Entonces $x \in \mathcal{H}'$ porque $x = \pi(\theta_{\xi,\xi})x$. Además $\mathcal{H}'$ es π-invariante: si $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$:

$$\pi(T)(\pi(\theta_{\eta,\xi})x) = \pi(T\theta_{\eta,\xi})x = \pi(\theta_{T\eta,\xi})x \in \mathcal{H}'.$$

Luego $\pi(T)\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}'$ para todo $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$. Pero π es irreducible y $\mathcal{H}' \neq 0$, de donde $\mathcal{H}' = \mathcal{H}_\pi$. Luego U es sobreyectivo y por lo tanto $\mathcal{H} \underset{\cong}{\overset{U}{\to}} \mathcal{H}_\pi$.

Para ver que $\pi(T) = UTU^*$ para todo $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$ basta mostrar que $\pi(\theta_{\eta,\tau})U = U\theta_{\eta,\tau}$ para todos $\eta, \tau \in \mathcal{H}$. Ahora, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}U\theta_{\eta,\tau}(\zeta) &= U(\langle \zeta, \tau\rangle \eta) = \langle \zeta, \tau\rangle U(\eta) = \langle \zeta, \tau\rangle \pi(\theta_{\eta,\xi})x \\ &= \pi(\theta_{\eta,\tau}\theta_{\zeta,\xi})x = \pi(\theta_{\eta,\tau})\pi(\theta_{\zeta,\xi})x\end{aligned}$$

Considérese ahora $x \in \mathcal{H}_\pi$ tal que $x = P(x)$ y $\|x\| = 1$. Definimos $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\pi$ como $U(\eta) = \pi(\theta_{\eta,\xi})x$. Entonces U es lineal, y como $\pi(\theta_{\xi,\xi})x = P(x) = x$:

$$\begin{aligned}\langle U\eta, U\eta'\rangle_{\mathcal{H}_\pi} &= \langle \pi(\theta_{\eta,\xi})x, \pi(\theta_{\eta',\xi})x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \pi(\theta_{\xi,\eta'}\theta_{\eta,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\ &= \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}}\langle \pi(\theta_{\xi,\xi})x, x\rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

Entonces U es una isometría. Sea $\mathcal{H}' = \overline{\text{span}}\{\pi(\theta_{\eta,\xi})x : \eta \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{H}_\pi$. Entonces $x \in \mathcal{H}'$ porque $x = \pi(\theta_{\xi,\xi})x$. Además $\mathcal{H}'$ es π-invariante: si $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$:

$$\pi(T)(\pi(\theta_{\eta,\xi})x) = \pi(T\theta_{\eta,\xi})x = \pi(\theta_{T\eta,\xi})x \in \mathcal{H}'.$$

Luego $\pi(T)\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}'$ para todo $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$. Pero π es irreducible y $\mathcal{H}' \neq 0$, de donde $\mathcal{H}' = \mathcal{H}_\pi$. Luego U es sobreyectivo y por lo tanto $\mathcal{H} \underset{\cong}{\overset{U}{\to}} \mathcal{H}_\pi$.

Para ver que $\pi(T) = UTU^*$ para todo $T \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$ basta mostrar que $\pi(\theta_{\eta,\tau})U = U\theta_{\eta,\tau}$ para todos $\eta, \tau \in \mathcal{H}$. Ahora, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}U\theta_{\eta,\tau}(\zeta) &= U(\langle \zeta, \tau\rangle \eta) = \langle \zeta, \tau\rangle U(\eta) = \langle \zeta, \tau\rangle \pi(\theta_{\eta,\xi})x \\ &= \pi(\theta_{\eta,\tau}\theta_{\zeta,\xi})x = \pi(\theta_{\eta,\tau})\pi(\theta_{\zeta,\xi})x = \pi(\theta_{\eta,\tau})U(\zeta).\end{aligned}$$

Corolario

Sea $\pi : M_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{B}(\mathbb{C}^n)$ *la representación natural,*

Corolario

Sea $\pi : M_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{B}(\mathbb{C}^n)$ *la representación natural,*

Corolario

Sea $\pi : M_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{B}(\mathbb{C}^n)$ *la representación natural, es decir que si* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ *y* $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$*,*

Corolario

Sea $\pi : M_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{B}(\mathbb{C}^n)$ *la representación natural, es decir que si* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ *y* $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, *entonces* $\pi(A)\mathrm{x} := \mathrm{y}$,

Corolario

Sea $\pi : M_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{B}(\mathbb{C}^n)$ *la representación natural, es decir que si* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ *y* $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$*, entonces* $\pi(A)\mathrm{x} := \mathrm{y}$*, donde* $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n)$*, con* $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$*,* $\forall i = 1, \ldots, n$*.*

Corolario

Sea $\pi : M_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{B}(\mathbb{C}^n)$ *la representación natural, es decir que si* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ *y* $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, *entonces* $\pi(A)\mathrm{x} := \mathrm{y}$, *donde* $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, *con* $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, $\forall i = 1, \ldots, n$. *Entonces toda representación irreducible de* $M_n(\mathbb{C})$ *es unitariamente equivalente a* π,

Corolario

Sea $\pi : M_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{B}(\mathbb{C}^n)$ *la representación natural, es decir que si* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ *y* $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$*, entonces* $\pi(A)\mathrm{x} := \mathrm{y}$*, donde* $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n)$*, con* $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$*,* $\forall i = 1, \ldots, n$*. Entonces toda representación irreducible de* $M_n(\mathbb{C})$ *es unitariamente equivalente a* π*, y toda representación no degenerada de* $M_n(\mathbb{C})$ *es unitariamente equivalente a una suma directa de copias de* π*.*

Corolario

$\mathrm{K}(\mathcal{H})$ *es simple.*

Corolario

Sea $\pi : M_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{B}(\mathbb{C}^n)$ *la representación natural, es decir que si* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ *y* $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$*, entonces* $\pi(A)\mathrm{x} := \mathrm{y}$*, donde* $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n)$*, con* $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$*,* $\forall i = 1, \ldots, n$*. Entonces toda representación irreducible de* $M_n(\mathbb{C})$ *es unitariamente equivalente a* π*, y toda representación no degenerada de* $M_n(\mathbb{C})$ *es unitariamente equivalente a una suma directa de copias de* π*.*

Corolario

$\mathrm{K}(\mathcal{H})$ *es simple.*

Demostración.

Sea $J \neq \mathrm{K}(\mathcal{H})$, $J \lhd \mathrm{K}(\mathcal{H})$,

Corolario

Sea $\pi : M_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{B}(\mathbb{C}^n)$ *la representación natural, es decir que si* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ *y* $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$*, entonces* $\pi(A)\mathrm{x} := \mathrm{y}$*, donde* $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n)$*, con* $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$*,* $\forall i = 1, \ldots, n$*. Entonces toda representación irreducible de* $M_n(\mathbb{C})$ *es unitariamente equivalente a* π*, y toda representación no degenerada de* $M_n(\mathbb{C})$ *es unitariamente equivalente a una suma directa de copias de* π*.*

Corolario

$\mathrm{K}(\mathcal{H})$ *es simple.*

Demostración.

Sea $J \neq \mathrm{K}(\mathcal{H})$, $J \lhd \mathrm{K}(\mathcal{H})$,

Corolario

Sea $\pi : M_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{B}(\mathbb{C}^n)$ *la representación natural, es decir que si* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ *y* $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, *entonces* $\pi(A)\mathrm{x} := \mathrm{y}$, *donde* $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, *con* $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$, $\forall i = 1, \ldots, n$. *Entonces toda representación irreducible de* $M_n(\mathbb{C})$ *es unitariamente equivalente a* π, *y toda representación no degenerada de* $M_n(\mathbb{C})$ *es unitariamente equivalente a una suma directa de copias de* π.

Corolario

$\mathrm{K}(\mathcal{H})$ *es simple.*

Demostración.

Sea $J \neq \mathrm{K}(\mathcal{H})$, $J \lhd \mathrm{K}(\mathcal{H})$, y sea $\pi : \frac{\mathrm{K}(\mathcal{H})}{J} \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ una representación irreducible.

Corolario

Sea $\pi : M_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{B}(\mathbb{C}^n)$ *la representación natural, es decir que si* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ *y* $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$*, entonces* $\pi(A)\mathrm{x} := \mathrm{y}$*, donde* $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n)$*, con* $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$*,* $\forall i = 1, \ldots, n$*. Entonces toda representación irreducible de* $M_n(\mathbb{C})$ *es unitariamente equivalente a* π*, y toda representación no degenerada de* $M_n(\mathbb{C})$ *es unitariamente equivalente a una suma directa de copias de* π*.*

Corolario

$\mathrm{K}(\mathcal{H})$ *es simple.*

Demostración.

Sea $J \neq \mathrm{K}(\mathcal{H})$, $J \lhd \mathrm{K}(\mathcal{H})$, y sea $\pi : \frac{\mathrm{K}(\mathcal{H})}{J} \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ una representación irreducible. Si $q : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \frac{\mathrm{K}(\mathcal{H})}{J}$ es la proyección,

Corolario

Sea $\pi : M_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{B}(\mathbb{C}^n)$ *la representación natural, es decir que si* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ *y* $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$*, entonces* $\pi(A)\mathrm{x} := \mathrm{y}$*, donde* $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n)$*, con* $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$*,* $\forall i = 1, \ldots, n$*. Entonces toda representación irreducible de* $M_n(\mathbb{C})$ *es unitariamente equivalente a* π*, y toda representación no degenerada de* $M_n(\mathbb{C})$ *es unitariamente equivalente a una suma directa de copias de* π*.*

Corolario

$\mathrm{K}(\mathcal{H})$ *es simple.*

Demostración.

Sea $J \neq \mathrm{K}(\mathcal{H})$, $J \lhd \mathrm{K}(\mathcal{H})$, y sea $\pi : \frac{\mathrm{K}(\mathcal{H})}{J} \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ una representación irreducible. Si $q : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \frac{\mathrm{K}(\mathcal{H})}{J}$ es la proyección, entonces $\pi \circ q : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es una representación irreducible.

Corolario

Sea $\pi : M_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{B}(\mathbb{C}^n)$ *la representación natural, es decir que si* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ *y* $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, *entonces* $\pi(A)\mathrm{x} := \mathrm{y}$, *donde* $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, *con* $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$, $\forall i = 1, \ldots, n$. *Entonces toda representación irreducible de* $M_n(\mathbb{C})$ *es unitariamente equivalente a* π, *y toda representación no degenerada de* $M_n(\mathbb{C})$ *es unitariamente equivalente a una suma directa de copias de* π.

Corolario

$\mathrm{K}(\mathcal{H})$ *es simple.*

Demostración.

Sea $J \neq \mathrm{K}(\mathcal{H})$, $J \lhd \mathrm{K}(\mathcal{H})$, y sea $\pi : \frac{\mathrm{K}(\mathcal{H})}{J} \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ una representación irreducible. Si $q : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \frac{\mathrm{K}(\mathcal{H})}{J}$ es la proyección, entonces $\pi \circ q : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es una representación irreducible. Entonces $\pi \circ q \underset{u}{\sim} \iota$.

Corolario

Sea $\pi : M_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{B}(\mathbb{C}^n)$ *la representación natural, es decir que si* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ *y* $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, *entonces* $\pi(A)\mathrm{x} := \mathrm{y}$, *donde* $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, *con* $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, $\forall i = 1, \ldots, n$. *Entonces toda representación irreducible de* $M_n(\mathbb{C})$ *es unitariamente equivalente a* π, *y toda representación no degenerada de* $M_n(\mathbb{C})$ *es unitariamente equivalente a una suma directa de copias de* π.

Corolario

$\mathrm{K}(\mathcal{H})$ *es simple.*

Demostración.

Sea $J \neq \mathrm{K}(\mathcal{H})$, $J \lhd \mathrm{K}(\mathcal{H})$, y sea $\pi : \frac{\mathrm{K}(\mathcal{H})}{J} \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ una representación irreducible. Si $q : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \frac{\mathrm{K}(\mathcal{H})}{J}$ es la proyección, entonces $\pi \circ q : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es una representación irreducible. Entonces $\pi \circ q \underset{u}{\sim} \iota$. Luego $\ker q = 0$,

Corolario

Sea $\pi : M_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{B}(\mathbb{C}^n)$ *la representación natural, es decir que si* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ *y* $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$*, entonces* $\pi(A)\mathrm{x} := \mathrm{y}$*, donde* $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n)$*, con* $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$*,* $\forall i = 1, \ldots, n$*. Entonces toda representación irreducible de* $M_n(\mathbb{C})$ *es unitariamente equivalente a* π*, y toda representación no degenerada de* $M_n(\mathbb{C})$ *es unitariamente equivalente a una suma directa de copias de* π*.*

Corolario

$\mathrm{K}(\mathcal{H})$ *es simple.*

Demostración.

Sea $J \neq \mathrm{K}(\mathcal{H})$, $J \lhd \mathrm{K}(\mathcal{H})$, y sea $\pi : \frac{\mathrm{K}(\mathcal{H})}{J} \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ una representación irreducible. Si $q : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \frac{\mathrm{K}(\mathcal{H})}{J}$ es la proyección, entonces $\pi \circ q : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es una representación irreducible. Entonces $\pi \circ q \underset{u}{\sim} \iota$. Luego $\ker q = 0$, y por lo tanto $J = 0$. $\square$

Corolario

Sea $\pi : M_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{B}(\mathbb{C}^n)$ *la representación natural, es decir que si* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ *y* $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, *entonces* $\pi(A)\mathrm{x} := \mathrm{y}$, *donde* $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, *con* $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$, $\forall i = 1, \ldots, n$. *Entonces toda representación irreducible de* $M_n(\mathbb{C})$ *es unitariamente equivalente a* π, *y toda representación no degenerada de* $M_n(\mathbb{C})$ *es unitariamente equivalente a una suma directa de copias de* π.

Corolario

$\mathrm{K}(\mathcal{H})$ *es simple.*

Demostración.

Sea $J \neq \mathrm{K}(\mathcal{H})$, $J \lhd \mathrm{K}(\mathcal{H})$, y sea $\pi : \frac{\mathrm{K}(\mathcal{H})}{J} \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ una representación irreducible. Si $q : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \frac{\mathrm{K}(\mathcal{H})}{J}$ es la proyección, entonces $\pi \circ q : \mathrm{K}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es una representación irreducible. Entonces $\pi \circ q \underset{u}{\sim} \iota$. Luego $\ker q = 0$, y por lo tanto $J = 0$. □

Definición

Se dice que un ideal P de una C-álgebra A es* $\mathit{primitivo}$

Definición

Se dice que un ideal P de una C-álgebra A es $\mathit{primitivo}$*

Definición

Se dice que un ideal P de una C-álgebra A es* $\mathtt{primitivo}$ *si existe* $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ *irreducible tal que* $P = \ker\pi$.

Ejemplos

Definición

Se dice que un ideal P de una C-álgebra A es $\mathit{primitivo}$ si existe $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible tal que $P = \ker \pi$.*

Ejemplos

(1) *Si $A = C_0(X)$ entonces $J \lhd A$ es primitivo si y sólo si existe $x \in X$ tal que $J = \{a \in A : a(x) = 0\}$.*

Definición

Se dice que un ideal P de una C^*-álgebra A es $\mathtt{primitivo}$ *si existe* $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ *irreducible tal que* $P = \ker\pi$.

Ejemplos

(1) *Si $A = C_0(X)$ entonces $J \lhd A$ es primitivo si y sólo si existe $x \in X$ tal que $J = \{a \in A : a(x) = 0\}$.*

(2) *El único ideal primitivo de $\mathrm{K}(\mathcal{H})$ es el nulo.*

Definición

Se dice que un ideal P de una C^*-álgebra A es $\mathtt{primitivo}$ si existe $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible tal que $P = \ker\pi$.

Ejemplos

(1) *Si $A = C_0(X)$ entonces $J \lhd A$ es primitivo si y sólo si existe $x \in X$ tal que $J = \{a \in A : a(x) = 0\}$.*

(2) *El único ideal primitivo de $\mathrm{K}(\mathcal{H})$ es el nulo.*

Observación

Si $\pi \underset{u}{\sim} \pi'$,

Definición

Se dice que un ideal P de una C^*-álgebra A es $\mathtt{primitivo}$ *si existe* $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ *irreducible tal que* $P = \ker\pi$.

Ejemplos

(1) *Si* $A = C_0(X)$ *entonces* $J \lhd A$ *es primitivo si y sólo si existe* $x \in X$ *tal que* $J = \{a \in A : a(x) = 0\}$.

(2) *El único ideal primitivo de* $\mathrm{K}(\mathcal{H})$ *es el nulo.*

Observación

Si $\pi \underset{u}{\sim} \pi'$,

Definición

Se dice que un ideal P de una C^*-álgebra A es $\mathit{primitivo}$ *si existe* $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ *irreducible tal que* $P = \ker\pi$.

Ejemplos

(1) *Si* $A = C_0(X)$ *entonces* $J \lhd A$ *es primitivo si y sólo si existe* $x \in X$ *tal que* $J = \{a \in A : a(x) = 0\}$.

(2) *El único ideal primitivo de* $\mathrm{K}(\mathcal{H})$ *es el nulo.*

Observación

Si $\pi \underset{u}{\sim} \pi'$, *entonces existe* U *unitario tal que* $\pi(a) = U\pi'(a)U^*$ *para todo* $a \in A$,

Definición

Se dice que un ideal P de una C^*-álgebra A es $\mathtt{primitivo}$ *si existe* $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ *irreducible tal que* $P = \ker\pi$.

Ejemplos

(1) *Si* $A = C_0(X)$ *entonces* $J \lhd A$ *es primitivo si y sólo si existe* $x \in X$ *tal que* $J = \{a \in A : a(x) = 0\}$.

(2) *El único ideal primitivo de* $\mathrm{K}(\mathcal{H})$ *es el nulo.*

Observación

Si $\pi \underset{u}{\sim} \pi'$, *entonces existe* U *unitario tal que* $\pi(a) = U\pi'(a)U^*$ *para todo* $a \in A$, *y por lo tanto* $a \in \ker\pi$ *si y sólo si* $a \in \ker\pi'$.

Definición

Se dice que un ideal P de una C^*-álgebra A es $\mathit{primitivo}$ *si existe $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible tal que $P = \ker\pi$.*

Ejemplos

(1) *Si $A = C_0(X)$ entonces $J \lhd A$ es primitivo si y sólo si existe $x \in X$ tal que $J = \{a \in A : a(x) = 0\}$.*

(2) *El único ideal primitivo de $\mathrm{K}(\mathcal{H})$ es el nulo.*

Observación

Si $\pi \underset{u}{\sim} \pi'$, entonces existe U unitario tal que $\pi(a) = U\pi'(a)U^*$ para todo $a \in A$, y por lo tanto $a \in \ker\pi$ si y sólo si $a \in \ker\pi'$. Si $[\pi]$ es la clase de equivalencia unitaria de π,

Definición

Se dice que un ideal P de una C^*-álgebra A es $\mathtt{primitivo}$ *si existe* $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ *irreducible tal que* $P = \ker\pi$.

Ejemplos

(1) *Si* $A = C_0(X)$ *entonces* $J \lhd A$ *es primitivo si y sólo si existe* $x \in X$ *tal que* $J = \{a \in A : a(x) = 0\}$.

(2) *El único ideal primitivo de* $\mathrm{K}(\mathcal{H})$ *es el nulo.*

Observación

Si $\pi \underset{u}{\sim} \pi'$, *entonces existe* U *unitario tal que* $\pi(a) = U\pi'(a)U^*$ *para todo* $a \in A$, *y por lo tanto* $a \in \ker\pi$ *si y sólo si* $a \in \ker\pi'$. *Si* $[\pi]$ *es la clase de equivalencia unitaria de* π, *podemos definir entonces*

Definición

Se dice que un ideal P de una C^*-álgebra A es $\mathtt{primitivo}$ *si existe* $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ *irreducible tal que* $P = \ker\pi$.

Ejemplos

(1) *Si* $A = C_0(X)$ *entonces* $J \lhd A$ *es primitivo si y sólo si existe* $x \in X$ *tal que* $J = \{a \in A : a(x) = 0\}$.

(2) *El único ideal primitivo de* $\mathrm{K}(\mathcal{H})$ *es el nulo.*

Observación

Si $\pi \underset{u}{\sim} \pi'$, *entonces existe* U *unitario tal que* $\pi(a) = U\pi'(a)U^*$ *para todo* $a \in A$, *y por lo tanto* $a \in \ker\pi$ *si y sólo si* $a \in \ker\pi'$. *Si* $[\pi]$ *es la clase de equivalencia unitaria de* π, *podemos definir entonces*

$$\kappa : \{[\pi] : \pi \text{ es irreducible}\} \quad \to \quad \{P \lhd A : P \text{ es primitivo}\},$$

Definición

Se dice que un ideal P de una C^*-álgebra A es $\mathtt{primitivo}$ *si existe* $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ *irreducible tal que* $P = \ker\pi$.

Ejemplos

(1) *Si* $A = C_0(X)$ *entonces* $J \lhd A$ *es primitivo si y sólo si existe* $x \in X$ *tal que* $J = \{a \in A : a(x) = 0\}$.

(2) *El único ideal primitivo de* $\mathrm{K}(\mathcal{H})$ *es el nulo.*

Observación

Si $\pi \underset{u}{\sim} \pi'$, *entonces existe* U *unitario tal que* $\pi(a) = U\pi'(a)U^*$ *para todo* $a \in A$, *y por lo tanto* $a \in \ker\pi$ *si y sólo si* $a \in \ker\pi'$. *Si* $[\pi]$ *es la clase de equivalencia unitaria de* π, *podemos definir entonces*

$$\begin{aligned} \kappa : \{[\pi] : \pi \text{ es irreducible}\} &\to \{P \lhd A : P \text{ es primitivo}\}, \\ [\pi] &\longmapsto \ker\pi \end{aligned}$$

Definición

Se dice que un ideal P de una C^*-álgebra A es $\mathtt{primitivo}$ *si existe* $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ *irreducible tal que* $P = \ker\pi$.

Ejemplos

(1) *Si* $A = C_0(X)$ *entonces* $J \triangleleft A$ *es primitivo si y sólo si existe* $x \in X$ *tal que* $J = \{a \in A : a(x) = 0\}$.

(2) *El único ideal primitivo de* $\mathrm{K}(\mathcal{H})$ *es el nulo.*

Observación

Si $\pi \underset{u}{\sim} \pi'$, *entonces existe* U *unitario tal que* $\pi(a) = U\pi'(a)U^*$ *para todo* $a \in A$, *y por lo tanto* $a \in \ker\pi$ *si y sólo si* $a \in \ker\pi'$. *Si* $[\pi]$ *es la clase de equivalencia unitaria de* π, *podemos definir entonces*

$$\begin{aligned} \kappa : \{[\pi] : \pi \text{ es irreducible}\} &\to \{P \triangleleft A : P \text{ es primitivo}\}, \\ [\pi] &\longmapsto \ker\pi \end{aligned}$$

En general κ *no es inyectivo.*

Definición

Se dice que un ideal P de una C-álgebra A es* $\mathtt{primitivo}$ *si existe* $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ *irreducible tal que* $P = \ker\pi$.

Ejemplos

(1) *Si* $A = C_0(X)$ *entonces* $J \lhd A$ *es primitivo si y sólo si existe* $x \in X$ *tal que* $J = \{a \in A : a(x) = 0\}$.

(2) *El único ideal primitivo de* $\mathrm{K}(\mathcal{H})$ *es el nulo.*

Observación

Si $\pi \underset{u}{\sim} \pi'$, *entonces existe* U *unitario tal que* $\pi(a) = U\pi'(a)U^*$ *para todo* $a \in A$, *y por lo tanto* $a \in \ker\pi$ *si y sólo si* $a \in \ker\pi'$. *Si* $[\pi]$ *es la clase de equivalencia unitaria de* π, *podemos definir entonces*

$$\begin{aligned} \kappa : \{[\pi] : \pi \text{ es irreducible}\} &\to \{P \lhd A : P \text{ es primitivo}\}, \\ [\pi] &\longmapsto \ker\pi \end{aligned}$$

En general κ *no es inyectivo. Un ejemplo son las álgebras UHF o de Glimm,*

Definición

Se dice que un ideal P de una C^*-álgebra A es $\mathtt{primitivo}$ *si existe* $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ *irreducible tal que* $P = \ker\pi$.

Ejemplos

(1) *Si* $A = C_0(X)$ *entonces* $J \lhd A$ *es primitivo si y sólo si existe* $x \in X$ *tal que* $J = \{a \in A : a(x) = 0\}$.

(2) *El único ideal primitivo de* $\mathrm{K}(\mathcal{H})$ *es el nulo.*

Observación

Si $\pi \underset{u}{\sim} \pi'$, *entonces existe* U *unitario tal que* $\pi(a) = U\pi'(a)U^*$ *para todo* $a \in A$, *y por lo tanto* $a \in \ker\pi$ *si y sólo si* $a \in \ker\pi'$. *Si* $[\pi]$ *es la clase de equivalencia unitaria de* π, *podemos definir entonces*

$$\begin{aligned} \kappa : \{[\pi] : \pi \text{ es irreducible}\} &\to \{P \lhd A : P \text{ es primitivo}\}, \\ [\pi] &\longmapsto \ker\pi \end{aligned}$$

En general κ *no es inyectivo. Un ejemplo son las álgebras UHF o de Glimm, que son simples pero tienen una cantidad no numerable de clases de representaciones irreducibles.*

Proposición

Sea A una C^*-álgebra.

Proposición

Sea A una C^*-álgebra.

(a) *Si $I \lhd A$ entonces $I = \cap\{P : I \subseteq P$ y P es primitivo$\}$.*

Proposición

Sea A una C^*-álgebra.

(a) *Si $I \lhd A$ entonces $I = \cap\{P : I \subseteq P$ y P es primitivo$\}$.*

(b) *Si $P \lhd A$ es primitivo entonces P es primo,*

Proposición

Sea A una C^*-álgebra.

(a) *Si $I \lhd A$ entonces $I = \cap\{P : I \subseteq P$ y P es primitivo$\}$.*

(b) *Si $P \lhd A$ es primitivo entonces P es primo,*

Proposición

Sea A una C^*-álgebra.

(a) *Si $I \lhd A$ entonces $I = \cap\{P : I \subseteq P$ y P es primitivo$\}$.*

(b) *Si $P \lhd A$ es primitivo entonces P es primo, es decir: si $I, J \lhd A$ son tales que $IJ \subseteq P$ entonces $I \subset P$ o $J \subset P$.*

Proposición

Sea A una C^*-álgebra.

(a) *Si $I \lhd A$ entonces $I = \cap\{P : I \subseteq P$ y P es primitivo$\}$.*

(b) *Si $P \lhd A$ es primitivo entonces P es primo, es decir: si $I, J \lhd A$ son tales que $IJ \subseteq P$ entonces $I \subset P$ o $J \subset P$.*

Demostración.

Proposición

Sea A una C^*-álgebra.

(a) *Si $I \lhd A$ entonces $I = \cap\{P : I \subseteq P$ y P es primitivo$\}$.*

(b) *Si $P \lhd A$ es primitivo entonces P es primo, es decir: si $I, J \lhd A$ son tales que $IJ \subseteq P$ entonces $I \subset P$ o $J \subset P$.*

Demostración.

(a) Es claro que $I \subseteq \cap\{P : I \subseteq P$ y P es primitivo$\}$.

Proposición

Sea A una C^*-álgebra.

(a) *Si $I \lhd A$ entonces $I = \cap\{P : I \subseteq P$ y P es primitivo$\}$.*

(b) *Si $P \lhd A$ es primitivo entonces P es primo, es decir: si $I, J \lhd A$ son tales que $IJ \subseteq P$ entonces $I \subset P$ o $J \subset P$.*

Demostración.

(a) Es claro que $I \subseteq \cap\{P : I \subseteq P$ y P es primitivo$\}$.

Proposición

Sea A una C^*-álgebra.

(a) *Si $I \lhd A$ entonces $I = \cap\{P : I \subseteq P$ y P es primitivo$\}$.*

(b) *Si $P \lhd A$ es primitivo entonces P es primo, es decir: si $I, J \lhd A$ son tales que $IJ \subseteq P$ entonces $I \subset P$ o $J \subset P$.*

Demostración.

(a) Es claro que $I \subseteq \cap\{P : I \subseteq P$ y P es primitivo$\}$. Para ver la inclusión inversa consideremos $a \in A$ tal que $a \neq I$,

Proposición

Sea A una C^*-álgebra.

(a) *Si $I \lhd A$ entonces $I = \cap\{P : I \subseteq P$ y P es primitivo$\}$.*

(b) *Si $P \lhd A$ es primitivo entonces P es primo, es decir: si $I, J \lhd A$ son tales que $IJ \subseteq P$ entonces $I \subset P$ o $J \subset P$.*

Demostración.

(a) Es claro que $I \subseteq \cap\{P : I \subseteq P \text{ y } P$ es primitivo$\}$. Para ver la inclusión inversa consideremos $a \in A$ tal que $a \neq I$, y sea $q : A \to \frac{A}{I}$ es la proyección.

Proposición

Sea A una C^*-álgebra.

(a) *Si $I \lhd A$ entonces $I = \cap\{P : I \subseteq P$ y P es primitivo$\}$.*

(b) *Si $P \lhd A$ es primitivo entonces P es primo, es decir: si $I, J \lhd A$ son tales que $IJ \subseteq P$ entonces $I \subset P$ o $J \subset P$.*

Demostración.

(a) Es claro que $I \subseteq \cap\{P : I \subseteq P \text{ y } P$ es primitivo$\}$. Para ver la inclusión inversa consideremos $a \in A$ tal que $a \neq I$, y sea $q : A \to \frac{A}{I}$ es la proyección. Tomemos $\pi : \frac{A}{I} \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible y tal que $\pi(q(a)) \neq 0$.

Proposición

Sea A una C^*-álgebra.

(a) *Si $I \lhd A$ entonces $I = \cap\{P : I \subseteq P \text{ y } P \text{ es primitivo}\}$.*

(b) *Si $P \lhd A$ es primitivo entonces P es primo, es decir: si $I, J \lhd A$ son tales que $IJ \subseteq P$ entonces $I \subset P$ o $J \subset P$.*

Demostración.

(a) Es claro que $I \subseteq \cap\{P : I \subseteq P \text{ y } P \text{ es primitivo}\}$. Para ver la inclusión inversa consideremos $a \in A$ tal que $a \neq I$, y sea $q : A \to \frac{A}{I}$ es la proyección. Tomemos $\pi : \frac{A}{I} \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible y tal que $\pi(q(a)) \neq 0$. Entonces $\pi \circ q : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es irreducible,

Proposición

Sea A una C^*-álgebra.

(a) *Si $I \lhd A$ entonces $I = \cap\{P : I \subseteq P$ y P es primitivo$\}$.*

(b) *Si $P \lhd A$ es primitivo entonces P es primo, es decir: si $I, J \lhd A$ son tales que $IJ \subseteq P$ entonces $I \subset P$ o $J \subset P$.*

Demostración.

(a) Es claro que $I \subseteq \cap\{P : I \subseteq P \text{ y } P \text{ es primitivo}\}$. Para ver la inclusión inversa consideremos $a \in A$ tal que $a \neq I$, y sea $q : A \to \frac{A}{I}$ es la proyección. Tomemos $\pi : \frac{A}{I} \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible y tal que $\pi(q(a)) \neq 0$. Entonces $\pi \circ q : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es irreducible, y $a \notin P := \ker(\pi \circ q)$.

Proposición

Sea A una C^*-álgebra.

(a) *Si $I \lhd A$ entonces $I = \cap\{P : I \subseteq P$ y P es primitivo$\}$.*

(b) *Si $P \lhd A$ es primitivo entonces P es primo, es decir: si $I, J \lhd A$ son tales que $IJ \subseteq P$ entonces $I \subset P$ o $J \subset P$.*

Demostración.

(a) Es claro que $I \subseteq \cap\{P : I \subseteq P$ y P es primitivo$\}$. Para ver la inclusión inversa consideremos $a \in A$ tal que $a \neq I$, y sea $q : A \to \frac{A}{I}$ es la proyección. Tomemos $\pi : \frac{A}{I} \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible y tal que $\pi(q(a)) \neq 0$. Entonces $\pi \circ q : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es irreducible, y $a \notin P := \ker(\pi \circ q)$. Luego $a \notin \cap\{Q : Q$ es primitivo y $Q \supseteq I\}$. Entonces $\cap\{Q : Q$ es primitivo y $Q \supseteq I\} \subseteq I$.

Proposición

Sea A una C^*-álgebra.

(a) *Si $I \lhd A$ entonces $I = \cap\{P : I \subseteq P \text{ y } P \text{ es primitivo}\}$.*

(b) *Si $P \lhd A$ es primitivo entonces P es primo, es decir: si $I, J \lhd A$ son tales que $IJ \subseteq P$ entonces $I \subset P$ o $J \subset P$.*

Demostración.

(a) Es claro que $I \subseteq \cap\{P : I \subseteq P \text{ y } P \text{ es primitivo}\}$. Para ver la inclusión inversa consideremos $a \in A$ tal que $a \neq I$, y sea $q : A \to \frac{A}{I}$ es la proyección. Tomemos $\pi : \frac{A}{I} \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible y tal que $\pi(q(a)) \neq 0$. Entonces $\pi \circ q : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es irreducible, y $a \notin P := \ker(\pi \circ q)$. Luego $a \notin \cap\{Q : Q \text{ es primitivo y } Q \supseteq I\}$. Entonces $\cap\{Q : Q \text{ es primitivo y } Q \supseteq I\} \subseteq I$.

(b) Supongamos $J \not\subseteq P$.

Proposición

Sea A una C^*-álgebra.

(a) *Si $I \lhd A$ entonces $I = \cap\{P : I \subseteq P \text{ y } P \text{ es primitivo}\}$.*

(b) *Si $P \lhd A$ es primitivo entonces P es primo, es decir: si $I, J \lhd A$ son tales que $IJ \subseteq P$ entonces $I \subset P$ o $J \subset P$.*

Demostración.

(a) Es claro que $I \subseteq \cap\{P : I \subseteq P \text{ y } P \text{ es primitivo}\}$. Para ver la inclusión inversa consideremos $a \in A$ tal que $a \neq I$, y sea $q : A \to \frac{A}{I}$ es la proyección. Tomemos $\pi : \frac{A}{I} \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible y tal que $\pi(q(a)) \neq 0$. Entonces $\pi \circ q : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es irreducible, y $a \notin P := \ker(\pi \circ q)$. Luego $a \notin \cap\{Q : Q \text{ es primitivo y } Q \supseteq I\}$. Entonces $\cap\{Q : Q \text{ es primitivo y } Q \supseteq I\} \subseteq I$.

(b) Supongamos $J \not\subseteq P$.

Proposición

Sea A una C^*-álgebra.

(a) *Si $I \lhd A$ entonces $I = \cap\{P : I \subseteq P$ y P es primitivo$\}$.*

(b) *Si $P \lhd A$ es primitivo entonces P es primo, es decir: si $I, J \lhd A$ son tales que $IJ \subseteq P$ entonces $I \subset P$ o $J \subset P$.*

Demostración.

(a) Es claro que $I \subseteq \cap\{P : I \subseteq P$ y P es primitivo$\}$. Para ver la inclusión inversa consideremos $a \in A$ tal que $a \neq I$, y sea $q : A \to \frac{A}{I}$ es la proyección. Tomemos $\pi : \frac{A}{I} \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible y tal que $\pi(q(a)) \neq 0$. Entonces $\pi \circ q : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es irreducible, y $a \notin P := \ker(\pi \circ q)$. Luego $a \notin \cap\{Q : Q$ es primitivo y $Q \supseteq I\}$. Entonces $\cap\{Q : Q$ es primitivo y $Q \supseteq I\} \subseteq I$.

(b) Supongamos $J \not\subseteq P$. Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible, con $P = \ker\pi$.

Proposición

Sea A una C^*-álgebra.

(a) *Si $I \lhd A$ entonces $I = \cap\{P : I \subseteq P$ y P es primitivo$\}$.*

(b) *Si $P \lhd A$ es primitivo entonces P es primo, es decir: si $I, J \lhd A$ son tales que $IJ \subseteq P$ entonces $I \subset P$ o $J \subset P$.*

Demostración.

(a) Es claro que $I \subseteq \cap\{P : I \subseteq P$ y P es primitivo$\}$. Para ver la inclusión inversa consideremos $a \in A$ tal que $a \neq I$, y sea $q : A \to \frac{A}{I}$ es la proyección. Tomemos $\pi : \frac{A}{I} \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible y tal que $\pi(q(a)) \neq 0$. Entonces $\pi \circ q : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es irreducible, y $a \notin P := \ker(\pi \circ q)$. Luego $a \notin \cap\{Q : Q$ es primitivo y $Q \supseteq I\}$. Entonces $\cap\{Q : Q$ es primitivo y $Q \supseteq I\} \subseteq I$.

(b) Supongamos $J \not\subseteq P$. Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible, con $P = \ker\pi$. Entonces $\pi(J) \neq 0$.

Proposición

Sea A una C^*-álgebra.

(a) *Si $I \lhd A$ entonces $I = \cap\{P : I \subseteq P \text{ y } P \text{ es primitivo}\}$.*

(b) *Si $P \lhd A$ es primitivo entonces P es primo, es decir: si $I, J \lhd A$ son tales que $IJ \subseteq P$ entonces $I \subset P$ o $J \subset P$.*

Demostración.

(a) Es claro que $I \subseteq \cap\{P : I \subseteq P \text{ y } P \text{ es primitivo}\}$. Para ver la inclusión inversa consideremos $a \in A$ tal que $a \neq I$, y sea $q : A \to \frac{A}{I}$ es la proyección. Tomemos $\pi : \frac{A}{I} \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible y tal que $\pi(q(a)) \neq 0$. Entonces $\pi \circ q : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es irreducible, y $a \notin P := \ker(\pi \circ q)$. Luego $a \notin \cap\{Q : Q \text{ es primitivo y } Q \supseteq I\}$. Entonces $\cap\{Q : Q \text{ es primitivo y } Q \supseteq I\} \subseteq I$.

(b) Supongamos $J \not\subseteq P$. Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible, con $P = \ker\pi$. Entonces $\pi(J) \neq 0$. Luego $\overline{\mathrm{span}}\pi(J)\mathcal{H}_\pi \neq 0$

Proposición

Sea A una C^*-álgebra.

(a) *Si $I \lhd A$ entonces $I = \cap\{P : I \subseteq P$ y P es primitivo$\}$.*

(b) *Si $P \lhd A$ es primitivo entonces P es primo, es decir: si $I, J \lhd A$ son tales que $IJ \subseteq P$ entonces $I \subset P$ o $J \subset P$.*

Demostración.

(a) Es claro que $I \subseteq \cap\{P : I \subseteq P$ y P es primitivo$\}$. Para ver la inclusión inversa consideremos $a \in A$ tal que $a \neq I$, y sea $q : A \to \frac{A}{I}$ es la proyección. Tomemos $\pi : \frac{A}{I} \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible y tal que $\pi(q(a)) \neq 0$. Entonces $\pi \circ q : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es irreducible, y $a \notin P := \ker(\pi \circ q)$. Luego $a \notin \cap\{Q : Q$ es primitivo y $Q \supseteq I\}$. Entonces $\cap\{Q : Q$ es primitivo y $Q \supseteq I\} \subseteq I$.

(b) Supongamos $J \not\subseteq P$. Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible, con $P = \ker\pi$. Entonces $\pi(J) \neq 0$. Luego $\overline{\mathrm{span}}\,\pi(J)\mathcal{H}_\pi \neq 0$ y es $\pi(A)$-invariante,

Proposición

Sea A una C^*-álgebra.

(a) *Si $I \triangleleft A$ entonces $I = \cap\{P : I \subseteq P$ y P es primitivo$\}$.*

(b) *Si $P \triangleleft A$ es primitivo entonces P es primo, es decir: si $I, J \triangleleft A$ son tales que $IJ \subseteq P$ entonces $I \subset P$ o $J \subset P$.*

Demostración.

(a) Es claro que $I \subseteq \cap\{P : I \subseteq P \text{ y } P$ es primitivo$\}$. Para ver la inclusión inversa consideremos $a \in A$ tal que $a \neq I$, y sea $q : A \to \frac{A}{I}$ es la proyección. Tomemos $\pi : \frac{A}{I} \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible y tal que $\pi(q(a)) \neq 0$. Entonces $\pi \circ q : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es irreducible, y $a \notin P := \ker(\pi \circ q)$. Luego $a \notin \cap\{Q : Q$ es primitivo y $Q \supseteq I\}$. Entonces $\cap\{Q : Q$ es primitivo y $Q \supseteq I\} \subseteq I$.

(b) Supongamos $J \not\subseteq P$. Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible, con $P = \ker\pi$. Entonces $\pi(J) \neq 0$. Luego $\overline{\mathrm{span}}\pi(J)\mathcal{H}_\pi \neq 0$ y es $\pi(A)$-invariante, pues $\pi(A)\pi(J) = \pi(AJ) = \pi(J)$.

Proposición

Sea A una C^*-álgebra.

(a) *Si $I \triangleleft A$ entonces $I = \cap\{P : I \subseteq P$ y P es primitivo$\}$.*

(b) *Si $P \triangleleft A$ es primitivo entonces P es primo, es decir: si $I, J \triangleleft A$ son tales que $IJ \subseteq P$ entonces $I \subset P$ o $J \subset P$.*

Demostración.

(a) Es claro que $I \subseteq \cap\{P : I \subseteq P \text{ y } P \text{ es primitivo}\}$. Para ver la inclusión inversa consideremos $a \in A$ tal que $a \neq I$, y sea $q : A \to \frac{A}{I}$ es la proyección. Tomemos $\pi : \frac{A}{I} \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible y tal que $\pi(q(a)) \neq 0$. Entonces $\pi \circ q : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es irreducible, y $a \notin P := \ker(\pi \circ q)$. Luego $a \notin \cap\{Q : Q \text{ es primitivo y } Q \supseteq I\}$. Entonces $\cap\{Q : Q \text{ es primitivo y } Q \supseteq I\} \subseteq I$.

(b) Supongamos $J \not\subseteq P$. Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible, con $P = \ker\pi$. Entonces $\pi(J) \neq 0$. Luego $\overline{\mathrm{span}}\pi(J)\mathcal{H}_\pi \neq 0$ y es $\pi(A)$-invariante, pues $\pi(A)\pi(J) = \pi(AJ) = \pi(J)$. Entonces $\overline{\mathrm{span}}\pi(J)\mathcal{H}_\pi = \mathcal{H}_\pi$.

Proposición

Sea A una C^*-álgebra.

(a) *Si $I \triangleleft A$ entonces $I = \cap\{P : I \subseteq P$ y P es primitivo$\}$.*

(b) *Si $P \triangleleft A$ es primitivo entonces P es primo, es decir: si $I, J \triangleleft A$ son tales que $IJ \subseteq P$ entonces $I \subset P$ o $J \subset P$.*

Demostración.

(a) Es claro que $I \subseteq \cap\{P : I \subseteq P$ y P es primitivo$\}$. Para ver la inclusión inversa consideremos $a \in A$ tal que $a \neq I$, y sea $q : A \to \frac{A}{I}$ es la proyección. Tomemos $\pi : \frac{A}{I} \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible y tal que $\pi(q(a)) \neq 0$. Entonces $\pi \circ q : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es irreducible, y $a \notin P := \ker(\pi \circ q)$. Luego $a \notin \cap\{Q : Q$ es primitivo y $Q \supseteq I\}$. Entonces $\cap\{Q : Q$ es primitivo y $Q \supseteq I\} \subseteq I$.

(b) Supongamos $J \not\subseteq P$. Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible, con $P = \ker\pi$. Entonces $\pi(J) \neq 0$. Luego $\overline{\mathrm{span}}\pi(J)\mathcal{H}_\pi \neq 0$ y es $\pi(A)$-invariante, pues $\pi(A)\pi(J) = \pi(AJ) = \pi(J)$. Entonces $\overline{\mathrm{span}}\pi(J)\mathcal{H}_\pi = \mathcal{H}_\pi$. Por otro lado:

Proposición

Sea A una C^*-álgebra.

(a) *Si $I \lhd A$ entonces $I = \cap\{P : I \subseteq P$ y P es primitivo$\}$.*

(b) *Si $P \lhd A$ es primitivo entonces P es primo, es decir: si $I, J \lhd A$ son tales que $IJ \subseteq P$ entonces $I \subset P$ o $J \subset P$.*

Demostración.

(a) Es claro que $I \subseteq \cap\{P : I \subseteq P$ y P es primitivo$\}$. Para ver la inclusión inversa consideremos $a \in A$ tal que $a \neq I$, y sea $q : A \to \frac{A}{I}$ es la proyección. Tomemos $\pi : \frac{A}{I} \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible y tal que $\pi(q(a)) \neq 0$. Entonces $\pi \circ q : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es irreducible, y $a \notin P := \ker(\pi \circ q)$. Luego $a \notin \cap\{Q : Q$ es primitivo y $Q \supseteq I\}$. Entonces $\cap\{Q : Q$ es primitivo y $Q \supseteq I\} \subseteq I$.

(b) Supongamos $J \not\subseteq P$. Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible, con $P = \ker\pi$. Entonces $\pi(J) \neq 0$. Luego $\overline{\mathrm{span}}\pi(J)\mathcal{H}_\pi \neq 0$ y es $\pi(A)$-invariante, pues $\pi(A)\pi(J) = \pi(AJ) = \pi(J)$. Entonces $\overline{\mathrm{span}}\pi(J)\mathcal{H}_\pi = \mathcal{H}_\pi$. Por otro lado: $\pi(I)(\pi(J)\mathcal{H}_\pi) = \pi(IJ)\mathcal{H}_\pi$

Proposición

Sea A una C^*-álgebra.

(a) *Si $I \lhd A$ entonces $I = \cap\{P : I \subseteq P \text{ y } P \text{ es primitivo}\}$.*

(b) *Si $P \lhd A$ es primitivo entonces P es primo, es decir: si $I, J \lhd A$ son tales que $IJ \subseteq P$ entonces $I \subset P$ o $J \subset P$.*

Demostración.

(a) Es claro que $I \subseteq \cap\{P : I \subseteq P \text{ y } P \text{ es primitivo}\}$. Para ver la inclusión inversa consideremos $a \in A$ tal que $a \neq I$, y sea $q : A \to \frac{A}{I}$ es la proyección. Tomemos $\pi : \frac{A}{I} \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible y tal que $\pi(q(a)) \neq 0$. Entonces $\pi \circ q : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es irreducible, y $a \notin P := \ker(\pi \circ q)$. Luego $a \notin \cap\{Q : Q \text{ es primitivo y } Q \supseteq I\}$. Entonces $\cap\{Q : Q \text{ es primitivo y } Q \supseteq I\} \subseteq I$.

(b) Supongamos $J \not\subseteq P$. Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible, con $P = \ker\pi$. Entonces $\pi(J) \neq 0$. Luego $\overline{\mathrm{span}}\pi(J)\mathcal{H}_\pi \neq 0$ y es $\pi(A)$-invariante, pues $\pi(A)\pi(J) = \pi(AJ) = \pi(J)$. Entonces $\overline{\mathrm{span}}\pi(J)\mathcal{H}_\pi = \mathcal{H}_\pi$. Por otro lado: $\pi(I)(\pi(J)\mathcal{H}_\pi) = \pi(IJ)\mathcal{H}_\pi \subseteq \pi(P)\mathcal{H}_\pi = 0$,

Proposición

Sea A una C^*-álgebra.

(a) *Si $I \lhd A$ entonces $I = \cap\{P : I \subseteq P$ y P es primitivo$\}$.*

(b) *Si $P \lhd A$ es primitivo entonces P es primo, es decir: si $I, J \lhd A$ son tales que $IJ \subseteq P$ entonces $I \subset P$ o $J \subset P$.*

Demostración.

(a) Es claro que $I \subseteq \cap\{P : I \subseteq P$ y P es primitivo$\}$. Para ver la inclusión inversa consideremos $a \in A$ tal que $a \neq I$, y sea $q : A \to \frac{A}{I}$ es la proyección. Tomemos $\pi : \frac{A}{I} \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible y tal que $\pi(q(a)) \neq 0$. Entonces $\pi \circ q : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es irreducible, y $a \notin P := \ker(\pi \circ q)$. Luego $a \notin \cap\{Q : Q$ es primitivo y $Q \supseteq I\}$. Entonces $\cap\{Q : Q$ es primitivo y $Q \supseteq I\} \subseteq I$.

(b) Supongamos $J \not\subseteq P$. Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible, con $P = \ker\pi$. Entonces $\pi(J) \neq 0$. Luego $\overline{\mathrm{span}}\pi(J)\mathcal{H}_\pi \neq 0$ y es $\pi(A)$-invariante, pues $\pi(A)\pi(J) = \pi(AJ) = \pi(J)$. Entonces $\overline{\mathrm{span}}\pi(J)\mathcal{H}_\pi = \mathcal{H}_\pi$. Por otro lado: $\pi(I)(\pi(J)\mathcal{H}_\pi) = \pi(IJ)\mathcal{H}_\pi \subseteq \pi(P)\mathcal{H}_\pi = 0$, de donde $\pi(I)(\overline{\mathrm{span}}\pi(J)\mathcal{H}_\pi) = 0$,

Proposición

Sea A una C^*-álgebra.

(a) *Si $I \lhd A$ entonces $I = \cap\{P : I \subseteq P$ y P es primitivo$\}$.*

(b) *Si $P \lhd A$ es primitivo entonces P es primo, es decir: si $I, J \lhd A$ son tales que $IJ \subseteq P$ entonces $I \subset P$ o $J \subset P$.*

Demostración.

(a) Es claro que $I \subseteq \cap\{P : I \subseteq P \text{ y } P \text{ es primitivo}\}$. Para ver la inclusión inversa consideremos $a \in A$ tal que $a \neq I$, y sea $q : A \to \frac{A}{I}$ es la proyección. Tomemos $\pi : \frac{A}{I} \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible y tal que $\pi(q(a)) \neq 0$. Entonces $\pi \circ q : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es irreducible, y $a \notin P := \ker(\pi \circ q)$. Luego $a \notin \cap\{Q : Q \text{ es primitivo y } Q \supseteq I\}$. Entonces $\cap\{Q : Q \text{ es primitivo y } Q \supseteq I\} \subseteq I$.

(b) Supongamos $J \not\subseteq P$. Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible, con $P = \ker\pi$. Entonces $\pi(J) \neq 0$. Luego $\overline{\mathrm{span}}\pi(J)\mathcal{H}_\pi \neq 0$ y es $\pi(A)$-invariante, pues $\pi(A)\pi(J) = \pi(AJ) = \pi(J)$. Entonces $\overline{\mathrm{span}}\pi(J)\mathcal{H}_\pi = \mathcal{H}_\pi$. Por otro lado: $\pi(I)(\pi(J)\mathcal{H}_\pi) = \pi(IJ)\mathcal{H}_\pi \subseteq \pi(P)\mathcal{H}_\pi = 0$, de donde $\pi(I)(\overline{\mathrm{span}}\pi(J)\mathcal{H}_\pi) = 0$, es decir $\pi(I) = 0$,

Proposición

Sea A una C^*-álgebra.

(a) *Si $I \lhd A$ entonces $I = \cap\{P : I \subseteq P$ y P es primitivo$\}$.*

(b) *Si $P \lhd A$ es primitivo entonces P es primo, es decir: si $I, J \lhd A$ son tales que $IJ \subseteq P$ entonces $I \subset P$ o $J \subset P$.*

Demostración.

(a) Es claro que $I \subseteq \cap\{P : I \subseteq P$ y P es primitivo$\}$. Para ver la inclusión inversa consideremos $a \in A$ tal que $a \neq I$, y sea $q : A \to \frac{A}{I}$ es la proyección. Tomemos $\pi : \frac{A}{I} \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible y tal que $\pi(q(a)) \neq 0$. Entonces $\pi \circ q : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es irreducible, y $a \notin P := \ker(\pi \circ q)$. Luego $a \notin \cap\{Q : Q$ es primitivo y $Q \supseteq I\}$. Entonces $\cap\{Q : Q$ es primitivo y $Q \supseteq I\} \subseteq I$.

(b) Supongamos $J \not\subseteq P$. Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible, con $P = \ker\pi$. Entonces $\pi(J) \neq 0$. Luego $\overline{\mathrm{span}}\pi(J)\mathcal{H}_\pi \neq 0$ y es $\pi(A)$-invariante, pues $\pi(A)\pi(J) = \pi(AJ) = \pi(J)$. Entonces $\overline{\mathrm{span}}\pi(J)\mathcal{H}_\pi = \mathcal{H}_\pi$. Por otro lado: $\pi(I)(\pi(J)\mathcal{H}_\pi) = \pi(IJ)\mathcal{H}_\pi \subseteq \pi(P)\mathcal{H}_\pi = 0$, de donde $\pi(I)(\overline{\mathrm{span}}\pi(J)\mathcal{H}_\pi) = 0$, es decir $\pi(I) = 0$, y por lo tanto $I \subseteq P$.

Definición

Sea A una C^*-álgebra.

Definición

Sea A una C^*-álgebra.

Definición

Sea A una C^*-álgebra. Se llama $\mathtt{espacio\ de\ ideales\ primitivos}$ *de* A

Definición

Sea A una C^*-álgebra. Se llama `espacio de ideales primitivos` *de A al espacio topológico* $\mathrm{Prim}(A)$

Definición

Sea A una C^*-álgebra. Se llama `espacio de ideales primitivos` *de A al espacio topológico* $\mathrm{Prim}(A)$ *cuyos elementos son los ideales primitivos de A*

Definición

Sea A una C^*-álgebra. Se llama `espacio de ideales primitivos` *de A al espacio topológico $\mathrm{Prim}(A)$ cuyos elementos son los ideales primitivos de A y cuya topología es la Jacobson (o hull-kernel),*

Definición

Sea A una C^*-álgebra. Se llama $\mathtt{espacio\ de\ ideales\ primitivos}$ *de A al espacio topológico $\mathrm{Prim}(A)$ cuyos elementos son los ideales primitivos de A y cuya topología es la Jacobson (o hull-kernel), que se describe a continuación.*

Definición

Sea A una C^*-álgebra. Se llama $\mathtt{espacio\ de\ ideales\ primitivos}$ *de A al espacio topológico $\mathrm{Prim}(A)$ cuyos elementos son los ideales primitivos de A y cuya topología es la Jacobson (o hull-kernel), que se describe a continuación.*

Si $F \subseteq \mathrm{Prim}(A)$ entonces $\overline{F} = \{P \in \mathrm{Prim}(A) : P \supseteq \cap\{Q : Q \in F\}\}$.

Definición

Sea A una C^*-álgebra. Se llama $\mathtt{espacio\ de\ ideales\ primitivos}$ *de A al espacio topológico $\mathrm{Prim}(A)$ cuyos elementos son los ideales primitivos de A y cuya topología es la Jacobson (o hull-kernel), que se describe a continuación.*

Si $F \subseteq \mathrm{Prim}(A)$ entonces $\overline{F} = \{P \in \mathrm{Prim}(A) : P \supseteq \cap\{Q : Q \in F\}\}$. El mapa $F \mapsto \overline{F}$ es un operador de clausura,

Definición

Sea A una C^*-álgebra. Se llama `espacio de ideales primitivos` *de A al espacio topológico $\mathrm{Prim}(A)$ cuyos elementos son los ideales primitivos de A y cuya topología es la Jacobson (o hull-kernel), que se describe a continuación.*

Si $F \subseteq \mathrm{Prim}(A)$ entonces $\overline{F} = \{P \in \mathrm{Prim}(A) : P \supseteq \cap\{Q : Q \in F\}\}$. El mapa $F \mapsto \overline{F}$ es un operador de clausura, que es el que define la topología hull-kernel.

Definición

Sea A una C^*-álgebra. Se llama `espacio de ideales primitivos` *de A al espacio topológico $\mathrm{Prim}(A)$ cuyos elementos son los ideales primitivos de A y cuya topología es la Jacobson (o hull-kernel), que se describe a continuación.*

Si $F \subseteq \mathrm{Prim}(A)$ entonces $\overline{F} = \{P \in \mathrm{Prim}(A) : P \supseteq \cap\{Q : Q \in F\}\}$. El mapa $F \mapsto \overline{F}$ es un operador de clausura, que es el que define la topología hull-kernel. $F \subseteq \mathrm{Prim}(A)$ es cerrado si y sólo si

Definición

Sea A una C^*-álgebra. Se llama `espacio de ideales primitivos` *de A al espacio topológico $\operatorname{Prim}(A)$ cuyos elementos son los ideales primitivos de A y cuya topología es la Jacobson (o hull-kernel), que se describe a continuación.*

Si $F \subseteq \operatorname{Prim}(A)$ entonces $\overline{F} = \{P \in \operatorname{Prim}(A) : P \supseteq \cap\{Q : Q \in F\}\}$. El mapa $F \mapsto \overline{F}$ es un operador de clausura, que es el que define la topología hull-kernel. $F \subseteq \operatorname{Prim}(A)$ es cerrado si y sólo si

$$F = \overline{F} := \{Q \in \operatorname{Prim}(A) : Q \supseteq \cap\{P : P \in F\}\}.$$

Definición

Sea A una C^*-álgebra. Se llama `espacio de ideales primitivos` *de A al espacio topológico $\mathrm{Prim}(A)$ cuyos elementos son los ideales primitivos de A y cuya topología es la Jacobson (o hull-kernel), que se describe a continuación.*

Si $F \subseteq \mathrm{Prim}(A)$ entonces $\overline{F} = \{P \in \mathrm{Prim}(A) : P \supseteq \cap\{Q : Q \in F\}\}$. El mapa $F \mapsto \overline{F}$ es un operador de clausura, que es el que define la topología hull-kernel. $F \subseteq \mathrm{Prim}(A)$ es cerrado si y sólo si

$$F = \overline{F} := \{Q \in \mathrm{Prim}(A) : Q \supseteq \cap\{P : P \in F\}\}.$$

Entonces los abiertos de $\mathrm{Prim}(A)$ son los conjuntos $\mathcal{O}_J$,

Definición

Sea A una C^*-álgebra. Se llama $\mathtt{espacio\ de\ ideales\ primitivos}$ *de A al espacio topológico* $\mathrm{Prim}(A)$ *cuyos elementos son los ideales primitivos de A y cuya topología es la Jacobson (o hull-kernel), que se describe a continuación.*

Si $F \subseteq \mathrm{Prim}(A)$ entonces $\overline{F} = \{P \in \mathrm{Prim}(A) : P \supseteq \cap\{Q : Q \in F\}\}$. El mapa $F \mapsto \overline{F}$ es un operador de clausura, que es el que define la topología hull-kernel. $F \subseteq \mathrm{Prim}(A)$ es cerrado si y sólo si

$$F = \overline{F} := \{Q \in \mathrm{Prim}(A) : Q \supseteq \cap\{P : P \in F\}\}.$$

Entonces los abiertos de $\mathrm{Prim}(A)$ son los conjuntos $\mathcal{O}_J$, donde $J \triangleleft A$, y $\mathcal{O}_J := \{P \in \mathrm{Prim}(A) : P \not\supseteq J\}$.

Definición

Sea A una C^*-álgebra. Se llama espacio de ideales primitivos *de A al espacio topológico $\mathrm{Prim}(A)$ cuyos elementos son los ideales primitivos de A y cuya topología es la Jacobson (o hull-kernel), que se describe a continuación.*

Si $F \subseteq \mathrm{Prim}(A)$ entonces $\overline{F} = \{P \in \mathrm{Prim}(A) : P \supseteq \cap\{Q : Q \in F\}\}$. El mapa $F \mapsto \overline{F}$ es un operador de clausura, que es el que define la topología hull-kernel. $F \subseteq \mathrm{Prim}(A)$ es cerrado si y sólo si

$$F = \overline{F} := \{Q \in \mathrm{Prim}(A) : Q \supseteq \cap\{P : P \in F\}\}.$$

Entonces los abiertos de $\mathrm{Prim}(A)$ son los conjuntos $\mathcal{O}_J$, donde $J \lhd A$, y $\mathcal{O}_J := \{P \in \mathrm{Prim}(A) : P \not\supseteq J\}$. Observar que si $I \subseteq J$, entonces $\mathcal{O}_I \subseteq \mathcal{O}_J$.

Definición

Sea A una C^*-álgebra. Se llama `espacio de ideales primitivos` *de A al espacio topológico $\mathrm{Prim}(A)$ cuyos elementos son los ideales primitivos de A y cuya topología es la Jacobson (o hull-kernel), que se describe a continuación.*

Si $F \subseteq \mathrm{Prim}(A)$ entonces $\overline{F} = \{P \in \mathrm{Prim}(A) : P \supseteq \cap\{Q : Q \in F\}\}$. El mapa $F \mapsto \overline{F}$ es un operador de clausura, que es el que define la topología hull-kernel. $F \subseteq \mathrm{Prim}(A)$ es cerrado si y sólo si

$$F = \overline{F} := \{Q \in \mathrm{Prim}(A) : Q \supseteq \cap\{P : P \in F\}\}.$$

Entonces los abiertos de $\mathrm{Prim}(A)$ son los conjuntos $\mathcal{O}_J$, donde $J \lhd A$, y $\mathcal{O}_J := \{P \in \mathrm{Prim}(A) : P \not\supseteq J\}$. Observar que si $I \subseteq J$, entonces $\mathcal{O}_I \subseteq \mathcal{O}_J$. Además:

Definición

Sea A una C^*-álgebra. Se llama `espacio de ideales primitivos` *de A al espacio topológico $\mathrm{Prim}(A)$ cuyos elementos son los ideales primitivos de A y cuya topología es la Jacobson (o hull-kernel), que se describe a continuación.*

Si $F \subseteq \mathrm{Prim}(A)$ entonces $\overline{F} = \{P \in \mathrm{Prim}(A) : P \supseteq \cap\{Q : Q \in F\}\}$. El mapa $F \mapsto \overline{F}$ es un operador de clausura, que es el que define la topología hull-kernel. $F \subseteq \mathrm{Prim}(A)$ es cerrado si y sólo si

$$F = \overline{F} := \{Q \in \mathrm{Prim}(A) : Q \supseteq \cap\{P : P \in F\}\}.$$

Entonces los abiertos de $\mathrm{Prim}(A)$ son los conjuntos $\mathcal{O}_J$, donde $J \lhd A$, y $\mathcal{O}_J := \{P \in \mathrm{Prim}(A) : P \not\supseteq J\}$. Observar que si $I \subseteq J$, entonces $\mathcal{O}_I \subseteq \mathcal{O}_J$. Además:

(a) $\mathcal{O}_I \cap \mathcal{O}_J = \mathcal{O}_{I \cap J}$

Definición

Sea A una C^*-álgebra. Se llama `espacio de ideales primitivos` *de A al espacio topológico* $\mathrm{Prim}(A)$ *cuyos elementos son los ideales primitivos de A y cuya topología es la Jacobson (o hull-kernel), que se describe a continuación.*

Si $F \subseteq \mathrm{Prim}(A)$ entonces $\overline{F} = \{P \in \mathrm{Prim}(A) : P \supseteq \cap\{Q : Q \in F\}\}$. El mapa $F \mapsto \overline{F}$ es un operador de clausura, que es el que define la topología hull-kernel. $F \subseteq \mathrm{Prim}(A)$ es cerrado si y sólo si

$$F = \overline{F} := \{Q \in \mathrm{Prim}(A) : Q \supseteq \cap\{P : P \in F\}\}.$$

Entonces los abiertos de $\mathrm{Prim}(A)$ son los conjuntos $\mathcal{O}_J$, donde $J \lhd A$, y $\mathcal{O}_J := \{P \in \mathrm{Prim}(A) : P \not\supseteq J\}$. Observar que si $I \subseteq J$, entonces $\mathcal{O}_I \subseteq \mathcal{O}_J$. Además:

(a) $\mathcal{O}_I \cap \mathcal{O}_J = \mathcal{O}_{I \cap J}$

Definición

Sea A una C^*-álgebra. Se llama `espacio de ideales primitivos` *de A al espacio topológico* $\mathrm{Prim}(A)$ *cuyos elementos son los ideales primitivos de A y cuya topología es la Jacobson (o hull-kernel), que se describe a continuación.*

Si $F \subseteq \mathrm{Prim}(A)$ entonces $\overline{F} = \{P \in \mathrm{Prim}(A) : P \supseteq \cap\{Q : Q \in F\}\}$. El mapa $F \mapsto \overline{F}$ es un operador de clausura, que es el que define la topología hull-kernel. $F \subseteq \mathrm{Prim}(A)$ es cerrado si y sólo si

$$F = \overline{F} := \{Q \in \mathrm{Prim}(A) : Q \supseteq \cap\{P : P \in F\}\}.$$

Entonces los abiertos de $\mathrm{Prim}(A)$ son los conjuntos $\mathcal{O}_J$, donde $J \lhd A$, y $\mathcal{O}_J := \{P \in \mathrm{Prim}(A) : P \not\supseteq J\}$. Observar que si $I \subseteq J$, entonces $\mathcal{O}_I \subseteq \mathcal{O}_J$. Además:

(a) $\mathcal{O}_I \cap \mathcal{O}_J = \mathcal{O}_{I\cap J}$ (porque si $P \supseteq I \cap J$,

Definición

Sea A una C^*-álgebra. Se llama **espacio de ideales primitivos** *de A al espacio topológico $\mathrm{Prim}(A)$ cuyos elementos son los ideales primitivos de A y cuya topología es la Jacobson (o hull-kernel), que se describe a continuación.*

Si $F \subseteq \mathrm{Prim}(A)$ entonces $\overline{F} = \{P \in \mathrm{Prim}(A) : P \supseteq \cap\{Q : Q \in F\}\}$. El mapa $F \mapsto \overline{F}$ es un operador de clausura, que es el que define la topología hull-kernel. $F \subseteq \mathrm{Prim}(A)$ es cerrado si y sólo si

$$F = \overline{F} := \{Q \in \mathrm{Prim}(A) : Q \supseteq \cap\{P : P \in F\}\}.$$

Entonces los abiertos de $\mathrm{Prim}(A)$ son los conjuntos $\mathcal{O}_J$, donde $J \triangleleft A$, y $\mathcal{O}_J := \{P \in \mathrm{Prim}(A) : P \not\supseteq J\}$. Observar que si $I \subseteq J$, entonces $\mathcal{O}_I \subseteq \mathcal{O}_J$. Además:

(a) $\mathcal{O}_I \cap \mathcal{O}_J = \mathcal{O}_{I \cap J}$ (porque si $P \supseteq I \cap J$, entonces $P \supseteq I$ o $P \supseteq J$ porque P es primo,

Definición

Sea A una C^*-álgebra. Se llama `espacio de ideales primitivos` *de A al espacio topológico $\mathrm{Prim}(A)$ cuyos elementos son los ideales primitivos de A y cuya topología es la Jacobson (o hull-kernel), que se describe a continuación.*

Si $F \subseteq \mathrm{Prim}(A)$ entonces $\overline{F} = \{P \in \mathrm{Prim}(A) : P \supseteq \cap\{Q : Q \in F\}\}$. El mapa $F \mapsto \overline{F}$ es un operador de clausura, que es el que define la topología hull-kernel. $F \subseteq \mathrm{Prim}(A)$ es cerrado si y sólo si

$$F = \overline{F} := \{Q \in \mathrm{Prim}(A) : Q \supseteq \cap\{P : P \in F\}\}.$$

Entonces los abiertos de $\mathrm{Prim}(A)$ son los conjuntos $\mathcal{O}_J$, donde $J \triangleleft A$, y $\mathcal{O}_J := \{P \in \mathrm{Prim}(A) : P \not\supseteq J\}$. Observar que si $I \subseteq J$, entonces $\mathcal{O}_I \subseteq \mathcal{O}_J$. Además:

(a) $\mathcal{O}_I \cap \mathcal{O}_J = \mathcal{O}_{I\cap J}$ (porque si $P \supseteq I \cap J$, entonces $P \supseteq I$ o $P \supseteq J$ porque P es primo, luego es $\mathcal{O}_I \cap \mathcal{O}_J \subseteq \mathcal{O}_{I\cap J}$).

Definición

Sea A una C^*-álgebra. Se llama `espacio de ideales primitivos` *de A al espacio topológico* $\mathrm{Prim}(A)$ *cuyos elementos son los ideales primitivos de A y cuya topología es la Jacobson (o hull-kernel), que se describe a continuación.*

Si $F \subseteq \mathrm{Prim}(A)$ entonces $\overline{F} = \{P \in \mathrm{Prim}(A) : P \supseteq \cap\{Q : Q \in F\}\}$. El mapa $F \mapsto \overline{F}$ es un operador de clausura, que es el que define la topología hull-kernel. $F \subseteq \mathrm{Prim}(A)$ es cerrado si y sólo si

$$F = \overline{F} := \{Q \in \mathrm{Prim}(A) : Q \supseteq \cap\{P : P \in F\}\}.$$

Entonces los abiertos de $\mathrm{Prim}(A)$ son los conjuntos $\mathcal{O}_J$, donde $J \lhd A$, y $\mathcal{O}_J := \{P \in \mathrm{Prim}(A) : P \not\supseteq J\}$. Observar que si $I \subseteq J$, entonces $\mathcal{O}_I \subseteq \mathcal{O}_J$. Además:

(a) $\mathcal{O}_I \cap \mathcal{O}_J = \mathcal{O}_{I\cap J}$ (porque si $P \supseteq I \cap J$, entonces $P \supseteq I$ o $P \supseteq J$ porque P es primo, luego es $\mathcal{O}_I \cap \mathcal{O}_J \subseteq \mathcal{O}_{I\cap J}$).

(b) $\cup_i \mathcal{O}_{J_i} = \mathcal{O}_{\overline{\sum_i J_i}}$.

Definición

Se llama $\mathit{espectro}$ de A al espacio topológico $\hat{A}$

Definición

Se llama $\mathit{espectro}$ *de* A *al espacio topológico* $\hat{A}$

Definición

Se llama $\mathtt{espectro}$ *de* A *al espacio topológico* $\hat{A}$ *cuyos elementos son las clases de equivalencia unitaria de representaciones irreducibles de* A*,*

Definición

Se llama $\mathscr{espectro}$ *de* A *al espacio topológico* $\hat{A}$ *cuyos elementos son las clases de equivalencia unitaria de representaciones irreducibles de* A*, con la topología inicial correspondiente a*

Definición

Se llama $\mathscr{espectro}$ *de* A *al espacio topológico* $\hat{A}$ *cuyos elementos son las clases de equivalencia unitaria de representaciones irreducibles de* A*, con la topología inicial correspondiente a*

$$\kappa : \hat{A} \to \mathrm{Prim}(A),$$
$$[\pi] \mapsto \ker \pi$$

Definición

Se llama $\mathcal{espectro}$ *de* A *al espacio topológico* $\hat{A}$ *cuyos elementos son las clases de equivalencia unitaria de representaciones irreducibles de* A*, con la topología inicial correspondiente a*

$$\begin{aligned}\kappa : \hat{A} &\to \mathrm{Prim}(A),\\ [\pi] &\mapsto \ker \pi\end{aligned}$$

(o sea:

Definición

Se llama espectro *de A al espacio topológico $\hat{A}$ cuyos elementos son las clases de equivalencia unitaria de representaciones irreducibles de A, con la topología inicial correspondiente a*

$$\kappa : \hat{A} \to \mathrm{Prim}(A),$$
$$[\pi] \mapsto \ker \pi$$

(o sea: los abiertos de $\hat{A}$ son los conjuntos $\kappa^{-1}(V)$ donde V es abierto en $\mathrm{Prim}(A)$).

Definición

Se llama espectro *de A al espacio topológico $\hat{A}$ cuyos elementos son las clases de equivalencia unitaria de representaciones irreducibles de A, con la topología inicial correspondiente a*

$$\kappa : \hat{A} \to \mathrm{Prim}(A), \qquad [\pi] \mapsto \ker \pi$$

(o sea: los abiertos de $\hat{A}$ son los conjuntos $\kappa^{-1}(V)$ donde V es abierto en $\mathrm{Prim}(A)$).

Observación

Si existe $[\pi] \in \hat{A}$ tal que π es fiel, entonces $0 \in \mathrm{Prim}(A)$ y $\overline{\{0\}} = \mathrm{Prim}(A)$.

Definición

Se llama $\mathscr{espectro}$ *de A al espacio topológico $\hat{A}$ cuyos elementos son las clases de equivalencia unitaria de representaciones irreducibles de A, con la topología inicial correspondiente a*

$$\kappa : \hat{A} \to \mathrm{Prim}(A),$$
$$[\pi] \mapsto \ker \pi$$

(o sea: los abiertos de $\hat{A}$ son los conjuntos $\kappa^{-1}(V)$ donde V es abierto en $\mathrm{Prim}(A)$).

Observación

Si existe $[\pi] \in \hat{A}$ tal que π es fiel, entonces $0 \in \mathrm{Prim}(A)$ y $\overline{\{0\}} = \mathrm{Prim}(A)$.

Proposición

Sean $a \in A$ y $r > 0$. Entonces $K := \{[\pi] \in \hat{A} : \|\pi(a)\| \geq r\}$ es compacto en $\hat{A}$.

Demostración.

Sean $\{F_i\} \downarrow$ una flia. de cerrados $\neq \emptyset$ en K,

Demostración.

Sean $\{F_i\} \downarrow$ una flia. de cerrados $\neq \emptyset$ en K,

Demostración.

Sean $\{F_i\}\downarrow$ una flia. de cerrados $\neq \emptyset$ en K, y $J_i := \cap\{\ker\pi : [\pi] \in F_i\}$, $\forall i$.

Demostración.

Sean $\{F_i\}\downarrow$ una flia. de cerrados $\neq \emptyset$ en K, y $J_i := \cap\{\ker\pi : [\pi] \in F_i\}$, $\forall i$. Entonces sea $J_i \lhd A$.

Demostración.

Sean $\{F_i\} \downarrow$ una flia. de cerrados $\neq \emptyset$ en K, y $J_i := \cap\{\ker\pi : [\pi] \in F_i\}$, $\forall i$. Entonces sea $J_i \lhd A$. Si $i \leq i'$, entonces $J_i \subseteq J_{i'}$.

Demostración.

Sean $\{F_i\}\downarrow$ una flia. de cerrados $\neq \emptyset$ en K, y $J_i := \cap\{\ker\pi : [\pi] \in F_i\}$, $\forall i$. Entonces sea $J_i \lhd A$. Si $i \leq i'$, entonces $J_i \subseteq J_{i'}$. Sea $J = \overline{\cup_i J_i} \lhd A$,

Demostración.

Sean $\{F_i\}\downarrow$ una flia. de cerrados $\neq \emptyset$ en K, y $J_i := \cap\{\ker\pi : [\pi] \in F_i\}$, $\forall i$. Entonces sea $J_i \lhd A$. Si $i \leq i'$, entonces $J_i \subseteq J_{i'}$. Sea $J = \overline{\cup_i J_i} \lhd A$, y sea $\pi_i = \bigoplus\{\pi : [\pi] \in F_i\}$.

Demostración.

Sean $\{F_i\}\downarrow$ una flia. de cerrados $\neq\emptyset$ en K, y $J_i := \cap\{\ker\pi : [\pi]\in F_i\}$, $\forall i$. Entonces sea $J_i \lhd A$. Si $i\leq i'$, entonces $J_i\subseteq J_{i'}$. Sea $J=\overline{\cup_i J_i}\lhd A$, y sea $\pi_i = \bigoplus\{\pi : [\pi]\in F_i\}$. Entonces $\ker\pi_i = \cap\{\ker\pi : [\pi]\in F_i\} = J_i$.

Demostración.

Sean $\{F_i\}\downarrow$ una flia. de cerrados $\neq\emptyset$ en K, y $J_i := \cap\{\ker\pi : [\pi]\in F_i\}$, $\forall i$. Entonces sea $J_i \lhd A$. Si $i\leq i'$, entonces $J_i\subseteq J_{i'}$. Sea $J=\overline{\cup_i J_i}\lhd A$, y sea $\pi_i=\bigoplus\{\pi : [\pi]\in F_i\}$. Entonces $\ker\pi_i=\cap\{\ker\pi : [\pi]\in F_i\}=J_i$. Por otro lado $\|a+J_i\|=\|\pi_i(a)\|\geq\|\pi(a)\|\geq r$, $\forall[\pi]\in F_i$.

Demostración.

Sean $\{F_i\}\downarrow$ una flia. de cerrados $\neq\emptyset$ en K, y $J_i := \cap\{\ker\pi : [\pi]\in F_i\}$, $\forall i$. Entonces sea $J_i \lhd A$. Si $i\leq i'$, entonces $J_i\subseteq J_{i'}$. Sea $J=\overline{\cup_i J_i}\lhd A$, y sea $\pi_i=\bigoplus\{\pi : [\pi]\in F_i\}$. Entonces $\ker\pi_i=\cap\{\ker\pi : [\pi]\in F_i\}=J_i$. Por otro lado $\|a+J_i\|=\|\pi_i(a)\|\geq\|\pi(a)\|\geq r$, $\forall[\pi]\in F_i$. Esto es porque

Demostración.

Sean $\{F_i\}\downarrow$ una flia. de cerrados $\neq \emptyset$ en K, y $J_i := \cap\{\ker\pi : [\pi] \in F_i\}$, $\forall i$. Entonces sea $J_i \lhd A$. Si $i \leq i'$, entonces $J_i \subseteq J_{i'}$. Sea $J = \overline{\cup_i J_i} \lhd A$, y sea $\pi_i = \bigoplus\{\pi : [\pi] \in F_i\}$. Entonces $\ker\pi_i = \cap\{\ker\pi : [\pi] \in F_i\} = J_i$. Por otro lado $\|a + J_i\| = \|\pi_i(a)\| \geq \|\pi(a)\| \geq r$, $\forall[\pi] \in F_i$. Esto es porque

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi_i"] \arrow[d] & \mathrm{B}(\mathcal{H}_i) \\ \frac{A}{J_i} \arrow[ur, "\widetilde{\pi}_i"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración.

Sean $\{F_i\}\downarrow$ una flia. de cerrados $\neq \emptyset$ en K, y $J_i := \cap\{\ker\pi : [\pi] \in F_i\}$, $\forall i$. Entonces sea $J_i \lhd A$. Si $i \leq i'$, entonces $J_i \subseteq J_{i'}$. Sea $J = \overline{\cup_i J_i} \lhd A$, y sea $\pi_i = \bigoplus\{\pi : [\pi] \in F_i\}$. Entonces $\ker\pi_i = \cap\{\ker\pi : [\pi] \in F_i\} = J_i$. Por otro lado $\|a + J_i\| = \|\pi_i(a)\| \geq \|\pi(a)\| \geq r$, $\forall[\pi] \in F_i$. Esto es porque

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi_i"] \arrow[d] & \mathrm{B}(\mathcal{H}_i) \\ \frac{A}{J_i} \arrow[ur, "\widetilde{\pi}_i"'] & \end{tikzcd}$$

Por otra parte $\|a + J\| = d(a, J) = \inf d(a, J_i) = \|a + J_i\| \geq r$.

Demostración.

Sean $\{F_i\}\downarrow$ una flia. de cerrados $\neq\emptyset$ en K, y $J_i := \cap\{\ker\pi : [\pi]\in F_i\}$, $\forall i$. Entonces sea $J_i \lhd A$. Si $i\leq i'$, entonces $J_i\subseteq J_{i'}$. Sea $J=\overline{\cup_i J_i}\lhd A$, y sea $\pi_i=\bigoplus\{\pi : [\pi]\in F_i\}$. Entonces $\ker\pi_i=\cap\{\ker\pi : [\pi]\in F_i\}=J_i$. Por otro lado $\|a+J_i\|=\|\pi_i(a)\|\geq\|\pi(a)\|\geq r$, $\forall[\pi]\in F_i$. Esto es porque

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi_i"] \arrow[d] & \mathrm{B}(\mathcal{H}_i) \\ \frac{A}{J_i} \arrow[ur, "\widetilde{\pi}_i"'] & \end{tikzcd}$$

Por otra parte $\|a+J\|=d(a,J)=\text{ínf}\, d(a,J_i)=\|a+J_i\|\geq r$. Entonces $\|a+J\|\geq r$.

Demostración.

Sean $\{F_i\}\downarrow$ una flia. de cerrados $\neq \emptyset$ en K, y $J_i := \cap\{\ker\pi : [\pi] \in F_i\}$, $\forall i$. Entonces sea $J_i \lhd A$. Si $i \leq i'$, entonces $J_i \subseteq J_{i'}$. Sea $J = \overline{\cup_i J_i} \lhd A$, y sea $\pi_i = \bigoplus\{\pi : [\pi] \in F_i\}$. Entonces $\ker\pi_i = \cap\{\ker\pi : [\pi] \in F_i\} = J_i$. Por otro lado $\|a + J_i\| = \|\pi_i(a)\| \geq \|\pi(a)\| \geq r$, $\forall[\pi] \in F_i$. Esto es porque

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi_i"] \arrow[d] & \mathrm{B}(\mathcal{H}_i) \\ \frac{A}{J_i} \arrow[ur, "\widetilde{\pi}_i"'] & \end{tikzcd}$$

Por otra parte $\|a + J\| = d(a, J) = \inf d(a, J_i) = \|a + J_i\| \geq r$. Entonces $\|a + J\| \geq r$. Luego existe $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible tal que $\|\pi(a)\| \geq r$ y $\ker\pi \supseteq J$

Demostración.

Sean $\{F_i\}\downarrow$ una flia. de cerrados $\neq \emptyset$ en K, y $J_i := \cap\{\ker\pi : [\pi] \in F_i\}$, $\forall i$. Entonces sea $J_i \lhd A$. Si $i \leq i'$, entonces $J_i \subseteq J_{i'}$. Sea $J = \overline{\cup_i J_i} \lhd A$, y sea $\pi_i = \bigoplus\{\pi : [\pi] \in F_i\}$. Entonces $\ker\pi_i = \cap\{\ker\pi : [\pi] \in F_i\} = J_i$. Por otro lado $\|a + J_i\| = \|\pi_i(a)\| \geq \|\pi(a)\| \geq r$, $\forall[\pi] \in F_i$. Esto es porque

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi_i"] \arrow[d] & \mathrm{B}(\mathcal{H}_i) \\ \frac{A}{J_i} \arrow[ur, "\widetilde{\pi}_i"'] & \end{tikzcd}$$

Por otra parte $\|a + J\| = d(a, J) = \inf d(a, J_i) = \|a + J_i\| \geq r$. Entonces $\|a + J\| \geq r$. Luego existe $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible tal que $\|\pi(a)\| \geq r$ y $\ker\pi \supseteq J$ (basta tomar $\pi' \in \frac{\hat{A}}{J}$ tal que $\|\pi'(a + J)\| = \|a + J\|$ y tomar $\pi = \pi' \circ q$, donde q es la proyección).

Demostración.

Sean $\{F_i\}\downarrow$ una flia. de cerrados $\neq \emptyset$ en K, y $J_i := \cap\{\ker\pi : [\pi]\in F_i\}$, $\forall i$. Entonces sea $J_i \lhd A$. Si $i \leq i'$, entonces $J_i \subseteq J_{i'}$. Sea $J = \overline{\cup_i J_i} \lhd A$, y sea $\pi_i = \bigoplus\{\pi : [\pi]\in F_i\}$. Entonces $\ker\pi_i = \cap\{\ker\pi : [\pi]\in F_i\} = J_i$. Por otro lado $\|a + J_i\| = \|\pi_i(a)\| \geq \|\pi(a)\| \geq r$, $\forall[\pi]\in F_i$. Esto es porque

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi_i"] \arrow[d] & \mathrm{B}(\mathcal{H}_i) \\ \frac{A}{J_i} \arrow[ur, "\widetilde{\pi}_i"'] & \end{tikzcd}$$

Por otra parte $\|a + J\| = d(a, J) = \text{ínf}\, d(a, J_i) = \|a + J_i\| \geq r$. Entonces $\|a + J\| \geq r$. Luego existe $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible tal que $\|\pi(a)\| \geq r$ y $\ker\pi \supseteq J$ (basta tomar $\pi' \in \hat{\frac{A}{J}}$ tal que $\|\pi'(a + J)\| = \|a + J\|$ y tomar $\pi = \pi' \circ q$, donde q es la proyección). Entonces

Demostración.

Sean $\{F_i\}\downarrow$ una flia. de cerrados $\neq \emptyset$ en K, y $J_i := \cap\{\ker\pi : [\pi] \in F_i\}$, $\forall i$. Entonces sea $J_i \lhd A$. Si $i \leq i'$, entonces $J_i \subseteq J_{i'}$. Sea $J = \overline{\cup_i J_i} \lhd A$, y sea $\pi_i = \bigoplus\{\pi : [\pi] \in F_i\}$. Entonces $\ker\pi_i = \cap\{\ker\pi : [\pi] \in F_i\} = J_i$. Por otro lado $\|a + J_i\| = \|\pi_i(a)\| \geq \|\pi(a)\| \geq r$, $\forall [\pi] \in F_i$. Esto es porque

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi_i"] \arrow[d] & \mathrm{B}(\mathcal{H}_i) \\ \frac{A}{J_i} \arrow[ur, "\widetilde{\pi}_i"'] & \end{tikzcd}$$

Por otra parte $\|a + J\| = d(a, J) = \inf d(a, J_i) = \|a + J_i\| \geq r$. Entonces $\|a + J\| \geq r$. Luego existe $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible tal que $\|\pi(a)\| \geq r$ y $\ker\pi \supseteq J$ (basta tomar $\pi' \in \hat{\frac{A}{J}}$ tal que $\|\pi'(a + J)\| = \|a + J\|$ y tomar $\pi = \pi' \circ q$, donde q es la proyección). Entonces

(i) $\pi \in K$.

Demostración.

Sean $\{F_i\}\downarrow$ una flia. de cerrados $\neq \emptyset$ en K, y $J_i := \cap\{\ker\pi : [\pi] \in F_i\}$, $\forall i$. Entonces sea $J_i \lhd A$. Si $i \leq i'$, entonces $J_i \subseteq J_{i'}$. Sea $J = \overline{\cup_i J_i} \lhd A$, y sea $\pi_i = \bigoplus\{\pi : [\pi] \in F_i\}$. Entonces $\ker\pi_i = \cap\{\ker\pi : [\pi] \in F_i\} = J_i$. Por otro lado $\|a + J_i\| = \|\pi_i(a)\| \geq \|\pi(a)\| \geq r$, $\forall[\pi] \in F_i$. Esto es porque

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi_i"] \arrow[d] & \mathrm{B}(\mathcal{H}_i) \\ \frac{A}{J_i} \arrow[ur, "\widetilde{\pi}_i"'] & \end{tikzcd}$$

Por otra parte $\|a + J\| = d(a, J) = \inf d(a, J_i) = \|a + J_i\| \geq r$. Entonces $\|a + J\| \geq r$. Luego existe $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible tal que $\|\pi(a)\| \geq r$ y $\ker\pi \supseteq J$ (basta tomar $\pi' \in \hat{\frac{A}{J}}$ tal que $\|\pi'(a + J)\| = \|a + J\|$ y tomar $\pi = \pi' \circ q$, donde q es la proyección). Entonces

(i) $\pi \in K$.

(ii) $\pi \in F_i = \overline{F_i}$, pues $\ker\pi = J \supseteq J_i = \ker\pi_i$.

Demostración.

Sean $\{F_i\}\downarrow$ una flia. de cerrados $\neq \emptyset$ en K, y $J_i := \cap\{\ker\pi : [\pi] \in F_i\}$, $\forall i$. Entonces sea $J_i \lhd A$. Si $i \leq i'$, entonces $J_i \subseteq J_{i'}$. Sea $J = \overline{\cup_i J_i} \lhd A$, y sea $\pi_i = \bigoplus\{\pi : [\pi] \in F_i\}$. Entonces $\ker\pi_i = \cap\{\ker\pi : [\pi] \in F_i\} = J_i$. Por otro lado $\|a + J_i\| = \|\pi_i(a)\| \geq \|\pi(a)\| \geq r$, $\forall[\pi] \in F_i$. Esto es porque

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi_i"] \arrow[d] & \mathrm{B}(\mathcal{H}_i) \\ \frac{A}{J_i} \arrow[ur, "\widetilde{\pi}_i"'] & \end{tikzcd}$$

Por otra parte $\|a + J\| = d(a, J) = \inf d(a, J_i) = \|a + J_i\| \geq r$. Entonces $\|a + J\| \geq r$. Luego existe $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible tal que $\|\pi(a)\| \geq r$ y $\ker\pi \supseteq J$ (basta tomar $\pi' \in \hat{\frac{A}{J}}$ tal que $\|\pi'(a + J)\| = \|a + J\|$ y tomar $\pi = \pi' \circ q$, donde q es la proyección). Entonces

(i) $\pi \in K$.

(ii) $\pi \in F_i = \overline{F_i}$, pues $\ker\pi = J \supseteq J_i = \ker\pi_i$.

Demostración.

Sean $\{F_i\}\downarrow$ una flia. de cerrados $\neq \emptyset$ en K, y $J_i := \cap\{\ker\pi : [\pi] \in F_i\}$, $\forall i$. Entonces sea $J_i \lhd A$. Si $i \le i'$, entonces $J_i \subseteq J_{i'}$. Sea $J = \overline{\cup_i J_i} \lhd A$, y sea $\pi_i = \bigoplus\{\pi : [\pi] \in F_i\}$. Entonces $\ker\pi_i = \cap\{\ker\pi : [\pi] \in F_i\} = J_i$. Por otro lado $\|a + J_i\| = \|\pi_i(a)\| \ge \|\pi(a)\| \ge r$, $\forall [\pi] \in F_i$. Esto es porque

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi_i"] \arrow[d] & \mathrm{B}(\mathcal{H}_i) \\ \frac{A}{J_i} \arrow[ur, "\widetilde{\pi}_i"'] & \end{tikzcd}$$

Por otra parte $\|a + J\| = d(a, J) = \inf d(a, J_i) = \|a + J_i\| \ge r$. Entonces $\|a + J\| \ge r$. Luego existe $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible tal que $\|\pi(a)\| \ge r$ y $\ker\pi \supseteq J$ (basta tomar $\pi' \in \hat{\frac{A}{J}}$ tal que $\|\pi'(a + J)\| = \|a + J\|$ y tomar $\pi = \pi' \circ q$, donde q es la proyección). Entonces

(i) $\pi \in K$.

(ii) $\pi \in F_i = \overline{F_i}$, pues $\ker\pi = J \supseteq J_i = \ker\pi_i$.

Entonces $\pi \in \cap F_i$, luego K tiene la propiedad de intersección finita,

Demostración.

Sean $\{F_i\}\downarrow$ una flia. de cerrados $\neq \emptyset$ en K, y $J_i := \cap\{\ker\pi : [\pi] \in F_i\}$, $\forall i$. Entonces sea $J_i \lhd A$. Si $i \leq i'$, entonces $J_i \subseteq J_{i'}$. Sea $J = \overline{\cup_i J_i} \lhd A$, y sea $\pi_i = \bigoplus\{\pi : [\pi] \in F_i\}$. Entonces $\ker\pi_i = \cap\{\ker\pi : [\pi] \in F_i\} = J_i$. Por otro lado $\|a + J_i\| = \|\pi_i(a)\| \geq \|\pi(a)\| \geq r$, $\forall[\pi] \in F_i$. Esto es porque

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi_i"] \arrow[d] & \mathrm{B}(\mathcal{H}_i) \\ \frac{A}{J_i} \arrow[ur, "\widetilde{\pi}_i"'] & \end{tikzcd}$$

Por otra parte $\|a + J\| = d(a, J) = \inf d(a, J_i) = \|a + J_i\| \geq r$. Entonces $\|a + J\| \geq r$. Luego existe $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible tal que $\|\pi(a)\| \geq r$ y $\ker\pi \supseteq J$ (basta tomar $\pi' \in \hat{\frac{A}{J}}$ tal que $\|\pi'(a + J)\| = \|a + J\|$ y tomar $\pi = \pi' \circ q$, donde q es la proyección). Entonces

(i) $\pi \in K$.

(ii) $\pi \in F_i = \overline{F_i}$, pues $\ker\pi = J \supseteq J_i = \ker\pi_i$.

Entonces $\pi \in \cap F_i$, luego K tiene la propiedad de intersección finita, y por lo tanto es compacto. □

Lema

Para cada $a \in A$, *el mapa* $\nu : \hat{A} \to \mathbb{R}$ *tal que* $\nu(\pi) = \|\pi(a)\|$ *es semicontinua inferiormente,*

Lema

Para cada $a \in A$*, el mapa* $\nu : \hat{A} \to \mathbb{R}$ *tal que* $\nu(\pi) = \|\pi(a)\|$ *es semicontinua inferiormente,*

Lema

Para cada $a \in A$, *el mapa* $\nu : \hat{A} \to \mathbb{R}$ *tal que* $\nu(\pi) = \|\pi(a)\|$ *es semicontinua inferiormente, o sea* $\nu^{-1}((-\infty, \alpha])$ *es cerrado en* $\hat{A}$

Lema

Para cada $a \in A$, *el mapa* $\nu : \hat{A} \to \mathbb{R}$ *tal que* $\nu(\pi) = \|\pi(a)\|$ *es semicontinua inferiormente, o sea* $\nu^{-1}((-\infty, \alpha])$ *es cerrado en* $\hat{A}$ *(equivalentemente:* $\nu^{-1}((\alpha, \infty))$ *es abietro en* $\hat{A}$ *)*

Lema

Para cada a $\in A$, *el mapa* $\nu : \hat{A} \to \mathbb{R}$ *tal que* $\nu(\pi) = \|\pi(a)\|$ *es semicontinua inferiormente, o sea* $\nu^{-1}((-\infty, \alpha])$ *es cerrado en* $\hat{A}$ *(equivalentemente:* $\nu^{-1}((\alpha, \infty))$ *es abietro en* $\hat{A}$ *) para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lema

Para cada $a \in A$, el mapa $\nu : \hat{A} \to \mathbb{R}$ tal que $\nu(\pi) = \|\pi(a)\|$ es semicontinua inferiormente, o sea $\nu^{-1}((-\infty, \alpha])$ es cerrado en $\hat{A}$ (equivalentemente: $\nu^{-1}((\alpha, \infty))$ es abietro en $\hat{A}$) para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demostración.

Se puede suponer que $a \geq 0$ porque $\|\pi(a^*a)\| = \|\pi(a)\|^2$ para todo a.

Lema

Para cada $a \in A$, el mapa $\nu : \hat{A} \to \mathbb{R}$ tal que $\nu(\pi) = \|\pi(a)\|$ es semicontinua inferiormente, o sea $\nu^{-1}((-\infty, \alpha])$ es cerrado en $\hat{A}$ (equivalentemente: $\nu^{-1}((\alpha, \infty))$ es abietro en $\hat{A}$) para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demostración.

Se puede suponer que $a \geq 0$ porque $\|\pi(a^*a)\| = \|\pi(a)\|^2$ para todo a.

Lema

Para cada $a \in A$, el mapa $\nu : \hat{A} \to \mathbb{R}$ tal que $\nu(\pi) = \|\pi(a)\|$ es semicontinua inferiormente, o sea $\nu^{-1}((-\infty, \alpha])$ es cerrado en $\hat{A}$ (equivalentemente: $\nu^{-1}((\alpha, \infty))$ es abietro en $\hat{A}$) para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demostración.

Se puede suponer que $a \geq 0$ porque $\|\pi(a^* a)\| = \|\pi(a)\|^2$ para todo a. Dado $\alpha > 0$, sea $C = \{\pi \in \hat{A} : \|\pi(a)\| \leq \alpha\} = \nu^{-1}((-\infty, \alpha])$

Lema

Para cada $a \in A$, el mapa $\nu : \hat{A} \to \mathbb{R}$ tal que $\nu(\pi) = \|\pi(a)\|$ es semicontinua inferiormente, o sea $\nu^{-1}((-\infty, \alpha])$ es cerrado en $\hat{A}$ (equivalentemente: $\nu^{-1}((\alpha, \infty))$ es abietro en $\hat{A}$) para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demostración.

Se puede suponer que $a \geq 0$ porque $\|\pi(a^* a)\| = \|\pi(a)\|^2$ para todo a. Dado $\alpha > 0$, sea $C = \{\pi \in \hat{A} : \|\pi(a)\| \leq \alpha\} = \nu^{-1}((-\infty, \alpha])$ Sea $\rho \in \overline{C}$, y supongamos que $\rho \notin C$.

Lema

Para cada $a \in A$, el mapa $\nu : \hat{A} \to \mathbb{R}$ tal que $\nu(\pi) = \|\pi(a)\|$ es semicontinua inferiormente, o sea $\nu^{-1}((-\infty, \alpha])$ es cerrado en $\hat{A}$ (equivalentemente: $\nu^{-1}((\alpha, \infty))$ es abietro en $\hat{A}$) para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demostración.

Se puede suponer que $a \geq 0$ porque $\|\pi(a^*a)\| = \|\pi(a)\|^2$ para todo a. Dado $\alpha > 0$, sea $C = \{\pi \in \hat{A} : \|\pi(a)\| \leq \alpha\} = \nu^{-1}((-\infty, \alpha])$ Sea $\rho \in \overline{C}$, y supongamos que $\rho \notin C$. Como $a \geq 0$, entonces $\|\pi(a)\| \leq \alpha$ si y sólo si $\sigma(\pi(a)) \subseteq [0, \alpha]$.

Lema

Para cada $a \in A$, el mapa $\nu : \hat{A} \to \mathbb{R}$ tal que $\nu(\pi) = \|\pi(a)\|$ es semicontinua inferiormente, o sea $\nu^{-1}((-\infty, \alpha])$ es cerrado en $\hat{A}$ (equivalentemente: $\nu^{-1}((\alpha, \infty))$ es abietro en $\hat{A}$) para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demostración.

Se puede suponer que $a \geq 0$ porque $\|\pi(a^*a)\| = \|\pi(a)\|^2$ para todo a. Dado $\alpha > 0$, sea $C = \{\pi \in \hat{A} : \|\pi(a)\| \leq \alpha\} = \nu^{-1}((-\infty, \alpha])$ Sea $\rho \in \overline{C}$, y supongamos que $\rho \notin C$. Como $a \geq 0$, entonces $\|\pi(a)\| \leq \alpha$ si y sólo si $\sigma(\pi(a)) \subseteq [0, \alpha]$. Como $\rho \notin C$, se tiene que $\sigma(\rho(a)) \not\subseteq [0, \alpha]$.

Lema

Para cada $a \in A$, el mapa $\nu : \hat{A} \to \mathbb{R}$ tal que $\nu(\pi) = \|\pi(a)\|$ es semicontinua inferiormente, o sea $\nu^{-1}((-\infty, \alpha])$ es cerrado en $\hat{A}$ (equivalentemente: $\nu^{-1}((\alpha, \infty))$ es abietro en $\hat{A}$) para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demostración.

Se puede suponer que $a \geq 0$ porque $\|\pi(a^*a)\| = \|\pi(a)\|^2$ para todo a. Dado $\alpha > 0$, sea $C = \{\pi \in \hat{A} : \|\pi(a)\| \leq \alpha\} = \nu^{-1}((-\infty, \alpha])$ Sea $\rho \in \overline{C}$, y supongamos que $\rho \notin C$. Como $a \geq 0$, entonces $\|\pi(a)\| \leq \alpha$ si y sólo si $\sigma(\pi(a)) \subseteq [0, \alpha]$. Como $\rho \notin C$, se tiene que $\sigma(\rho(a)) \not\subseteq [0, \alpha]$. Entonces existe $\lambda > \alpha$ tal que $\lambda \in \sigma(\rho(a))$.

Lema

Para cada $a \in A$, el mapa $\nu : \hat{A} \to \mathbb{R}$ tal que $\nu(\pi) = \|\pi(a)\|$ es semicontinua inferiormente, o sea $\nu^{-1}((-\infty, \alpha])$ es cerrado en $\hat{A}$ (equivalentemente: $\nu^{-1}((\alpha, \infty))$ es abietro en $\hat{A}$) para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demostración.

Se puede suponer que $a \geq 0$ porque $\|\pi(a^*a)\| = \|\pi(a)\|^2$ para todo a. Dado $\alpha > 0$, sea $C = \{\pi \in \hat{A} : \|\pi(a)\| \leq \alpha\} = \nu^{-1}((-\infty, \alpha])$ Sea $\rho \in \overline{C}$, y supongamos que $\rho \notin C$. Como $a \geq 0$, entonces $\|\pi(a)\| \leq \alpha$ si y sólo si $\sigma(\pi(a)) \subseteq [0, \alpha]$. Como $\rho \notin C$, se tiene que $\sigma(\rho(a)) \not\subseteq [0, \alpha]$. Entonces existe $\lambda > \alpha$ tal que $\lambda \in \sigma(\rho(a))$. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(\lambda) = 1$ y $f|_{[0,\alpha]} = 0$.

Lema

Para cada $a \in A$, el mapa $\nu : \hat{A} \to \mathbb{R}$ tal que $\nu(\pi) = \|\pi(a)\|$ es semicontinua inferiormente, o sea $\nu^{-1}((-\infty, \alpha])$ es cerrado en $\hat{A}$ (equivalentemente: $\nu^{-1}((\alpha, \infty))$ es abietro en $\hat{A}$) para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demostración.

Se puede suponer que $a \geq 0$ porque $\|\pi(a^*a)\| = \|\pi(a)\|^2$ para todo a. Dado $\alpha > 0$, sea $C = \{\pi \in \hat{A} : \|\pi(a)\| \leq \alpha\} = \nu^{-1}((-\infty, \alpha])$ Sea $\rho \in \overline{C}$, y supongamos que $\rho \notin C$. Como $a \geq 0$, entonces $\|\pi(a)\| \leq \alpha$ si y sólo si $\sigma(\pi(a)) \subseteq [0, \alpha]$. Como $\rho \notin C$, se tiene que $\sigma(\rho(a)) \not\subseteq [0, \alpha]$. Entonces existe $\lambda > \alpha$ tal que $\lambda \in \sigma(\rho(a))$. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(\lambda) = 1$ y $f|_{[0,\alpha]} = 0$. Entonces para todo $\pi \in C$ se tiene $\pi(f(a)) = f(\pi(a)) = 0$.

Lema

Para cada $a \in A$, el mapa $\nu : \hat{A} \to \mathbb{R}$ tal que $\nu(\pi) = \|\pi(a)\|$ es semicontinua inferiormente, o sea $\nu^{-1}((-\infty, \alpha])$ es cerrado en $\hat{A}$ (equivalentemente: $\nu^{-1}((\alpha, \infty))$ es abietro en $\hat{A}$) para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demostración.

Se puede suponer que $a \geq 0$ porque $\|\pi(a^* a)\| = \|\pi(a)\|^2$ para todo a. Dado $\alpha > 0$, sea $C = \{\pi \in \hat{A} : \|\pi(a)\| \leq \alpha\} = \nu^{-1}((-\infty, \alpha])$ Sea $\rho \in \overline{C}$, y supongamos que $\rho \notin C$. Como $a \geq 0$, entonces $\|\pi(a)\| \leq \alpha$ si y sólo si $\sigma(\pi(a)) \subseteq [0, \alpha]$. Como $\rho \notin C$, se tiene que $\sigma(\rho(a)) \not\subseteq [0, \alpha]$. Entonces existe $\lambda > \alpha$ tal que $\lambda \in \sigma(\rho(a))$. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(\lambda) = 1$ y $f|_{[0,\alpha]} = 0$. Entonces para todo $\pi \in C$ se tiene $\pi(f(a)) = f(\pi(a)) = 0$. Mientras tanto: $\rho(f(a)) = f(\rho(a)) \neq 0$ pues $\sigma(f(\rho(a))) \ni 1$.

Lema

Para cada $a \in A$, el mapa $\nu : \hat{A} \to \mathbb{R}$ tal que $\nu(\pi) = \|\pi(a)\|$ es semicontinua inferiormente, o sea $\nu^{-1}((-\infty, \alpha])$ es cerrado en $\hat{A}$ (equivalentemente: $\nu^{-1}((\alpha, \infty))$ es abietro en $\hat{A}$) para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demostración.

Se puede suponer que $a \geq 0$ porque $\|\pi(a^*a)\| = \|\pi(a)\|^2$ para todo a. Dado $\alpha > 0$, sea $C = \{\pi \in \hat{A} : \|\pi(a)\| \leq \alpha\} = \nu^{-1}((-\infty, \alpha])$ Sea $\rho \in \overline{C}$, y supongamos que $\rho \notin C$. Como $a \geq 0$, entonces $\|\pi(a)\| \leq \alpha$ si y sólo si $\sigma(\pi(a)) \subseteq [0, \alpha]$. Como $\rho \notin C$, se tiene que $\sigma(\rho(a)) \not\subseteq [0, \alpha]$. Entonces existe $\lambda > \alpha$ tal que $\lambda \in \sigma(\rho(a))$. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(\lambda) = 1$ y $f|_{[0,\alpha]} = 0$. Entonces para todo $\pi \in C$ se tiene $\pi(f(a)) = f(\pi(a)) = 0$. Mientras tanto: $\rho(f(a)) = f(\rho(a)) \neq 0$ pues $\sigma(f(\rho(a))) \ni 1$. Pero $f(a) \in \cap\{\ker\pi : \pi \in C\} \subseteq \ker\rho$ pues $\rho \in \overline{C}$.

Lema

Para cada $a \in A$, el mapa $\nu : \hat{A} \to \mathbb{R}$ tal que $\nu(\pi) = \|\pi(a)\|$ es semicontinua inferiormente, o sea $\nu^{-1}((-\infty, \alpha])$ es cerrado en $\hat{A}$ (equivalentemente: $\nu^{-1}((\alpha, \infty))$ es abietro en $\hat{A}$) para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demostración.

Se puede suponer que $a \geq 0$ porque $\|\pi(a^*a)\| = \|\pi(a)\|^2$ para todo a. Dado $\alpha > 0$, sea $C = \{\pi \in \hat{A} : \|\pi(a)\| \leq \alpha\} = \nu^{-1}((-\infty, \alpha])$ Sea $\rho \in \overline{C}$, y supongamos que $\rho \notin C$. Como $a \geq 0$, entonces $\|\pi(a)\| \leq \alpha$ si y sólo si $\sigma(\pi(a)) \subseteq [0, \alpha]$. Como $\rho \notin C$, se tiene que $\sigma(\rho(a)) \not\subseteq [0, \alpha]$. Entonces existe $\lambda > \alpha$ tal que $\lambda \in \sigma(\rho(a))$. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(\lambda) = 1$ y $f|_{[0,\alpha]} = 0$. Entonces para todo $\pi \in C$ se tiene $\pi(f(a)) = f(\pi(a)) = 0$. Mientras tanto: $\rho(f(a)) = f(\rho(a)) \neq 0$ pues $\sigma(f(\rho(a))) \ni 1$. Pero $f(a) \in \cap\{\ker\pi : \pi \in C\} \subseteq \ker\rho$ pues $\rho \in \overline{C}$. Sin embargo $f(a) \notin \ker\rho$.

Lema

Para cada $a \in A$, el mapa $\nu : \hat{A} \to \mathbb{R}$ tal que $\nu(\pi) = \|\pi(a)\|$ es semicontinua inferiormente, o sea $\nu^{-1}((-\infty, \alpha])$ es cerrado en $\hat{A}$ (equivalentemente: $\nu^{-1}((\alpha, \infty))$ es abietro en $\hat{A}$) para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demostración.

Se puede suponer que $a \geq 0$ porque $\|\pi(a^*a)\| = \|\pi(a)\|^2$ para todo a. Dado $\alpha > 0$, sea $C = \{\pi \in \hat{A} : \|\pi(a)\| \leq \alpha\} = \nu^{-1}((-\infty, \alpha])$ Sea $\rho \in \overline{C}$, y supongamos que $\rho \notin C$. Como $a \geq 0$, entonces $\|\pi(a)\| \leq \alpha$ si y sólo si $\sigma(\pi(a)) \subseteq [0, \alpha]$. Como $\rho \notin C$, se tiene que $\sigma(\rho(a)) \not\subseteq [0, \alpha]$. Entonces existe $\lambda > \alpha$ tal que $\lambda \in \sigma(\rho(a))$. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(\lambda) = 1$ y $f|_{[0,\alpha]} = 0$. Entonces para todo $\pi \in C$ se tiene $\pi(f(a)) = f(\pi(a)) = 0$. Mientras tanto: $\rho(f(a)) = f(\rho(a)) \neq 0$ pues $\sigma(f(\rho(a))) \ni 1$. Pero $f(a) \in \cap\{\ker\pi : \pi \in C\} \subseteq \ker\rho$ pues $\rho \in \overline{C}$. Sin embargo $f(a) \notin \ker\rho$. Entonces $C = \overline{C}$. □

Teorema

$\mathrm{Prim}(A)$ *y* $\hat{A}$ *son localmente compactos,*

Teorema

$\mathrm{Prim}(A)$ *y* $\hat{A}$ *son localmente compactos,*

Teorema

Prim(A) *y* $\hat{A}$ *son localmente compactos, y son compactos si* A *tiene unidad.*

Teorema

Prim(A) *y* $\hat{A}$ *son localmente compactos, y son compactos si* A *tiene unidad.*

Demostración.

Si A tiene unidad,

Teorema

$\mathrm{Prim}(A)$ *y* $\hat{A}$ *son localmente compactos, y son compactos si* A *tiene unidad.*

Demostración.

Si A tiene unidad,

Teorema

$\mathrm{Prim}(A)$ *y* $\hat{A}$ *son localmente compactos, y son compactos si* A *tiene unidad.*

Demostración.

Si A tiene unidad, es $\hat{A} = \{[\pi] \in \hat{A} : \|\pi(1)\| \geq 1\}$,

Teorema

Prim(A) *y* $\hat{A}$ *son localmente compactos, y son compactos si* A *tiene unidad.*

Demostración.

Si A tiene unidad, es $\hat{A} = \{[\pi] \in \hat{A} : \|\pi(1)\| \geq 1\}$, que es compacto.

Teorema

$\mathrm{Prim}(A)$ *y* $\hat{A}$ *son localmente compactos, y son compactos si* A *tiene unidad.*

Demostración.

Si A tiene unidad, es $\hat{A} = \{[\pi] \in \hat{A} : \|\pi(1)\| \geq 1\}$, que es compacto. Como $\kappa : \hat{A} \to \mathrm{Prim}(A)$ es continua y sobreyectiva, $\mathrm{Prim}(A)$ también es compacto.

Teorema

$\mathrm{Prim}(A)$ *y* $\hat{A}$ *son localmente compactos, y son compactos si* A *tiene unidad.*

Demostración.

Si A tiene unidad, es $\hat{A} = \{[\pi] \in \hat{A} : \|\pi(1)\| \geq 1\}$, que es compacto. Como $\kappa : \hat{A} \to \mathrm{Prim}(A)$ es continua y sobreyectiva, $\mathrm{Prim}(A)$ también es compacto. Supongamos ahora que A no tiene unidad.

Teorema

Prim(A) *y* $\hat{A}$ *son localmente compactos, y son compactos si* A *tiene unidad.*

Demostración.

Si A tiene unidad, es $\hat{A} = \{[\pi] \in \hat{A} : \|\pi(1)\| \geq 1\}$, que es compacto. Como $\kappa : \hat{A} \to \mathrm{Prim}(A)$ es continua y sobreyectiva, Prim(A) también es compacto. Supongamos ahora que A no tiene unidad. Veamos que $\hat{A}$ es localmente compacto.

Teorema

Prim(A) *y* $\hat{A}$ *son localmente compactos, y son compactos si* A *tiene unidad.*

Demostración.

Si A tiene unidad, es $\hat{A} = \{[\pi] \in \hat{A} : \|\pi(1)\| \geq 1\}$, que es compacto. Como $\kappa : \hat{A} \to$ Prim(A) es continua y sobreyectiva, Prim(A) también es compacto. Supongamos ahora que A no tiene unidad. Veamos que $\hat{A}$ es localmente compacto. Sean $\pi \in \hat{A}$ y $\hat{\mathcal{O}}_I = \kappa^{-1}(\mathcal{O}_I)$ un abierto de $\hat{A}$ que contiene a π,

Teorema

Prim(A) *y* $\hat{A}$ *son localmente compactos, y son compactos si* A *tiene unidad.*

Demostración.

Si A tiene unidad, es $\hat{A} = \{[\pi] \in \hat{A} : \|\pi(1)\| \geq 1\}$, que es compacto. Como $\kappa : \hat{A} \to \mathrm{Prim}(A)$ es continua y sobreyectiva, Prim(A) también es compacto. Supongamos ahora que A no tiene unidad. Veamos que $\hat{A}$ es localmente compacto. Sean $\pi \in \hat{A}$ y $\hat{\mathcal{O}}_I = \kappa^{-1}(\mathcal{O}_I)$ un abierto de $\hat{A}$ que contiene a π, es decir $\pi|_I \neq 0$.

Teorema

Prim(A) *y* $\hat{A}$ *son localmente compactos, y son compactos si* A *tiene unidad.*

Demostración.

Si A tiene unidad, es $\hat{A} = \{[\pi] \in \hat{A} : \|\pi(1)\| \geq 1\}$, que es compacto. Como $\kappa : \hat{A} \to \mathrm{Prim}(A)$ es continua y sobreyectiva, Prim(A) también es compacto. Supongamos ahora que A no tiene unidad. Veamos que $\hat{A}$ es localmente compacto. Sean $\pi \in \hat{A}$ y $\hat{\mathcal{O}}_I = \kappa^{-1}(\mathcal{O}_I)$ un abierto de $\hat{A}$ que contiene a π, es decir $\pi|_I \neq 0$. Sea $a \in I$ tal que $\pi(a) \neq 0$,

Teorema

$\mathrm{Prim}(A)$ *y* $\hat{A}$ *son localmente compactos, y son compactos si* A *tiene unidad.*

Demostración.

Si A tiene unidad, es $\hat{A} = \{[\pi] \in \hat{A} : \|\pi(1)\| \geq 1\}$, que es compacto. Como $\kappa : \hat{A} \to \mathrm{Prim}(A)$ es continua y sobreyectiva, $\mathrm{Prim}(A)$ también es compacto. Supongamos ahora que A no tiene unidad. Veamos que $\hat{A}$ es localmente compacto. Sean $\pi \in \hat{A}$ y $\hat{\mathcal{O}}_I = \kappa^{-1}(\mathcal{O}_I)$ un abierto de $\hat{A}$ que contiene a π, es decir $\pi|_I \neq 0$. Sea $a \in I$ tal que $\pi(a) \neq 0$, y sea $r < \|\pi(a)\|$.

Teorema

Prim(A) *y* $\hat{A}$ *son localmente compactos, y son compactos si* A *tiene unidad.*

Demostración.

Si A tiene unidad, es $\hat{A} = \{[\pi] \in \hat{A} : \|\pi(1)\| \geq 1\}$, que es compacto. Como $\kappa : \hat{A} \to \mathrm{Prim}(A)$ es continua y sobreyectiva, Prim(A) también es compacto. Supongamos ahora que A no tiene unidad. Veamos que $\hat{A}$ es localmente compacto. Sean $\pi \in \hat{A}$ y $\hat{\mathcal{O}}_I = \kappa^{-1}(\mathcal{O}_I)$ un abierto de $\hat{A}$ que contiene a π, es decir $\pi|_I \neq 0$. Sea $a \in I$ tal que $\pi(a) \neq 0$, y sea $r < \|\pi(a)\|$. Sean $V = \{\rho \in \hat{A} : \|\rho(a)\| > r\} \ni \pi$

Teorema

Prim(A) *y* $\hat{A}$ *son localmente compactos, y son compactos si* A *tiene unidad.*

Demostración.

Si A tiene unidad, es $\hat{A} = \{[\pi] \in \hat{A} : \|\pi(1)\| \geq 1\}$, que es compacto. Como $\kappa : \hat{A} \to \mathrm{Prim}(A)$ es continua y sobreyectiva, Prim(A) también es compacto. Supongamos ahora que A no tiene unidad. Veamos que $\hat{A}$ es localmente compacto. Sean $\pi \in \hat{A}$ y $\hat{\mathcal{O}}_I = \kappa^{-1}(\mathcal{O}_I)$ un abierto de $\hat{A}$ que contiene a π, es decir $\pi|_I \neq 0$. Sea $a \in I$ tal que $\pi(a) \neq 0$, y sea $r < \|\pi(a)\|$. Sean $V = \{\rho \in \hat{A}: \|\rho(a)\| > r\} \ni \pi$ y $C = \{\rho \in \hat{A}: \|\rho(a)\| \geq r\} \supseteq V \ni \pi$.

Teorema

Prim(A) *y* $\hat{A}$ *son localmente compactos, y son compactos si* A *tiene unidad.*

Demostración.

Si A tiene unidad, es $\hat{A} = \{[\pi] \in \hat{A} : \|\pi(1)\| \geq 1\}$, que es compacto. Como $\kappa : \hat{A} \to \text{Prim}(A)$ es continua y sobreyectiva, Prim(A) también es compacto. Supongamos ahora que A no tiene unidad. Veamos que $\hat{A}$ es localmente compacto. Sean $\pi \in \hat{A}$ y $\hat{\mathcal{O}}_I = \kappa^{-1}(\mathcal{O}_I)$ un abierto de $\hat{A}$ que contiene a π, es decir $\pi|_I \neq 0$. Sea $a \in I$ tal que $\pi(a) \neq 0$, y sea $r < \|\pi(a)\|$. Sean $V = \{\rho \in \hat{A} : \|\rho(a)\| > r\} \ni \pi$ y $C = \{\rho \in \hat{A} : \|\rho(a)\| \geq r\} \supseteq V \ni \pi$. Entonces:

Teorema

Prim(A) *y* $\hat{A}$ *son localmente compactos, y son compactos si* A *tiene unidad.*

Demostración.

Si A tiene unidad, es $\hat{A} = \{[\pi] \in \hat{A} : \|\pi(1)\| \geq 1\}$, que es compacto. Como $\kappa : \hat{A} \to \mathrm{Prim}(A)$ es continua y sobreyectiva, Prim(A) también es compacto. Supongamos ahora que A no tiene unidad. Veamos que $\hat{A}$ es localmente compacto. Sean $\pi \in \hat{A}$ y $\hat{\mathcal{O}}_I = \kappa^{-1}(\mathcal{O}_I)$ un abierto de $\hat{A}$ que contiene a π, es decir $\pi|_I \neq 0$. Sea $a \in I$ tal que $\pi(a) \neq 0$, y sea $r < \|\pi(a)\|$. Sean $V = \{\rho \in \hat{A}: \|\rho(a)\| > r\} \ni \pi$ y $C = \{\rho \in \hat{A}: \|\rho(a)\| \geq r\} \supseteq V \ni \pi$. Entonces:

- C es compacto.

Teorema

$\mathrm{Prim}(A)$ *y* $\hat{A}$ *son localmente compactos, y son compactos si* A *tiene unidad.*

Demostración.

Si A tiene unidad, es $\hat{A} = \{[\pi] \in \hat{A} : \|\pi(1)\| \geq 1\}$, que es compacto. Como $\kappa : \hat{A} \to \mathrm{Prim}(A)$ es continua y sobreyectiva, $\mathrm{Prim}(A)$ también es compacto. Supongamos ahora que A no tiene unidad. Veamos que $\hat{A}$ es localmente compacto. Sean $\pi \in \hat{A}$ y $\hat{\mathcal{O}}_I = \kappa^{-1}(\mathcal{O}_I)$ un abierto de $\hat{A}$ que contiene a π, es decir $\pi|_I \neq 0$. Sea $a \in I$ tal que $\pi(a) \neq 0$, y sea $r < \|\pi(a)\|$. Sean $V = \{\rho \in \hat{A} : \|\rho(a)\| > r\} \ni \pi$ y $C = \{\rho \in \hat{A} : \|\rho(a)\| \geq r\} \supseteq V \ni \pi$. Entonces:

- C es compacto.
- V es abierto (por la semicontinuidad de V).

Teorema

Prim(A) *y* $\hat{A}$ *son localmente compactos, y son compactos si* A *tiene unidad.*

Demostración.

Si A tiene unidad, es $\hat{A} = \{[\pi] \in \hat{A} : \|\pi(1)\| \geq 1\}$, que es compacto. Como $\kappa : \hat{A} \to \mathrm{Prim}(A)$ es continua y sobreyectiva, Prim(A) también es compacto. Supongamos ahora que A no tiene unidad. Veamos que $\hat{A}$ es localmente compacto. Sean $\pi \in \hat{A}$ y $\hat{\mathcal{O}}_I = \kappa^{-1}(\mathcal{O}_I)$ un abierto de $\hat{A}$ que contiene a π, es decir $\pi|_I \neq 0$. Sea $a \in I$ tal que $\pi(a) \neq 0$, y sea $r < \|\pi(a)\|$. Sean $V = \{\rho \in \hat{A}: \|\rho(a)\| > r\} \ni \pi$ y $C = \{\rho \in \hat{A}: \|\rho(a)\| \geq r\} \supseteq V \ni \pi$. Entonces:

- C es compacto.
- V es abierto (por la semicontinuidad de V).
- $\pi \in V$.

Teorema

$\mathrm{Prim}(A)$ *y* $\hat{A}$ *son localmente compactos, y son compactos si* A *tiene unidad.*

Demostración.

Si A tiene unidad, es $\hat{A} = \{[\pi] \in \hat{A} : \|\pi(1)\| \geq 1\}$, que es compacto. Como $\kappa : \hat{A} \to \mathrm{Prim}(A)$ es continua y sobreyectiva, $\mathrm{Prim}(A)$ también es compacto. Supongamos ahora que A no tiene unidad. Veamos que $\hat{A}$ es localmente compacto. Sean $\pi \in \hat{A}$ y $\hat{\mathcal{O}}_I = \kappa^{-1}(\mathcal{O}_I)$ un abierto de $\hat{A}$ que contiene a π, es decir $\pi|_I \neq 0$. Sea $a \in I$ tal que $\pi(a) \neq 0$, y sea $r < \|\pi(a)\|$. Sean $V = \{\rho \in \hat{A} \colon \|\rho(a)\| > r\} \ni \pi$ y $C = \{\rho \in \hat{A} \colon \|\rho(a)\| \geq r\} \supseteq V \ni \pi$. Entonces:

- C es compacto.
- V es abierto (por la semicontinuidad de V).
- $\pi \in V$.
- $C \subseteq \mathcal{O}_I = \{\tau \in \hat{A} \colon \tau|_I \neq 0\}$.

Teorema

Prim(A) *y* $\hat{A}$ *son localmente compactos, y son compactos si* A *tiene unidad.*

Demostración.

Si A tiene unidad, es $\hat{A} = \{[\pi] \in \hat{A} : \|\pi(1)\| \geq 1\}$, que es compacto. Como $\kappa : \hat{A} \to$ Prim(A) es continua y sobreyectiva, Prim(A) también es compacto. Supongamos ahora que A no tiene unidad. Veamos que $\hat{A}$ es localmente compacto. Sean $\pi \in \hat{A}$ y $\hat{\mathcal{O}}_I = \kappa^{-1}(\mathcal{O}_I)$ un abierto de $\hat{A}$ que contiene a π, es decir $\pi|_I \neq 0$. Sea $a \in I$ tal que $\pi(a) \neq 0$, y sea $r < \|\pi(a)\|$. Sean $V = \{\rho \in \hat{A}: \|\rho(a)\| > r\} \ni \pi$ y $C = \{\rho \in \hat{A}: \|\rho(a)\| \geq r\} \supseteq V \ni \pi$. Entonces:

- C es compacto.
- V es abierto (por la semicontinuidad de V).
- $\pi \in V$.
- $C \subseteq \mathcal{O}_I = \{\tau \in \hat{A}: \tau|_I \neq 0\}$.

Teorema

$\mathrm{Prim}(A)$ *y* $\hat{A}$ *son localmente compactos, y son compactos si* A *tiene unidad.*

Demostración.

Si A tiene unidad, es $\hat{A} = \{[\pi] \in \hat{A} : \|\pi(1)\| \geq 1\}$, que es compacto. Como $\kappa : \hat{A} \to \mathrm{Prim}(A)$ es continua y sobreyectiva, $\mathrm{Prim}(A)$ también es compacto. Supongamos ahora que A no tiene unidad. Veamos que $\hat{A}$ es localmente compacto. Sean $\pi \in \hat{A}$ y $\hat{\mathcal{O}}_I = \kappa^{-1}(\mathcal{O}_I)$ un abierto de $\hat{A}$ que contiene a π, es decir $\pi|_I \neq 0$. Sea $a \in I$ tal que $\pi(a) \neq 0$, y sea $r < \|\pi(a)\|$. Sean $V = \{\rho \in \hat{A} : \|\rho(a)\| > r\} \ni \pi$ y $C = \{\rho \in \hat{A} : \|\rho(a)\| \geq r\} \supseteq V \ni \pi$. Entonces:

- C es compacto.
- V es abierto (por la semicontinuidad de V).
- $\pi \in V$.
- $C \subseteq \mathcal{O}_I = \{\tau \in \hat{A} : \tau|_I \neq 0\}$.

Entonces C es un entorno compacto de π contenido en $\hat{\mathcal{O}}_I$. $\square$

Teorema

Sean A una C^*-álgebra, $J \lhd A$

Teorema

Sean A una C^*-álgebra, $J \lhd A$

Teorema

Sean A una C^*-álgebra, $J \lhd A$ y $q : A \to \frac{A}{J}$ la proyección.

Teorema

Sean A una C^*-álgebra, $J \lhd A$ y $q : A \to \frac{A}{J}$ la proyección. Entonces los siguientes mapas son homeomorfismos.

Teorema

Sean A una C^*-álgebra, $J \lhd A$ y $q : A \to \frac{A}{J}$ la proyección. Entonces los siguientes mapas son homeomorfismos.

(a) $\mathcal{O}_J \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Prim}(J)$ *dado por* $\alpha(P) = P \cap J$.

Teorema

Sean A una C^*-álgebra, $J \lhd A$ y $q : A \to \frac{A}{J}$ la proyección. Entonces los siguientes mapas son homeomorfismos.

(a) $\mathcal{O}_J \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Prim}(J)$ *dado por* $\alpha(P) = P \cap J$.

(b) $\widehat{\mathcal{O}}_J \xrightarrow{\beta} \hat{J}$ *dado por* $\beta(\pi) = \pi_{|_J}$.

Teorema

Sean A una C^*-álgebra, $J \lhd A$ y $q : A \to \frac{A}{J}$ la proyección. Entonces los siguientes mapas son homeomorfismos.

(a) $\mathcal{O}_J \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Prim}(J)$ *dado por* $\alpha(P) = P \cap J$.

(b) $\widehat{\mathcal{O}}_J \xrightarrow{\beta} \hat{J}$ *dado por* $\beta(\pi) = \pi_{|_J}$.

(c) $\mathrm{Prim}(\frac{A}{J}) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Prim}(A) \backslash \mathcal{O}_J$ *dado por* $\gamma(P) = q^{-1}(P)$.

Teorema

Sean A una C^*-álgebra, $J \lhd A$ y $q : A \to \frac{A}{J}$ la proyección. Entonces los siguientes mapas son homeomorfismos.

(a) $\mathcal{O}_J \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Prim}(J)$ *dado por* $\alpha(P) = P \cap J$.

(b) $\widehat{\mathcal{O}}_J \xrightarrow{\beta} \hat{J}$ *dado por* $\beta(\pi) = \pi_{|_J}$.

(c) $\mathrm{Prim}(\frac{A}{J}) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Prim}(A) \backslash \mathcal{O}_J$ *dado por* $\gamma(P) = q^{-1}(P)$.

(d) $\widehat{\frac{A}{J}} \xrightarrow{\delta} \widehat{A} \backslash \widehat{\mathcal{O}}_J$ *dado por* $\delta(\pi) = \pi \circ q$.

Teorema

Sean A una C^*-álgebra, $J \lhd A$ y $q : A \to \frac{A}{J}$ la proyección. Entonces los siguientes mapas son homeomorfismos.

(a) $\mathcal{O}_J \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Prim}(J)$ *dado por* $\alpha(P) = P \cap J$.

(b) $\widehat{\mathcal{O}}_J \xrightarrow{\beta} \hat{J}$ *dado por* $\beta(\pi) = \pi_{|_J}$.

(c) $\mathrm{Prim}(\frac{A}{J}) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Prim}(A) \backslash \mathcal{O}_J$ *dado por* $\gamma(P) = q^{-1}(P)$.

(d) $\widehat{\frac{A}{J}} \xrightarrow{\delta} \widehat{A} \backslash \widehat{\mathcal{O}}_J$ *dado por* $\delta(\pi) = \pi \circ q$.

Teorema

Sean A una C^*-álgebra, $J \lhd A$ y $q : A \to \frac{A}{J}$ la proyección. Entonces los siguientes mapas son homeomorfismos.

(a) $\mathcal{O}_J \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Prim}(J)$ *dado por* $\alpha(P) = P \cap J$.

(b) $\widehat{\mathcal{O}}_J \xrightarrow{\beta} \hat{J}$ *dado por* $\beta(\pi) = \pi_{|_J}$.

(c) $\mathrm{Prim}(\frac{A}{J}) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Prim}(A) \setminus \mathcal{O}_J$ *dado por* $\gamma(P) = q^{-1}(P)$.

(d) $\widehat{\frac{A}{J}} \xrightarrow{\delta} \widehat{A} \setminus \widehat{\mathcal{O}}_J$ *dado por* $\delta(\pi) = \pi \circ q$.

Lema

Sean A una C^*-álgebra y J un $*$-ideal de A, no necesariamente cerrado.

Teorema

Sean A una C^*-álgebra, $J \triangleleft A$ y $q : A \to \frac{A}{J}$ la proyección. Entonces los siguientes mapas son homeomorfismos.

(a) $\mathcal{O}_J \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Prim}(J)$ *dado por* $\alpha(P) = P \cap J$.

(b) $\widehat{\mathcal{O}}_J \xrightarrow{\beta} \hat{J}$ *dado por* $\beta(\pi) = \pi_{|_J}$.

(c) $\mathrm{Prim}(\frac{A}{J}) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Prim}(A) \backslash \mathcal{O}_J$ *dado por* $\gamma(P) = q^{-1}(P)$.

(d) $\widehat{\frac{A}{J}} \xrightarrow{\delta} \widehat{A} \backslash \widehat{\mathcal{O}}_J$ *dado por* $\delta(\pi) = \pi \circ q$.

Lema

Sean A una C^*-álgebra y J un $*$-ideal de A, no necesariamente cerrado.

Teorema

Sean A una C^*-álgebra, $J \lhd A$ y $q : A \to \frac{A}{J}$ la proyección. Entonces los siguientes mapas son homeomorfismos.

(a) $\mathcal{O}_J \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Prim}(J)$ *dado por* $\alpha(P) = P \cap J$.

(b) $\widehat{\mathcal{O}}_J \xrightarrow{\beta} \hat{J}$ *dado por* $\beta(\pi) = \pi_{|_J}$.

(c) $\mathrm{Prim}(\frac{A}{J}) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Prim}(A) \backslash \mathcal{O}_J$ *dado por* $\gamma(P) = q^{-1}(P)$.

(d) $\widehat{\frac{A}{J}} \xrightarrow{\delta} \widehat{A} \backslash \widehat{\mathcal{O}}_J$ *dado por* $\delta(\pi) = \pi \circ q$.

Lema

Sean A una C^*-álgebra y J un $*$-ideal de A, no necesariamente cerrado. Si $\pi : J \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es una representación no degenerada, entonces π admite una única extensión a una representación $\widetilde{\pi} : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ (en particular π es continua).

Teorema

Sean A una C^*-álgebra, $J \lhd A$ y $q : A \to \frac{A}{J}$ la proyección. Entonces los siguientes mapas son homeomorfismos.

(a) $\mathcal{O}_J \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Prim}(J)$ *dado por* $\alpha(P) = P \cap J$.

(b) $\widehat{\mathcal{O}}_J \xrightarrow{\beta} \hat{J}$ *dado por* $\beta(\pi) = \pi_{|_J}$.

(c) $\mathrm{Prim}(\frac{A}{J}) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Prim}(A) \setminus \mathcal{O}_J$ *dado por* $\gamma(P) = q^{-1}(P)$.

(d) $\widehat{\frac{A}{J}} \xrightarrow{\delta} \widehat{A} \setminus \widehat{\mathcal{O}}_J$ *dado por* $\delta(\pi) = \pi \circ q$.

Lema

Sean A una C^*-álgebra y J un $*$-ideal de A, no necesariamente cerrado. Si $\pi : J \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es una representación no degenerada, entonces π admite una única extensión a una representación $\widetilde{\pi} : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ (en particular π es continua). Además π es irreducible si y sólo si $\widetilde{\pi}$ lo es.

Demostración.

Si $\tilde{\pi}$ existe necesariamente debe ser, para todo $a \in A$, $x \in J$, $\xi \in \mathcal{H}$:

Demostración.

Si $\tilde{\pi}$ existe necesariamente debe ser, para todo $a \in A$, $x \in J$, $\xi \in \mathcal{H}$:

Demostración.

Si $\tilde{\pi}$ existe necesariamente debe ser, para todo $a \in A$, $x \in J$, $\xi \in \mathcal{H}$:
$\widetilde{\pi}(a)\pi(x)\xi = \widetilde{\pi}(ax)\xi$

Demostración.

Si $\tilde{\pi}$ existe necesariamente debe ser, para todo $a \in A$, $x \in J$, $\xi \in \mathcal{H}$:
$\widetilde{\pi}(a)\pi(x)\xi = \widetilde{\pi}(ax)\xi = \pi(ax)\xi$.

Demostración.

Si $\tilde{\pi}$ existe necesariamente debe ser, para todo $a \in A$, $x \in J$, $\xi \in \mathcal{H}$:
$\widetilde{\pi}(a)\pi(x)\xi = \widetilde{\pi}(ax)\xi = \pi(ax)\xi$. Como $\overline{\operatorname{span}}\{\pi(x)\xi : x \in J, \xi \in \mathcal{H}\} = \mathcal{H}$,

Demostración.

Si $\tilde{\pi}$ existe necesariamente debe ser, para todo $a \in A$, $x \in J$, $\xi \in \mathcal{H}$: $\widetilde{\pi}(a)\pi(x)\xi = \widetilde{\pi}(ax)\xi = \pi(ax)\xi$. Como $\overline{\text{span}}\{\pi(x)\xi : x \in J, \xi \in \mathcal{H}\} = \mathcal{H}$, si $\widetilde{\pi}$ existe es única.

Demostración.

Si $\tilde{\pi}$ existe necesariamente debe ser, para todo $a \in A$, $x \in J$, $\xi \in \mathcal{H}$: $\widetilde{\pi}(a)\pi(x)\xi = \widetilde{\pi}(ax)\xi = \pi(ax)\xi$. Como $\overline{\mathrm{span}}\{\pi(x)\xi : x \in J, \xi \in \mathcal{H}\} = \mathcal{H}$, si $\widetilde{\pi}$ existe es única. Para ver que existe,

Demostración.

Si $\tilde{\pi}$ existe necesariamente debe ser, para todo $a \in A$, $x \in J$, $\xi \in \mathcal{H}$: $\widetilde{\pi}(a)\pi(x)\xi = \widetilde{\pi}(ax)\xi = \pi(ax)\xi$. Como $\overline{\mathrm{span}}\{\pi(x)\xi : x \in J, \xi \in \mathcal{H}\} = \mathcal{H}$, si $\widetilde{\pi}$ existe es única. Para ver que existe, supongamos que $\sum_{i=1}^{n} \pi(x_i)\xi_i = 0$.

Demostración.

Si $\tilde{\pi}$ existe necesariamente debe ser, para todo $a \in A$, $x \in J$, $\xi \in \mathcal{H}$: $\widetilde{\pi}(a)\pi(x)\xi = \widetilde{\pi}(ax)\xi = \pi(ax)\xi$. Como $\overline{\mathrm{span}}\{\pi(x)\xi : x \in J, \xi \in \mathcal{H}\} = \mathcal{H}$, si $\widetilde{\pi}$ existe es única. Para ver que existe, supongamos que $\sum_{i=1}^{n} \pi(x_i)\xi_i = 0$. Sea (u_λ) una unidad aproximada de J.

Demostración.

Si $\tilde{\pi}$ existe necesariamente debe ser, para todo $a \in A$, $x \in J$, $\xi \in \mathcal{H}$: $\widetilde{\pi}(a)\pi(x)\xi = \widetilde{\pi}(ax)\xi = \pi(ax)\xi$. Como $\overline{\text{span}}\{\pi(x)\xi : x \in J, \xi \in \mathcal{H}\} = \mathcal{H}$, si $\widetilde{\pi}$ existe es única. Para ver que existe, supongamos que $\sum_{i=1}^{n} \pi(x_i)\xi_i = 0$. Sea (u_λ) una unidad aproximada de J. Entonces $\forall a \in A$:

Demostración.

Si $\tilde{\pi}$ existe necesariamente debe ser, para todo $a \in A$, $x \in J$, $\xi \in \mathcal{H}$: $\widetilde{\pi}(a)\pi(x)\xi = \widetilde{\pi}(ax)\xi = \pi(ax)\xi$. Como $\overline{\text{span}}\{\pi(x)\xi : x \in J, \xi \in \mathcal{H}\} = \mathcal{H}$, si $\widetilde{\pi}$ existe es única. Para ver que existe, supongamos que $\sum_{i=1}^{n} \pi(x_i)\xi_i = 0$. Sea (u_λ) una unidad aproximada de J. Entonces $\forall a \in A$:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi(ax_i)\xi_i = \text{lím}_\lambda \, \pi(au_\lambda) \sum_{i=1}^{n} \pi(x_i)\xi_i = 0.$$

Demostración.

Si $\tilde{\pi}$ existe necesariamente debe ser, para todo $a \in A$, $x \in J$, $\xi \in \mathcal{H}$: $\widetilde{\pi}(a)\pi(x)\xi = \widetilde{\pi}(ax)\xi = \pi(ax)\xi$. Como $\overline{\text{span}}\{\pi(x)\xi : x \in J, \xi \in \mathcal{H}\} = \mathcal{H}$, si $\widetilde{\pi}$ existe es única. Para ver que existe, supongamos que $\sum_{i=1}^{n} \pi(x_i)\xi_i = 0$. Sea (u_λ) una unidad aproximada de J. Entonces $\forall a \in A$:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi(ax_i)\xi_i = \lim_\lambda \pi(au_\lambda) \sum_{i=1}^{n} \pi(x_i)\xi_i = 0.$$

Se puede definir entonces $\widetilde{\pi}(a) : \text{span}\pi(J)\mathcal{H} \to \pi(J)\mathcal{H}$ como

Demostración.

Si $\tilde{\pi}$ existe necesariamente debe ser, para todo $a \in A$, $x \in J$, $\xi \in \mathcal{H}$: $\widetilde{\pi}(a)\pi(x)\xi = \widetilde{\pi}(ax)\xi = \pi(ax)\xi$. Como $\overline{\text{span}}\{\pi(x)\xi : x \in J, \xi \in \mathcal{H}\} = \mathcal{H}$, si $\widetilde{\pi}$ existe es única. Para ver que existe, supongamos que $\sum_{i=1}^{n} \pi(x_i)\xi_i = 0$. Sea (u_λ) una unidad aproximada de J. Entonces $\forall a \in A$:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi(ax_i)\xi_i = \text{lím}_\lambda \pi(au_\lambda) \sum_{i=1}^{n} \pi(x_i)\xi_i = 0.$$

Se puede definir entonces $\widetilde{\pi}(a) : \text{span}\pi(J)\mathcal{H} \to \pi(J)\mathcal{H}$ como

$$\widetilde{\pi}(a)\left(\sum_{j=1}^{k} \pi(y_j)\eta_j\right) := \sum_{j=1}^{k} \pi(ay_j)\eta_j.$$

Demostración.

Si $\tilde{\pi}$ existe necesariamente debe ser, para todo $a \in A$, $x \in J$, $\xi \in \mathcal{H}$: $\widetilde{\pi}(a)\pi(x)\xi = \widetilde{\pi}(ax)\xi = \pi(ax)\xi$. Como $\overline{\text{span}}\{\pi(x)\xi : x \in J, \xi \in \mathcal{H}\} = \mathcal{H}$, si $\widetilde{\pi}$ existe es única. Para ver que existe, supongamos que $\sum_{i=1}^{n} \pi(x_i)\xi_i = 0$. Sea (u_λ) una unidad aproximada de J. Entonces $\forall a \in A$:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi(ax_i)\xi_i = \text{lím}_\lambda\, \pi(au_\lambda) \sum_{i=1}^{n} \pi(x_i)\xi_i = 0.$$

Se puede definir entonces $\widetilde{\pi}(a) : \text{span}\pi(J)\mathcal{H} \to \pi(J)\mathcal{H}$ como

$$\widetilde{\pi}(a)\left(\sum_{j=1}^{k} \pi(y_j)\eta_j\right) := \sum_{j=1}^{k} \pi(ay_j)\eta_j.$$

Usando nuevamente unidades aproximadas se ve que $\widetilde{\pi}(a)$ es acotada

Demostración.

Si $\tilde{\pi}$ existe necesariamente debe ser, para todo $a \in A$, $x \in J$, $\xi \in \mathcal{H}$: $\widetilde{\pi}(a)\pi(x)\xi = \widetilde{\pi}(ax)\xi = \pi(ax)\xi$. Como $\overline{\text{span}}\{\pi(x)\xi : x \in J, \xi \in \mathcal{H}\} = \mathcal{H}$, si $\widetilde{\pi}$ existe es única. Para ver que existe, supongamos que $\sum_{i=1}^n \pi(x_i)\xi_i = 0$. Sea (u_λ) una unidad aproximada de J. Entonces $\forall a \in A$:

$$\sum_{i=1}^n \pi(ax_i)\xi_i = \lim_\lambda \pi(au_\lambda) \sum_{i=1}^n \pi(x_i)\xi_i = 0.$$

Se puede definir entonces $\widetilde{\pi}(a) : \text{span}\pi(J)\mathcal{H} \to \pi(J)\mathcal{H}$ como

$$\widetilde{\pi}(a)\left(\sum_{j=1}^k \pi(y_j)\eta_j\right) := \sum_{j=1}^k \pi(ay_j)\eta_j.$$

Usando nuevamente unidades aproximadas se ve que $\widetilde{\pi}(a)$ es acotada y por lo tanto se extiende por continuidad a $\widetilde{\pi}(a) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.

Demostración.

Si $\tilde{\pi}$ existe necesariamente debe ser, para todo $a \in A$, $x \in J$, $\xi \in \mathcal{H}$: $\widetilde{\pi}(a)\pi(x)\xi = \widetilde{\pi}(ax)\xi = \pi(ax)\xi$. Como $\overline{\text{span}}\{\pi(x)\xi : x \in J, \xi \in \mathcal{H}\} = \mathcal{H}$, si $\widetilde{\pi}$ existe es única. Para ver que existe, supongamos que $\sum_{i=1}^{n} \pi(x_i)\xi_i = 0$. Sea (u_λ) una unidad aproximada de J. Entonces $\forall a \in A$:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi(ax_i)\xi_i = \text{lím}_\lambda\, \pi(au_\lambda) \sum_{i=1}^{n} \pi(x_i)\xi_i = 0.$$

Se puede definir entonces $\widetilde{\pi}(a) : \text{span}\pi(J)\mathcal{H} \to \pi(J)\mathcal{H}$ como

$$\widetilde{\pi}(a)\left(\sum_{j=1}^{k} \pi(y_j)\eta_j\right) := \sum_{j=1}^{k} \pi(ay_j)\eta_j.$$

Usando nuevamente unidades aproximadas se ve que $\widetilde{\pi}(a)$ es acotada y por lo tanto se extiende por continuidad a $\widetilde{\pi}(a) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Entonces el mapa $a \mapsto \widetilde{\pi}(a)$ es una representación que extiende a π.

Demostración.

Si $\tilde{\pi}$ existe necesariamente debe ser, para todo $a \in A$, $x \in J$, $\xi \in \mathcal{H}$: $\widetilde{\pi}(a)\pi(x)\xi = \widetilde{\pi}(ax)\xi = \pi(ax)\xi$. Como $\overline{\mathrm{span}}\{\pi(x)\xi : x \in J, \xi \in \mathcal{H}\} = \mathcal{H}$, si $\widetilde{\pi}$ existe es única. Para ver que existe, supongamos que $\sum_{i=1}^{n} \pi(x_i)\xi_i = 0$. Sea (u_λ) una unidad aproximada de J. Entonces $\forall a \in A$:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi(ax_i)\xi_i = \lim_\lambda \pi(au_\lambda) \sum_{i=1}^{n} \pi(x_i)\xi_i = 0.$$

Se puede definir entonces $\widetilde{\pi}(a) : \mathrm{span}\pi(J)\mathcal{H} \to \pi(J)\mathcal{H}$ como

$$\widetilde{\pi}(a) \left(\sum_{j=1}^{k} \pi(y_j)\eta_j \right) := \sum_{j=1}^{k} \pi(ay_j)\eta_j.$$

Usando nuevamente unidades aproximadas se ve que $\widetilde{\pi}(a)$ es acotada y por lo tanto se extiende por continuidad a $\widetilde{\pi}(a) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Entonces el mapa $a \mapsto \widetilde{\pi}(a)$ es una representación que extiende a π.
Ahora obsérvese que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ es π-invariante si y sólo si $\mathcal{K}$ es $\widetilde{\pi}$-invariante.

Demostración.

Si $\tilde{\pi}$ existe necesariamente debe ser, para todo $a \in A$, $x \in J$, $\xi \in \mathcal{H}$: $\widetilde{\pi}(a)\pi(x)\xi = \widetilde{\pi}(ax)\xi = \pi(ax)\xi$. Como $\overline{\mathrm{span}}\{\pi(x)\xi : x \in J, \xi \in \mathcal{H}\} = \mathcal{H}$, si $\widetilde{\pi}$ existe es única. Para ver que existe, supongamos que $\sum_{i=1}^{n} \pi(x_i)\xi_i = 0$. Sea (u_λ) una unidad aproximada de J. Entonces $\forall a \in A$:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi(ax_i)\xi_i = \lim_\lambda \pi(au_\lambda) \sum_{i=1}^{n} \pi(x_i)\xi_i = 0.$$

Se puede definir entonces $\widetilde{\pi}(a) : \mathrm{span}\pi(J)\mathcal{H} \to \pi(J)\mathcal{H}$ como

$$\widetilde{\pi}(a)\left(\sum_{j=1}^{k} \pi(y_j)\eta_j\right) := \sum_{j=1}^{k} \pi(ay_j)\eta_j.$$

Usando nuevamente unidades aproximadas se ve que $\widetilde{\pi}(a)$ es acotada y por lo tanto se extiende por continuidad a $\widetilde{\pi}(a) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Entonces el mapa $a \mapsto \widetilde{\pi}(a)$ es una representación que extiende a π.
Ahora obsérvese que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ es π-invariante si y sólo si $\mathcal{K}$ es $\widetilde{\pi}$-invariante. Entonces π es irreducible si y sólo si $\widetilde{\pi}$ lo es. □

Teorema

Sea A una C-subálgebra de $\mathrm{K}(\mathcal{H})$, y supongamos que la inclusión $A \hookrightarrow \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es irreducible.*

Teorema

Sea A *una C*-subálgebra de* $\mathrm{K}(\mathcal{H})$*, y supongamos que la inclusión* $A \hookrightarrow \mathrm{B}(\mathcal{H})$ *es irreducible.*

Teorema

Sea A una C-subálgebra de $\mathrm{K}(\mathcal{H})$, y supongamos que la inclusión $A \hookrightarrow \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es irreducible. Entonces $A = \mathrm{K}(\mathcal{H})$.*

Teorema

Sea A una C-subálgebra de* $\mathrm{K}(\mathcal{H})$, *y supongamos que la inclusión* $A \hookrightarrow \mathrm{B}(\mathcal{H})$ *es irreducible. Entonces* $A = \mathrm{K}(\mathcal{H})$.

Teorema

Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ *una representación irreducible.*

Teorema

Sea A una C-subálgebra de $\mathrm{K}(\mathcal{H})$, y supongamos que la inclusión $A \hookrightarrow \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es irreducible. Entonces $A = \mathrm{K}(\mathcal{H})$.*

Teorema

Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ una representación irreducible.

Teorema

Sea A una C-subálgebra de* $\mathrm{K}(\mathcal{H})$, *y supongamos que la inclusión* $A \hookrightarrow \mathrm{B}(\mathcal{H})$ *es irreducible. Entonces* $A = \mathrm{K}(\mathcal{H})$.

Teorema

Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ *una representación irreducible. Si* $\pi(A) \cap \mathrm{K}(\mathcal{H}) \neq 0$,

Teorema

Sea A una C-subálgebra de* $\mathrm{K}(\mathcal{H})$*, y supongamos que la inclusión* $A \hookrightarrow \mathrm{B}(\mathcal{H})$ *es irreducible. Entonces* $A = \mathrm{K}(\mathcal{H})$.

Teorema

Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ *una representación irreducible. Si* $\pi(A) \cap \mathrm{K}(\mathcal{H}) \neq 0$, *entonces* $\mathrm{K}(\mathcal{H}) \subseteq \pi(A)$.

Teorema

Sea A una C-subálgebra de $\mathrm{K}(\mathcal{H})$, y supongamos que la inclusión $A \hookrightarrow \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es irreducible. Entonces $A = \mathrm{K}(\mathcal{H})$.*

Teorema

Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ una representación irreducible. Si $\pi(A) \cap \mathrm{K}(\mathcal{H}) \neq 0$, entonces $\mathrm{K}(\mathcal{H}) \subseteq \pi(A)$. En este caso, si $I = \ker \pi$, y $\rho : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}')$ es otra representación irreducible tal que $\ker \rho = I$, entonces π y ρ son unitariamente equivalentes.

Teorema

Sea A una C-subálgebra de $\mathrm{K}(\mathcal{H})$, y supongamos que la inclusión $A \hookrightarrow \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es irreducible. Entonces $A = \mathrm{K}(\mathcal{H})$.*

Teorema

Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ una representación irreducible. Si $\pi(A) \cap \mathrm{K}(\mathcal{H}) \neq 0$, entonces $\mathrm{K}(\mathcal{H}) \subseteq \pi(A)$. En este caso, si $I = \ker \pi$, y $\rho : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}')$ es otra representación irreducible tal que $\ker \rho = I$, entonces π y ρ son unitariamente equivalentes.

Demostración.

Sea $J := \pi^{-1}(\mathrm{K}(\mathcal{H}))$.

Teorema

Sea A una C-subálgebra de $\mathrm{K}(\mathcal{H})$, y supongamos que la inclusión $A \hookrightarrow \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es irreducible. Entonces $A = \mathrm{K}(\mathcal{H})$.*

Teorema

Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ una representación irreducible. Si $\pi(A) \cap \mathrm{K}(\mathcal{H}) \neq 0$, entonces $\mathrm{K}(\mathcal{H}) \subseteq \pi(A)$. En este caso, si $I = \ker \pi$, y $\rho : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}')$ es otra representación irreducible tal que $\ker \rho = I$, entonces π y ρ son unitariamente equivalentes.

Demostración.

Sea $J := \pi^{-1}(\mathrm{K}(\mathcal{H}))$.

Teorema

Sea A una C-subálgebra de $\mathrm{K}(\mathcal{H})$, y supongamos que la inclusión $A \hookrightarrow \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es irreducible. Entonces $A = \mathrm{K}(\mathcal{H})$.*

Teorema

Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ una representación irreducible. Si $\pi(A) \cap \mathrm{K}(\mathcal{H}) \neq 0$, entonces $\mathrm{K}(\mathcal{H}) \subseteq \pi(A)$. En este caso, si $I = \ker \pi$, y $\rho : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}')$ es otra representación irreducible tal que $\ker \rho = I$, entonces π y ρ son unitariamente equivalentes.

Demostración.

Sea $J := \pi^{-1}(\mathrm{K}(\mathcal{H}))$. Entonces $J \lhd A$,

Teorema

Sea A una C-subálgebra de* $\mathrm{K}(\mathcal{H})$, *y supongamos que la inclusión* $A \hookrightarrow \mathrm{B}(\mathcal{H})$ *es irreducible. Entonces* $A = \mathrm{K}(\mathcal{H})$.

Teorema

Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ *una representación irreducible. Si* $\pi(A) \cap \mathrm{K}(\mathcal{H}) \neq 0$, *entonces* $\mathrm{K}(\mathcal{H}) \subseteq \pi(A)$. *En este caso, si* $I = \ker \pi$, *y* $\rho : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}')$ *es otra representación irreducible tal que* $\ker \rho = I$, *entonces* π *y* ρ *son unitariamente equivalentes.*

Demostración.

Sea $J := \pi^{-1}(\mathrm{K}(\mathcal{H}))$. Entonces $J \lhd A$, $J \neq I$,

Teorema

Sea A una C-subálgebra de $\mathrm{K}(\mathcal{H})$, y supongamos que la inclusión $A \hookrightarrow \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es irreducible. Entonces $A = \mathrm{K}(\mathcal{H})$.*

Teorema

Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ una representación irreducible. Si $\pi(A) \cap \mathrm{K}(\mathcal{H}) \neq 0$, entonces $\mathrm{K}(\mathcal{H}) \subseteq \pi(A)$. En este caso, si $I = \ker \pi$, y $\rho : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}')$ es otra representación irreducible tal que $\ker \rho = I$, entonces π y ρ son unitariamente equivalentes.

Demostración.

Sea $J := \pi^{-1}(\mathrm{K}(\mathcal{H}))$. Entonces $J \lhd A$, $J \neq I$, y $\pi(J)$ es una C*-subálgebra de $\mathrm{K}(\mathcal{H})$.

Teorema

Sea A una C-subálgebra de $\mathrm{K}(\mathcal{H})$, y supongamos que la inclusión $A \hookrightarrow \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es irreducible. Entonces $A = \mathrm{K}(\mathcal{H})$.*

Teorema

Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ una representación irreducible. Si $\pi(A) \cap \mathrm{K}(\mathcal{H}) \neq 0$, entonces $\mathrm{K}(\mathcal{H}) \subseteq \pi(A)$. En este caso, si $I = \ker \pi$, y $\rho : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}')$ es otra representación irreducible tal que $\ker \rho = I$, entonces π y ρ son unitariamente equivalentes.

Demostración.

Sea $J := \pi^{-1}(\mathrm{K}(\mathcal{H}))$. Entonces $J \lhd A$, $J \neq I$, y $\pi(J)$ es una C*-subálgebra de $\mathrm{K}(\mathcal{H})$. Como π es irreducible y $\pi|_J \neq 0$, entonces $\pi|_J$ es irreducble,

Teorema

Sea A una C-subálgebra de $\mathrm{K}(\mathcal{H})$, y supongamos que la inclusión $A \hookrightarrow \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es irreducible. Entonces $A = \mathrm{K}(\mathcal{H})$.*

Teorema

Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ una representación irreducible. Si $\pi(A) \cap \mathrm{K}(\mathcal{H}) \neq 0$, entonces $\mathrm{K}(\mathcal{H}) \subseteq \pi(A)$. En este caso, si $I = \ker \pi$, y $\rho : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}')$ es otra representación irreducible tal que $\ker \rho = I$, entonces π y ρ son unitariamente equivalentes.

Demostración.

Sea $J := \pi^{-1}(\mathrm{K}(\mathcal{H}))$. Entonces $J \lhd A$, $J \neq I$, y $\pi(J)$ es una C*-subálgebra de $\mathrm{K}(\mathcal{H})$. Como π es irreducible y $\pi|_J \neq 0$, entonces $\pi|_J$ es irreducble, y entonces $\pi(J) = \mathrm{K}(\mathcal{H})$ por el teorema anterior.

Teorema

Sea A una C-subálgebra de $\mathrm{K}(\mathcal{H})$, y supongamos que la inclusión $A \hookrightarrow \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es irreducible. Entonces $A = \mathrm{K}(\mathcal{H})$.*

Teorema

Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ una representación irreducible. Si $\pi(A) \cap \mathrm{K}(\mathcal{H}) \neq 0$, entonces $\mathrm{K}(\mathcal{H}) \subseteq \pi(A)$. En este caso, si $I = \ker \pi$, y $\rho : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}')$ es otra representación irreducible tal que $\ker \rho = I$, entonces π y ρ son unitariamente equivalentes.

Demostración.

Sea $J := \pi^{-1}(\mathrm{K}(\mathcal{H}))$. Entonces $J \lhd A$, $J \neq I$, y $\pi(J)$ es una C*-subálgebra de $\mathrm{K}(\mathcal{H})$. Como π es irreducible y $\pi|_J \neq 0$, entonces $\pi|_J$ es irreducble, y entonces $\pi(J) = \mathrm{K}(\mathcal{H})$ por el teorema anterior. En cuanto a la segunda afirmación basta notar que

Teorema

Sea A una C-subálgebra de* $\mathrm{K}(\mathcal{H})$*, y supongamos que la inclusión* $A \hookrightarrow \mathrm{B}(\mathcal{H})$ *es irreducible. Entonces* $A = \mathrm{K}(\mathcal{H})$.

Teorema

Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ *una representación irreducible. Si* $\pi(A) \cap \mathrm{K}(\mathcal{H}) \neq 0$*, entonces* $\mathrm{K}(\mathcal{H}) \subseteq \pi(A)$*. En este caso, si* $I = \ker \pi$*, y* $\rho : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}')$ *es otra representación irreducible tal que* $\ker \rho = I$*, entonces* π *y* ρ *son unitariamente equivalentes.*

Demostración.

Sea $J := \pi^{-1}(\mathrm{K}(\mathcal{H}))$. Entonces $J \lhd A$, $J \neq I$, y $\pi(J)$ es una C*-subálgebra de $\mathrm{K}(\mathcal{H})$. Como π es irreducible y $\pi|_J \neq 0$, entonces $\pi|_J$ es irreducble, y entonces $\pi(J) = \mathrm{K}(\mathcal{H})$ por el teorema anterior. En cuanto a la segunda afirmación basta notar que

$$\rho(A) \cong A/I$$

Teorema

Sea A una C-subálgebra de $\mathrm{K}(\mathcal{H})$, y supongamos que la inclusión $A \hookrightarrow \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es irreducible. Entonces $A = \mathrm{K}(\mathcal{H})$.*

Teorema

Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ una representación irreducible. Si $\pi(A) \cap \mathrm{K}(\mathcal{H}) \neq 0$, entonces $\mathrm{K}(\mathcal{H}) \subseteq \pi(A)$. En este caso, si $I = \ker \pi$, y $\rho : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}')$ es otra representación irreducible tal que $\ker \rho = I$, entonces π y ρ son unitariamente equivalentes.

Demostración.

Sea $J := \pi^{-1}(\mathrm{K}(\mathcal{H}))$. Entonces $J \lhd A$, $J \neq I$, y $\pi(J)$ es una C*-subálgebra de $\mathrm{K}(\mathcal{H})$. Como π es irreducible y $\pi|_J \neq 0$, entonces $\pi|_J$ es irreducble, y entonces $\pi(J) = \mathrm{K}(\mathcal{H})$ por el teorema anterior. En cuanto a la segunda afirmación basta notar que

$$\rho(A) \cong A/I \cong \pi(A)$$

Teorema

Sea A una C-subálgebra de $\mathrm{K}(\mathcal{H})$, y supongamos que la inclusión $A \hookrightarrow \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es irreducible. Entonces $A = \mathrm{K}(\mathcal{H})$.*

Teorema

Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ una representación irreducible. Si $\pi(A) \cap \mathrm{K}(\mathcal{H}) \neq 0$, entonces $\mathrm{K}(\mathcal{H}) \subseteq \pi(A)$. En este caso, si $I = \ker \pi$, y $\rho : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}')$ es otra representación irreducible tal que $\ker \rho = I$, entonces π y ρ son unitariamente equivalentes.

Demostración.

Sea $J := \pi^{-1}(\mathrm{K}(\mathcal{H}))$. Entonces $J \lhd A$, $J \neq I$, y $\pi(J)$ es una C*-subálgebra de $\mathrm{K}(\mathcal{H})$. Como π es irreducible y $\pi|_J \neq 0$, entonces $\pi|_J$ es irreducble, y entonces $\pi(J) = \mathrm{K}(\mathcal{H})$ por el teorema anterior. En cuanto a la segunda afirmación basta notar que

$$\rho(A) \cong A/I \cong \pi(A) \cong \mathrm{K}(\mathcal{H}),$$

Teorema

Sea A una C-subálgebra de $\mathrm{K}(\mathcal{H})$, y supongamos que la inclusión $A \hookrightarrow \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es irreducible. Entonces $A = \mathrm{K}(\mathcal{H})$.*

Teorema

Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ una representación irreducible. Si $\pi(A) \cap \mathrm{K}(\mathcal{H}) \neq 0$, entonces $\mathrm{K}(\mathcal{H}) \subseteq \pi(A)$. En este caso, si $I = \ker \pi$, y $\rho : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}')$ es otra representación irreducible tal que $\ker \rho = I$, entonces π y ρ son unitariamente equivalentes.

Demostración.

Sea $J := \pi^{-1}(\mathrm{K}(\mathcal{H}))$. Entonces $J \lhd A$, $J \neq I$, y $\pi(J)$ es una C*-subálgebra de $\mathrm{K}(\mathcal{H})$. Como π es irreducible y $\pi|_J \neq 0$, entonces $\pi|_J$ es irreducble, y entonces $\pi(J) = \mathrm{K}(\mathcal{H})$ por el teorema anterior. En cuanto a la segunda afirmación basta notar que

$$\rho(A) \cong A/I \cong \pi(A) \cong \mathrm{K}(\mathcal{H}),$$

y que esta última C*-álgebra tiene una única representación irreducible a menos de equivalencia unitaria. □

Definición

Sea A una C-álgebra. Se dice que A es* $\mathtt{CCR}$ *o* $\mathtt{liminal}$ *si para toda representación irreducible π de A se tiene $\pi(A) = \mathrm{K}(\mathcal{H}_\pi)$.*

Definición

Sea A una C^*-álgebra. Se dice que A es $\mathtt{CCR}$ *o* $\mathtt{liminal}$ *si para toda representación irreducible π de A se tiene $\pi(A) = \mathrm{K}(\mathcal{H}_\pi)$.*

Definición

Sea A una C^*-álgebra. Se dice que A es CCR o $\mathtt{liminal}$ si para toda representación irreducible π de A se tiene $\pi(A) = \mathrm{K}(\mathcal{H}_\pi)$. Se dice que A es GCR o $\mathtt{post\text{-}liminal}$ si $\pi(A) = \mathrm{K}(\mathcal{H}_\pi)$.

Definición

Sea A una C-álgebra. Se dice que A es* `CCR` *o* `liminal` *si para toda representación irreducible π de A se tiene $\pi(A) = \mathrm{K}(\mathcal{H}_\pi)$. Se dice que A es* `GCR` *o* `post-liminal` *si $\pi(A) = \mathrm{K}(\mathcal{H}_\pi)$. En otro caso se dice que A es* `NGR` *o* `anti-liminal`*.*

Definición

Sea A una C^*-álgebra. Se dice que A es $\mathtt{CCR}$ *o* $\mathtt{liminal}$ *si para toda representación irreducible π de A se tiene $\pi(A) = \mathrm{K}(\mathcal{H}_\pi)$. Se dice que A es* $\mathtt{GCR}$ *o* $\mathtt{post\text{-}liminal}$ *si $\pi(A) = \mathrm{K}(\mathcal{H}_\pi)$. En otro caso se dice que A es* $\mathtt{NGR}$ *o* $\mathtt{anti\text{-}liminal}$.

Teorema

Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ una representación irreducible,

Definición

Sea A una C^*-álgebra. Se dice que A es CCR o $\mathtt{liminal}$ si para toda representación irreducible π de A se tiene $\pi(A) = \mathrm{K}(\mathcal{H}_\pi)$. Se dice que A es GCR o $\mathtt{post\text{-}liminal}$ si $\pi(A) = \mathrm{K}(\mathcal{H}_\pi)$. En otro caso se dice que A es NGR o $\mathtt{anti\text{-}liminal}$.

Teorema

Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ una representación irreducible,

Definición

Sea A una C^*-álgebra. Se dice que A es $\mathtt{CCR}$ o $\mathtt{liminal}$ si para toda representación irreducible π de A se tiene $\pi(A) = \mathrm{K}(\mathcal{H}_\pi)$. Se dice que A es $\mathtt{GCR}$ o $\mathtt{post\text{-}liminal}$ si $\pi(A) = \mathrm{K}(\mathcal{H}_\pi)$. En otro caso se dice que A es $\mathtt{NGR}$ o $\mathtt{anti\text{-}liminal}$.

Teorema

Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ una representación irreducible, y sea $I = \ker \pi$. Si $\pi(A) \cap \mathrm{K}(\mathcal{H}) = 0$,

Definición

Sea A una C^*-álgebra. Se dice que A es `CCR` *o* `liminal` *si para toda representación irreducible π de A se tiene $\pi(A) = \mathrm{K}(\mathcal{H}_\pi)$. Se dice que A es* `GCR` *o* `post-liminal` *si $\pi(A) = \mathrm{K}(\mathcal{H}_\pi)$. En otro caso se dice que A es* `NGR` *o* `anti-liminal`*.*

Teorema

Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ una representación irreducible, y sea $I = \ker \pi$. Si $\pi(A) \cap \mathrm{K}(\mathcal{H}) = 0$, entonces existe una cantidad no numerable de clases de equivalencia unitaria de representaciones irreducibles de A con núcleo I.

Definición

Sea A una C-álgebra. Se dice que A es* $\mathtt{CCR}$ *o* $\mathtt{liminal}$ *si para toda representación irreducible π de A se tiene $\pi(A) = \mathrm{K}(\mathcal{H}_\pi)$. Se dice que A es* $\mathtt{GCR}$ *o* $\mathtt{post\text{-}liminal}$ *si $\pi(A) \supseteq \mathrm{K}(\mathcal{H}_\pi)$. En otro caso se dice que A es* $\mathtt{NGR}$ *o* $\mathtt{anti\text{-}liminal}$.

Teorema

Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ una representación irreducible, y sea $I = \ker \pi$. Si $\pi(A) \cap \mathrm{K}(\mathcal{H}) = 0$, entonces existe una cantidad no numerable de clases de equivalencia unitaria de representaciones irreducibles de A con núcleo I.

Si A es unital, simple y de dimensión infinita,

Definición

Sea A una C^*-álgebra. Se dice que A es `CCR` *o* `liminal` *si para toda representación irreducible π de A se tiene $\pi(A) = \mathrm{K}(\mathcal{H}_\pi)$. Se dice que A es* `GCR` *o* `post-liminal` *si $\pi(A) = \mathrm{K}(\mathcal{H}_\pi)$. En otro caso se dice que A es* `NGR` *o* `anti-liminal`*.*

Teorema

Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ una representación irreducible, y sea $I = \ker \pi$. Si $\pi(A) \cap \mathrm{K}(\mathcal{H}) = 0$, entonces existe una cantidad no numerable de clases de equivalencia unitaria de representaciones irreducibles de A con núcleo I.

Si A es unital, simple y de dimensión infinita, entonces $\mathrm{Prim}(A) = 0$ y A es NGR.

Definición

Sea A una C^*-álgebra. Se dice que A es `CCR` *o* `liminal` *si para toda representación irreducible π de A se tiene $\pi(A) = \mathrm{K}(\mathcal{H}_\pi)$. Se dice que A es* `GCR` *o* `post-liminal` *si $\pi(A) = \mathrm{K}(\mathcal{H}_\pi)$. En otro caso se dice que A es* `NGR` *o* `anti-liminal`.

Teorema

Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ una representación irreducible, y sea $I = \ker \pi$. Si $\pi(A) \cap \mathrm{K}(\mathcal{H}) = 0$, entonces existe una cantidad no numerable de clases de equivalencia unitaria de representaciones irreducibles de A con núcleo I.

Si A es unital, simple y de dimensión infinita, entonces $\mathrm{Prim}(A) = 0$ y A es NGR. Naimark conjeturó que si $\hat{A}$ tiene sólo un punto, entonces $A \cong \mathrm{K}(\mathcal{H})$.

Definición

Sea A una C-álgebra. Se dice que A es CCR o $\mathtt{liminal}$ si para toda representación irreducible π de A se tiene $\pi(A) = \mathrm{K}(\mathcal{H}_\pi)$. Se dice que A es GCR o $\mathtt{post\text{-}liminal}$ si $\pi(A) \supseteq \mathrm{K}(\mathcal{H}_\pi)$. En otro caso se dice que A es NGR o $\mathtt{anti\text{-}liminal}$.*

Teorema

Sea $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ una representación irreducible, y sea $I = \ker \pi$. Si $\pi(A) \cap \mathrm{K}(\mathcal{H}) = 0$, entonces existe una cantidad no numerable de clases de equivalencia unitaria de representaciones irreducibles de A con núcleo I.

Si A es unital, simple y de dimensión infinita, entonces $\mathrm{Prim}(A) = 0$ y A es NGR. Naimark conjeturó que si $\hat{A}$ tiene sólo un punto, entonces $A \cong \mathrm{K}(\mathcal{H})$. Esto es cierto si A es separable, pero en general no lo es si A no es separable.

Ejemplos

A continuación calculamos el espectro y el espacio de ideales primitivos en un par de ejemplos.

Ejemplos

A continuación calculamos el espectro y el espacio de ideales primitivos en un par de ejemplos.

Ejemplos

A continuación calculamos el espectro y el espacio de ideales primitivos en un par de ejemplos.

(1) $M_n(C(X))$, X compacto y de Hausdorff.

Ejemplos

A continuación calculamos el espectro y el espacio de ideales primitivos en un par de ejemplos.

(1) $M_n(C(X))$, X compacto y de Hausdorff.

Sea $A = C(X, M_n)$.

Ejemplos

A continuación calculamos el espectro y el espacio de ideales primitivos en un par de ejemplos.

(1) $M_n(C(X))$, X compacto y de Hausdorff.

Sea $A = C(X, M_n)$. Mostraremos que el mapa $X \to \hat{A}$ tal que $x \mapsto \delta_x : \delta_x(a) = a(x)$ es un homeomorfismo.

Ejemplos

A continuación calculamos el espectro y el espacio de ideales primitivos en un par de ejemplos.

(1) $M_n(C(X))$, X compacto y de Hausdorff.

Sea $A = C(X, M_n)$. Mostraremos que el mapa $X \to \hat{A}$ tal que $x \mapsto \delta_x : \delta_x(a) = a(x)$ es un homeomorfismo. Sea $\pi \in \hat{A}$.

Ejemplos

A continuación calculamos el espectro y el espacio de ideales primitivos en un par de ejemplos.

(1) $M_n(C(X))$, X compacto y de Hausdorff.

Sea $A = C(X, M_n)$. Mostraremos que el mapa $X \to \hat{A}$ tal que $x \mapsto \delta_x : \delta_x(a) = a(x)$ es un homeomorfismo. Sea $\pi \in \hat{A}$. Como $\pi(C(X)Id_n) \subseteq \pi(A)'$

Ejemplos

A continuación calculamos el espectro y el espacio de ideales primitivos en un par de ejemplos.

(1) $M_n(C(X))$, X compacto y de Hausdorff.

Sea $A = C(X, M_n)$. Mostraremos que el mapa $X \to \hat{A}$ tal que $x \mapsto \delta_x : \delta_x(a) = a(x)$ es un homeomorfismo. Sea $\pi \in \hat{A}$. Como $\pi(C(X)Id_n) \subseteq \pi(A)' = \mathbb{C}Id$,

Ejemplos

A continuación calculamos el espectro y el espacio de ideales primitivos en un par de ejemplos.

(1) $M_n(C(X))$, X compacto y de Hausdorff.

Sea $A = C(X, M_n)$. Mostraremos que el mapa $X \to \hat{A}$ tal que $x \mapsto \delta_x : \delta_x(a) = a(x)$ es un homeomorfismo. Sea $\pi \in \hat{A}$. Como $\pi(C(X)Id_n) \subseteq \pi(A)' = \mathbb{C}Id$, existe un único $x \in X$ tal que $\pi(f) = f(x)Id$, para todo $f \in C(X)$.

Ejemplos

A continuación calculamos el espectro y el espacio de ideales primitivos en un par de ejemplos.

(1) $M_n(C(X))$, X compacto y de Hausdorff.

Sea $A = C(X, M_n)$. Mostraremos que el mapa $X \to \hat{A}$ tal que $x \mapsto \delta_x : \delta_x(a) = a(x)$ es un homeomorfismo. Sea $\pi \in \hat{A}$. Como $\pi(C(X)Id_n) \subseteq \pi(A)' = \mathbb{C}Id$, existe un único $x \in X$ tal que $\pi(f) = f(x)Id$, para todo $f \in C(X)$. Veamos que $\ker\delta_x \subseteq \ker\pi$.

Ejemplos

A continuación calculamos el espectro y el espacio de ideales primitivos en un par de ejemplos.

(1) $M_n(C(X))$, X compacto y de Hausdorff.

Sea $A = C(X, M_n)$. Mostraremos que el mapa $X \to \hat{A}$ tal que $x \mapsto \delta_x : \delta_x(a) = a(x)$ es un homeomorfismo. Sea $\pi \in \hat{A}$. Como $\pi(C(X)Id_n) \subseteq \pi(A)' = \mathbb{C}Id$, existe un único $x \in X$ tal que $\pi(f) = f(x)Id$, para todo $f \in C(X)$. Veamos que $\ker\delta_x \subseteq \ker\pi$. Sean $a \in \ker\delta_x$, $\varepsilon > 0$, y V_x un entorno de x tal que $\|a(y)\| < \varepsilon$ para todo $y \in V_x$; si $f \in C(X)$ es tal que $f(x) = 0$ y $f|_{X\setminus V_x} = 1$, $0 \leq f \leq 1$,

Ejemplos

A continuación calculamos el espectro y el espacio de ideales primitivos en un par de ejemplos.

(1) $M_n(C(X))$, X compacto y de Hausdorff.

Sea $A = C(X, M_n)$. Mostraremos que el mapa $X \to \hat{A}$ tal que $x \mapsto \delta_x : \delta_x(a) = a(x)$ es un homeomorfismo. Sea $\pi \in \hat{A}$. Como $\pi(C(X)Id_n) \subseteq \pi(A)' = \mathbb{C}Id$, existe un único $x \in X$ tal que $\pi(f) = f(x)Id$, para todo $f \in C(X)$. Veamos que $\ker\delta_x \subseteq \ker\pi$. Sean $a \in \ker\delta_x$, $\varepsilon > 0$, y V_x un entorno de x tal que $\|a(y)\| < \varepsilon$ para todo $y \in V_x$; si $f \in C(X)$ es tal que $f(x) = 0$ y $f|_{X \setminus V_x} = 1$, $0 \leq f \leq 1$, entonces:

Ejemplos

A continuación calculamos el espectro y el espacio de ideales primitivos en un par de ejemplos.

(1) $M_n(C(X))$, X compacto y de Hausdorff.

Sea $A = C(X, M_n)$. Mostraremos que el mapa $X \to \hat{A}$ tal que $x \mapsto \delta_x : \delta_x(a) = a(x)$ es un homeomorfismo. Sea $\pi \in \hat{A}$. Como $\pi(C(X)Id_n) \subseteq \pi(A)' = \mathbb{C}Id$, existe un único $x \in X$ tal que $\pi(f) = f(x)Id$, para todo $f \in C(X)$. Veamos que $\ker\delta_x \subseteq \ker\pi$. Sean $a \in \ker\delta_x$, $\varepsilon > 0$, y V_x un entorno de x tal que $\|a(y)\| < \varepsilon$ para todo $y \in V_x$; si $f \in C(X)$ es tal que $f(x) = 0$ y $f|_{X \setminus V_x} = 1$, $0 \leq f \leq 1$, entonces:

$$\|a - fa\| = \sup_{y \in V_x} \|(a - fa)(y)\|$$

Ejemplos

A continuación calculamos el espectro y el espacio de ideales primitivos en un par de ejemplos.

(1) $M_n(C(X))$, X compacto y de Hausdorff.

Sea $A = C(X, M_n)$. Mostraremos que el mapa $X \to \hat{A}$ tal que $x \mapsto \delta_x : \delta_x(a) = a(x)$ es un homeomorfismo. Sea $\pi \in \hat{A}$. Como $\pi(C(X)Id_n) \subseteq \pi(A)' = \mathbb{C}Id$, existe un único $x \in X$ tal que $\pi(f) = f(x)Id$, para todo $f \in C(X)$. Veamos que $\ker\delta_x \subseteq \ker\pi$. Sean $a \in \ker\delta_x$, $\varepsilon > 0$, y V_x un entorno de x tal que $\|a(y)\| < \varepsilon$ para todo $y \in V_x$; si $f \in C(X)$ es tal que $f(x) = 0$ y $f|_{X \setminus V_x} = 1$, $0 \leq f \leq 1$, entonces:

$$\|a - fa\| = \sup_{y \in V_x} \|(a - fa)(y)\| \leq \sup_{y \in V_x} \|(1 - f)(a)(y)\|$$

Ejemplos

A continuación calculamos el espectro y el espacio de ideales primitivos en un par de ejemplos.

(1) $M_n(C(X))$, X compacto y de Hausdorff.

Sea $A = C(X, M_n)$. Mostraremos que el mapa $X \to \hat{A}$ tal que $x \mapsto \delta_x : \delta_x(a) = a(x)$ es un homeomorfismo. Sea $\pi \in \hat{A}$. Como $\pi(C(X)Id_n) \subseteq \pi(A)' = \mathbb{C}Id$, existe un único $x \in X$ tal que $\pi(f) = f(x)Id$, para todo $f \in C(X)$. Veamos que $\ker\delta_x \subseteq \ker\pi$. Sean $a \in \ker\delta_x$, $\varepsilon > 0$, y V_x un entorno de x tal que $\|a(y)\| < \varepsilon$ para todo $y \in V_x$; si $f \in C(X)$ es tal que $f(x) = 0$ y $f|_{X\setminus V_x} = 1$, $0 \leq f \leq 1$, entonces:

$$\|a - fa\| = \sup_{y \in V_x} \|(a - fa)(y)\| \leq \sup_{y \in V_x} \|(1 - f)(a)(y)\| < \varepsilon.$$

Ejemplos

A continuación calculamos el espectro y el espacio de ideales primitivos en un par de ejemplos.

(1) $M_n(C(X))$, X compacto y de Hausdorff.

Sea $A = C(X, M_n)$. Mostraremos que el mapa $X \to \hat{A}$ tal que $x \mapsto \delta_x : \delta_x(a) = a(x)$ es un homeomorfismo. Sea $\pi \in \hat{A}$. Como $\pi(C(X)Id_n) \subseteq \pi(A)' = \mathbb{C}Id$, existe un único $x \in X$ tal que $\pi(f) = f(x)Id$, para todo $f \in C(X)$. Veamos que $\ker\delta_x \subseteq \ker\pi$. Sean $a \in \ker\delta_x$, $\varepsilon > 0$, y V_x un entorno de x tal que $\|a(y)\| < \varepsilon$ para todo $y \in V_x$; si $f \in C(X)$ es tal que $f(x) = 0$ y $f|_{X \setminus V_x} = 1$, $0 \leq f \leq 1$, entonces:

$$\|a - fa\| = \sup_{y \in V_x} \|(a - fa)(y)\| \leq \sup_{y \in V_x} \|(1 - f)(a)(y)\| < \varepsilon.$$

Se deduce que $\pi(a) = 0$, porque al ser $f(x) = 0$:

Ejemplos

A continuación calculamos el espectro y el espacio de ideales primitivos en un par de ejemplos.

(1) $M_n(C(X))$, X compacto y de Hausdorff.

Sea $A = C(X, M_n)$. Mostraremos que el mapa $X \to \hat{A}$ tal que $x \mapsto \delta_x : \delta_x(a) = a(x)$ es un homeomorfismo. Sea $\pi \in \hat{A}$. Como $\pi(C(X)Id_n) \subseteq \pi(A)' = \mathbb{C}Id$, existe un único $x \in X$ tal que $\pi(f) = f(x)Id$, para todo $f \in C(X)$. Veamos que $\ker\delta_x \subseteq \ker\pi$. Sean $a \in \ker\delta_x$, $\varepsilon > 0$, y V_x un entorno de x tal que $\|a(y)\| < \varepsilon$ para todo $y \in V_x$; si $f \in C(X)$ es tal que $f(x) = 0$ y $f|_{X \setminus V_x} = 1$, $0 \leq f \leq 1$, entonces:

$$\|a - fa\| = \sup_{y \in V_x} \|(a - fa)(y)\| \leq \sup_{y \in V_x} \|(1 - f)(a)(y)\| < \varepsilon.$$

Se deduce que $\pi(a) = 0$, porque al ser $f(x) = 0$:

$$\|\pi(a)\| = \|\pi(a) - \pi(f)\pi(a)\|$$

Ejemplos

A continuación calculamos el espectro y el espacio de ideales primitivos en un par de ejemplos.

(1) $M_n(C(X))$, X compacto y de Hausdorff.

Sea $A = C(X, M_n)$. Mostraremos que el mapa $X \to \hat{A}$ tal que $x \mapsto \delta_x : \delta_x(a) = a(x)$ es un homeomorfismo. Sea $\pi \in \hat{A}$. Como $\pi(C(X)Id_n) \subseteq \pi(A)' = \mathbb{C}Id$, existe un único $x \in X$ tal que $\pi(f) = f(x)Id$, para todo $f \in C(X)$. Veamos que $\ker\delta_x \subseteq \ker\pi$. Sean $a \in \ker\delta_x$, $\varepsilon > 0$, y V_x un entorno de x tal que $\|a(y)\| < \varepsilon$ para todo $y \in V_x$; si $f \in C(X)$ es tal que $f(x) = 0$ y $f|_{X\setminus V_x} = 1$, $0 \leq f \leq 1$, entonces:

$$\|a - fa\| = \sup_{y\in V_x} \|(a - fa)(y)\| \leq \sup_{y\in V_x} \|(1 - f)(a)(y)\| < \varepsilon.$$

Se deduce que $\pi(a) = 0$, porque al ser $f(x) = 0$:

$$\|\pi(a)\| = \|\pi(a) - \pi(f)\pi(a)\| = \|\pi(a) - \pi(fa)\|$$

Ejemplos

A continuación calculamos el espectro y el espacio de ideales primitivos en un par de ejemplos.

(1) $M_n(C(X))$, X compacto y de Hausdorff.

Sea $A = C(X, M_n)$. Mostraremos que el mapa $X \to \hat{A}$ tal que $x \mapsto \delta_x : \delta_x(a) = a(x)$ es un homeomorfismo. Sea $\pi \in \hat{A}$. Como $\pi(C(X)Id_n) \subseteq \pi(A)' = \mathbb{C}Id$, existe un único $x \in X$ tal que $\pi(f) = f(x)Id$, para todo $f \in C(X)$. Veamos que $\ker\delta_x \subseteq \ker\pi$. Sean $a \in \ker\delta_x$, $\varepsilon > 0$, y V_x un entorno de x tal que $\|a(y)\| < \varepsilon$ para todo $y \in V_x$; si $f \in C(X)$ es tal que $f(x) = 0$ y $f|_{X\setminus V_x} = 1$, $0 \leq f \leq 1$, entonces:

$$\|a - fa\| = \sup_{y\in V_x} \|(a - fa)(y)\| \leq \sup_{y\in V_x} \|(1 - f)(a)(y)\| < \varepsilon.$$

Se deduce que $\pi(a) = 0$, porque al ser $f(x) = 0$:

$$\|\pi(a)\| = \|\pi(a) - \pi(f)\pi(a)\| = \|\pi(a) - \pi(fa)\| \leq \|a - fa\|$$

Ejemplos

A continuación calculamos el espectro y el espacio de ideales primitivos en un par de ejemplos.

(1) $M_n(C(X))$, X compacto y de Hausdorff.

Sea $A = C(X, M_n)$. Mostraremos que el mapa $X \to \hat{A}$ tal que $x \mapsto \delta_x : \delta_x(a) = a(x)$ es un homeomorfismo. Sea $\pi \in \hat{A}$. Como $\pi(C(X)Id_n) \subseteq \pi(A)' = \mathbb{C}Id$, existe un único $x \in X$ tal que $\pi(f) = f(x)Id$, para todo $f \in C(X)$. Veamos que $\ker\delta_x \subseteq \ker\pi$. Sean $a \in \ker\delta_x$, $\varepsilon > 0$, y V_x un entorno de x tal que $\|a(y)\| < \varepsilon$ para todo $y \in V_x$; si $f \in C(X)$ es tal que $f(x) = 0$ y $f|_{X\setminus V_x} = 1$, $0 \leq f \leq 1$, entonces:

$$\|a - fa\| = \sup_{y\in V_x} \|(a - fa)(y)\| \leq \sup_{y\in V_x} \|(1 - f)(a)(y)\| < \varepsilon.$$

Se deduce que $\pi(a) = 0$, porque al ser $f(x) = 0$:

$$\|\pi(a)\| = \|\pi(a) - \pi(f)\pi(a)\| = \|\pi(a) - \pi(fa)\| \leq \|a - fa\| < \varepsilon.$$

Luego se tiene el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "\pi"] \arrow[dl, "\delta_x"'] \arrow[d, "q"] & B(\mathcal{H}_\pi) \\
M_n = \frac{A}{\ker\delta_x} \arrow[r, "j"'] & \frac{A}{\ker\pi} \arrow[ur, "\bar{\pi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Luego se tiene el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} & & A \arrow[r, "\pi"] \arrow[dll, "\delta_x"'] \arrow[d, "q"] & B(\mathcal{H}_\pi) \\ M_n = \frac{A}{\ker\delta_x} \arrow[rr, "j"'] & & \frac{A}{\ker\pi} \arrow[ur, "\bar{\pi}"'] & \end{tikzcd}$$

Entonces $\bar{\pi} \circ j \circ \delta_x = \bar{\pi} \circ q = \pi$.

Luego se tiene el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} & & A \arrow[r, "\pi"] \arrow[dll, "\delta_x"'] \arrow[d, "q"] & \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi) \\ M_n = \frac{A}{\ker\delta_x} \arrow[rr, "j"'] & & \frac{A}{\ker\pi} \arrow[ur, "\bar{\pi}"'] & \end{tikzcd}$$

Entonces $\bar{\pi} \circ j \circ \delta_x = \bar{\pi} \circ q = \pi$. Luego $\bar{\pi} \circ j \circ \delta_x$ es irreducible,

Luego se tiene el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} & & A \arrow[dll, "\delta_x"'] \arrow[d, "q"] \arrow[r, "\pi"] & B(\mathcal{H}_\pi) \\ M_n = \frac{A}{\ker\delta_x} \arrow[rr, "j"'] & & \frac{A}{\ker\pi} \arrow[ur, "\bar{\pi}"'] & \end{tikzcd}$$

Entonces $\bar{\pi} \circ j \circ \delta_x = \bar{\pi} \circ q = \pi$. Luego $\bar{\pi} \circ j \circ \delta_x$ es irreducible, y por lo tanto $\bar{\pi} \circ j$ también es irreducible.

Luego se tiene el diagrama siguiente:

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "\pi"] \arrow[dl, "\delta_x"'] \arrow[d, "q"] & \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi) \\
M_n = \frac{A}{\ker\delta_x} \arrow[r, "j"'] & \frac{A}{\ker\pi} \arrow[ur, "\bar{\pi}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Entonces $\bar{\pi} \circ j \circ \delta_x = \bar{\pi} \circ q = \pi$. Luego $\bar{\pi} \circ j \circ \delta_x$ es irreducible, y por lo tanto $\bar{\pi} \circ j$ también es irreducible. Entonces existe $U : \mathcal{H}_\pi \to \mathbb{C}^n$ unitaria tal que

Luego se tiene el diagrama siguiente:

$$
\begin{tikzcd}
& & A \arrow[r, "\pi"] \arrow[dll, "\delta_x"'] \arrow[d, "q"] & B(\mathcal{H}_\pi) \\
M_n = \frac{A}{\ker\delta_x} \arrow[rr, "j"'] & & \frac{A}{\ker\pi} \arrow[ur, "\bar{\pi}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Entonces $\bar{\pi} \circ j \circ \delta_x = \bar{\pi} \circ q = \pi$. Luego $\bar{\pi} \circ j \circ \delta_x$ es irreducible, y por lo tanto $\bar{\pi} \circ j$ también es irreducible. Entonces existe $U : \mathcal{H}_\pi \to \mathbb{C}^n$ unitaria tal que

$$\pi(a) = \bar{\pi} \circ j(a + \ker\delta_x)$$

Luego se tiene el diagrama siguiente:

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "\pi"] \arrow[dl, "\delta_x"'] \arrow[d, "q"] & \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi) \\
M_n = \dfrac{A}{\ker\delta_x} \arrow[r, "j"'] & \dfrac{A}{\ker\pi} \arrow[ur, "\bar{\pi}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Entonces $\bar{\pi} \circ j \circ \delta_x = \bar{\pi} \circ q = \pi$. Luego $\bar{\pi} \circ j \circ \delta_x$ es irreducible, y por lo tanto $\bar{\pi} \circ j$ también es irreducible. Entonces existe $U : \mathcal{H}_\pi \to \mathbb{C}^n$ unitaria tal que

$$\pi(a) = \bar{\pi} \circ j(a + \ker\delta_x) = U(a + \ker\delta_x)U^*.$$

Entonces $U\delta_x(a)U^* = \pi(a)$ para todo $a \in A$.

Luego se tiene el diagrama siguiente:

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "\delta_x"'] \arrow[d, "q"] \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi) \\
M_n = \dfrac{A}{\mathrm{ker}\delta_x} \arrow[r, "j"'] & \dfrac{A}{\mathrm{ker}\pi} \arrow[ur, "\bar{\pi}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Entonces $\bar{\pi} \circ j \circ \delta_x = \bar{\pi} \circ q = \pi$. Luego $\bar{\pi} \circ j \circ \delta_x$ es irreducible, y por lo tanto $\bar{\pi} \circ j$ también es irreducible. Entonces existe $U : \mathcal{H}_\pi \to \mathbb{C}^n$ unitaria tal que

$$\pi(a) = \bar{\pi} \circ j(a + \mathrm{ker}\delta_x) = U(a + \mathrm{ker}\delta_x)U^*.$$

Entonces $U\delta_x(a)U^* = \pi(a)$ para todo $a \in A$. Luego es $[\pi] = [\delta_x]$.

Luego se tiene el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "\pi"] \arrow[dl, "\delta_x"'] \arrow[d, "q"] & \mathrm{B}(\mathcal{H}_\pi) \\
M_n = \frac{A}{\ker\delta_x} \arrow[r, "j"'] & \frac{A}{\ker\pi} \arrow[ur, "\bar{\pi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Entonces $\bar{\pi} \circ j \circ \delta_x = \bar{\pi} \circ q = \pi$. Luego $\bar{\pi} \circ j \circ \delta_x$ es irreducible, y por lo tanto $\bar{\pi} \circ j$ también es irreducible. Entonces existe $U : \mathcal{H}_\pi \to \mathbb{C}^n$ unitaria tal que

$$\pi(a) = \bar{\pi} \circ j(a + \ker\delta_x) = U(a + \ker\delta_x)U^*.$$

Entonces $U\delta_x(a)U^* = \pi(a)$ para todo $a \in A$. Luego es $[\pi] = [\delta_x]$.

Ejercicio. Completar los detalles faltantes para ver que $x \mapsto \delta_x$ es un homeomorfismo.

(2) Álgebra de Toeplitz $\mathcal{T}$.

Sea $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$,

(2) Álgebra de Toeplitz $\mathcal{T}$.

Sea $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$, y sea $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n\geq 0}$ la base ortonormal canónica de $\ell^2(\mathbb{N})$, es decir:

(2) Álgebra de Toeplitz $\mathcal{T}$.

Sea $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$, y sea $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n\geq 0}$ la base ortonormal canónica de $\ell^2(\mathbb{N})$, es decir: $e_n(k) = \delta_{n,k}$, $\forall n, k \geq 0$.

(2) Álgebra de Toeplitz $\mathcal{T}$.

Sea $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$, y sea $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n\geq 0}$ la base ortonormal canónica de $\ell^2(\mathbb{N})$, es decir: $e_n(k) = \delta_{n,k}$, $\forall n, k \geq 0$. Sea $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ el shift unilateral, es decir

$$S(x_0, x_1, \dots) = (0, x_0, x_1, \dots).$$

(2) Álgebra de Toeplitz $\mathcal{T}$.

Sea $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$, y sea $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n\geq 0}$ la base ortonormal canónica de $\ell^2(\mathbb{N})$, es decir: $e_n(k) = \delta_{n,k}$, $\forall n, k \geq 0$. Sea $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ el shift unilateral, es decir

$$S(x_0, x_1, \dots) = (0, x_0, x_1, \dots).$$

En términos de la base canónica es $S(e_n) = e_{n+1}$ para todo $n \geq 0$.

(2) Álgebra de Toeplitz $\mathcal{T}$.

Sea $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$, y sea $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n\geq 0}$ la base ortonormal canónica de $\ell^2(\mathbb{N})$, es decir: $e_n(k) = \delta_{n,k}$, $\forall n, k \geq 0$. Sea $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ el shift unilateral, es decir

$$S(x_0, x_1, \dots) = (0, x_0, x_1, \dots).$$

En términos de la base canónica es $S(e_n) = e_{n+1}$ para todo $n \geq 0$.

Definición

El álgebra de Toeplitz es $\mathcal{T} := C^*(S) \subseteq \mathrm{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$.

(2) Álgebra de Toeplitz $\mathcal{T}$.

Sea $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$, y sea $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n\geq 0}$ la base ortonormal canónica de $\ell^2(\mathbb{N})$, es decir: $e_n(k) = \delta_{n,k}$, $\forall n, k \geq 0$. Sea $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ el shift unilateral, es decir

$$S(x_0, x_1, \dots) = (0, x_0, x_1, \dots).$$

En términos de la base canónica es $S(e_n) = e_{n+1}$ para todo $n \geq 0$.

Definición

El álgebra de Toeplitz es $\mathcal{T} := C^*(S) \subseteq \mathrm{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$.

(2) Álgebra de Toeplitz $\mathcal{T}$.

Sea $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$, y sea $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n\geq 0}$ la base ortonormal canónica de $\ell^2(\mathbb{N})$, es decir: $e_n(k) = \delta_{n,k}$, $\forall n, k \geq 0$. Sea $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ el shift unilateral, es decir

$$S(x_0, x_1, \dots) = (0, x_0, x_1, \dots).$$

En términos de la base canónica es $S(e_n) = e_{n+1}$ para todo $n \geq 0$.

Definición

El álgebra de Toeplitz es $\mathcal{T} := C^*(S) \subseteq \mathrm{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$.

Teorema

Sea K *la* C^**-álgebra de los operadores compactos en* ℓ^2.

(2) Álgebra de Toeplitz $\mathcal{T}$.

Sea $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$, y sea $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n\geq 0}$ la base ortonormal canónica de $\ell^2(\mathbb{N})$, es decir: $e_n(k) = \delta_{n,k}$, $\forall n, k \geq 0$. Sea $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ el shift unilateral, es decir

$$S(x_0, x_1, \dots) = (0, x_0, x_1, \dots).$$

En términos de la base canónica es $S(e_n) = e_{n+1}$ para todo $n \geq 0$.

Definición

El álgebra de Toeplitz es $\mathcal{T} := C^*(S) \subseteq \mathrm{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$.

Teorema

Sea K *la* C^**-álgebra de los operadores compactos en* ℓ^2.

(2) Álgebra de Toeplitz $\mathcal{T}$.

Sea $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$, y sea $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n\geq 0}$ la base ortonormal canónica de $\ell^2(\mathbb{N})$, es decir: $e_n(k) = \delta_{n,k}$, $\forall n, k \geq 0$. Sea $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ el shift unilateral, es decir

$$S(x_0, x_1, \dots) = (0, x_0, x_1, \dots).$$

En términos de la base canónica es $S(e_n) = e_{n+1}$ para todo $n \geq 0$.

Definición

El álgebra de Toeplitz es $\mathcal{T} := C^*(S) \subseteq \mathrm{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$.

Teorema

Sea K *la* C^**-álgebra de los operadores compactos en* ℓ^2. *Entonces* $\mathrm{K} \lhd \mathcal{T}$ *y* $\mathcal{T}/\mathrm{K} \cong C(S^1)$.

Demostración.

La primera afirmación equivale a probar que $\mathrm{K} \subseteq \mathcal{T}$,

Demostración.

La primera afirmación equivale a probar que $\mathrm{K} \subseteq \mathcal{T}$,

Demostración.

La primera afirmación equivale a probar que $\mathrm{K} \subseteq \mathcal{T}$, lo cual hacemos a través de los siguientes pasos.

Demostración.

La primera afirmación equivale a probar que $\mathrm{K} \subseteq \mathcal{T}$, lo cual hacemos a través de los siguientes pasos.

(a) Un simple cálculo muestra que $S^*(x_0, x_1, \dots) = (x_1, x_2, \dots)$.

Demostración.

La primera afirmación equivale a probar que $\mathrm{K} \subseteq \mathcal{T}$, lo cual hacemos a través de los siguientes pasos.

(a) Un simple cálculo muestra que $S^*(x_0, x_1, \dots) = (x_1, x_2, \dots)$.

(b) También es directo verificar que $S^*S = Id$, $SS^* = P^{\mathcal{H}}_{\overline{\text{span}}\{e_n\}_{n\geq 1}}$.

Demostración.

La primera afirmación equivale a probar que $\mathrm{K} \subseteq \mathcal{T}$, lo cual hacemos a través de los siguientes pasos.

(a) Un simple cálculo muestra que $S^*(x_0, x_1, \dots) = (x_1, x_2, \dots)$.

(b) También es directo verificar que $S^*S = Id$, $SS^* = P^{\mathcal{H}}_{\overline{\mathrm{span}}\{e_n\}_{n\geq 1}}$.

(c) Sea $P := Id - SS^* = P^{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}e_0}$.

Demostración.

La primera afirmación equivale a probar que $\mathrm{K} \subseteq \mathcal{T}$, lo cual hacemos a través de los siguientes pasos.

(a) Un simple cálculo muestra que $S^*(x_0, x_1, \dots) = (x_1, x_2, \dots)$.

(b) También es directo verificar que $S^*S = Id$, $SS^* = P^{\mathcal{H}}_{\overline{\mathrm{span}}\{e_n\}_{n\geq 1}}$.

(c) Sea $P := Id - SS^* = P^{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}e_0}$.

Demostración.

La primera afirmación equivale a probar que $\mathrm{K} \subseteq \mathcal{T}$, lo cual hacemos a través de los siguientes pasos.

(a) Un simple cálculo muestra que $S^*(x_0, x_1, \dots) = (x_1, x_2, \dots)$.

(b) También es directo verificar que $S^*S = Id$, $SS^* = P^{\mathcal{H}}_{\overline{\mathrm{span}\{e_n\}_{n\geq 1}}}$.

(c) Sea $P := Id - SS^* = P^{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}e_0}$. Si $T \in \mathrm{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$,

Demostración.

La primera afirmación equivale a probar que $\mathrm{K} \subseteq \mathcal{T}$, lo cual hacemos a través de los siguientes pasos.

(a) Un simple cálculo muestra que $S^*(x_0, x_1, \dots) = (x_1, x_2, \dots)$.

(b) También es directo verificar que $S^*S = Id$, $SS^* = P^{\mathcal{H}}_{\overline{\mathrm{span}\{e_n\}_{n\geq 1}}}$.

(c) Sea $P := Id - SS^* = P^{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}e_0}$. Si $T \in \mathrm{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$, entonces T tiene asociada una matriz $[T]$ (infinita) en la base $\mathcal{B}$:

Demostración.

La primera afirmación equivale a probar que $\mathrm{K} \subseteq \mathcal{T}$, lo cual hacemos a través de los siguientes pasos.

(a) Un simple cálculo muestra que $S^*(x_0, x_1, \dots) = (x_1, x_2, \dots)$.

(b) También es directo verificar que $S^*S = Id$, $SS^* = P^{\mathcal{H}}_{\overline{\mathrm{span}\{e_n\}_{n\geq 1}}}$.

(c) Sea $P := Id - SS^* = P^{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}e_0}$. Si $T \in \mathrm{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$, entonces T tiene asociada una matriz $[T]$ (infinita) en la base $\mathcal{B}$:$[T]$ está dada por $[T]_{m,n} = \langle Te_n, e_m \rangle$.

Demostración.

La primera afirmación equivale a probar que $\mathrm{K} \subseteq \mathcal{T}$, lo cual hacemos a través de los siguientes pasos.

(a) Un simple cálculo muestra que $S^*(x_0, x_1, \dots) = (x_1, x_2, \dots)$.

(b) También es directo verificar que $S^*S = Id$, $SS^* = P^{\mathcal{H}}_{\overline{\mathrm{span}\{e_n\}_{n\geq 1}}}$.

(c) Sea $P := Id - SS^* = P^{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}e_0}$. Si $T \in \mathrm{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$, entonces T tiene asociada una matriz $[T]$ (infinita) en la base $\mathcal{B}$:$[T]$ está dada por $[T]_{m,n} = \langle Te_n, e_m\rangle$. En particular, si $\theta_{m,n} := \theta_{e_m,e_n}$, se tiene:

Demostración.

La primera afirmación equivale a probar que $\mathrm{K} \subseteq \mathcal{T}$, lo cual hacemos a través de los siguientes pasos.

(a) Un simple cálculo muestra que $S^*(x_0, x_1, \dots) = (x_1, x_2, \dots)$.

(b) También es directo verificar que $S^*S = Id$, $SS^* = P^{\mathcal{H}}_{\overline{\mathrm{span}\{e_n\}_{n\geq 1}}}$.

(c) Sea $P := Id - SS^* = P^{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}e_0}$. Si $T \in \mathrm{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$, entonces T tiene asociada una matriz $[T]$ (infinita) en la base $\mathcal{B}$:$[T]$ está dada por $[T]_{m,n} = \langle Te_n, e_m \rangle$. En particular, si $\theta_{m,n} := \theta_{e_m, e_n}$, se tiene:

$$[\theta_{m,n}] = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \quad\quad n \\ \quad\quad \downarrow \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow \quad m \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

(d) $S^n P S^{*m} = \theta_{n,m}$: se tiene:

(d) $S^nPS^{*m} = \theta_{n,m}$: se tiene:

(d) $S^n P S^{*m} = \theta_{n,m}$: se tiene:

$$S^n P S^{*m}(e_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < m, \\ S^n P(e_{k-m}) & \text{si } k \geq m, \end{cases}$$

(d) $S^n P S^{*m} = \theta_{n,m}$: se tiene:

$$S^n P S^{*m}(e_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < m, \\ S^n P(e_{k-m}) & \text{si } k \geq m, \end{cases}$$

$$S^n P(e_{k-m}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > m, \\ S^n(e_0) = e_n & \text{si } k = m. \end{cases}$$

(d) $S^n P S^{*m} = \theta_{n,m}$: se tiene:

$$S^n P S^{*m}(e_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < m, \\ S^n P(e_{k-m}) & \text{si } k \geq m, \end{cases}$$

$$S^n P(e_{k-m}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > m, \\ S^n(e_0) = e_n & \text{si } k = m. \end{cases}$$

Entonces $S^n P S^{*m}(e_k) = \delta_{k,m} e_n = \langle e_k, e_m \rangle e_n = \theta_{n,m}(e_k)$, $\forall k$.

(d) $S^n P S^{*m} = \theta_{n,m}$: se tiene:

$$S^n P S^{*m}(e_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < m, \\ S^n P(e_{k-m}) & \text{si } k \geq m, \end{cases}$$

$$S^n P(e_{k-m}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > m, \\ S^n(e_0) = e_n & \text{si } k = m. \end{cases}$$

Entonces $S^n P S^{*m}(e_k) = \delta_{k,m} e_n = \langle e_k, e_m \rangle e_n = \theta_{n,m}(e_k)$, $\forall k$. Luego $S^n P S^{*m} = \theta_{n,m}$.

(d) $S^nPS^{*m} = \theta_{n,m}$: se tiene:

$$S^nPS^{*m}(e_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < m, \\ S^nP(e_{k-m}) & \text{si } k \geq m, \end{cases}$$

$$S^nP(e_{k-m}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > m, \\ S^n(e_0) = e_n & \text{si } k = m. \end{cases}$$

Entonces $S^nPS^{*m}(e_k) = \delta_{k,m}e_n = \langle e_k, e_m\rangle e_n = \theta_{n,m}(e_k)$, $\forall k$. Luego $S^nPS^{*m} = \theta_{n,m}$.

(e) Todo operador $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $[T]$ es finita en la base $\mathcal{B}$ está en $\mathcal{T}$,

(d) $S^nPS^{*m} = \theta_{n,m}$: se tiene:

$$S^nPS^{*m}(e_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < m, \\ S^nP(e_{k-m}) & \text{si } k \geq m, \end{cases}$$

$$S^nP(e_{k-m}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > m, \\ S^n(e_0) = e_n & \text{si } k = m. \end{cases}$$

Entonces $S^nPS^{*m}(e_k) = \delta_{k,m}e_n = \langle e_k, e_m\rangle e_n = \theta_{n,m}(e_k)$, $\forall k$. Luego $S^nPS^{*m} = \theta_{n,m}$.

(e) Todo operador $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $[T]$ es finita en la base $\mathcal{B}$ está en $\mathcal{T}$,

(d) $S^nPS^{*m} = \theta_{n,m}$: se tiene:

$$S^nPS^{*m}(e_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < m, \\ S^nP(e_{k-m}) & \text{si } k \geq m, \end{cases}$$

$$S^nP(e_{k-m}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > m, \\ S^n(e_0) = e_n & \text{si } k = m. \end{cases}$$

Entonces $S^nPS^{*m}(e_k) = \delta_{k,m}e_n = \langle e_k, e_m\rangle e_n = \theta_{n,m}(e_k)$, $\forall k$. Luego $S^nPS^{*m} = \theta_{n,m}$.

(e) Todo operador $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $[T]$ es finita en la base $\mathcal{B}$ está en $\mathcal{T}$, pues por (d) es:

(d) $S^n P S^{*m} = \theta_{n,m}$: se tiene:

$$S^n P S^{*m}(e_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < m, \\ S^n P(e_{k-m}) & \text{si } k \geq m, \end{cases}$$

$$S^n P(e_{k-m}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > m, \\ S^n(e_0) = e_n & \text{si } k = m. \end{cases}$$

Entonces $S^n P S^{*m}(e_k) = \delta_{k,m} e_n = \langle e_k, e_m \rangle e_n = \theta_{n,m}(e_k)$, $\forall k$. Luego $S^n P S^{*m} = \theta_{n,m}$.

(e) Todo operador $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $[T]$ es finita en la base $\mathcal{B}$ está en $\mathcal{T}$, pues por (d) es:

$$\theta_{n,m} = S^n P S^{*m} = S^n(Id - SS^*)S^{*m} \in \mathcal{T}.$$

(d) $S^nPS^{*m} = \theta_{n,m}$: se tiene:

$$S^nPS^{*m}(e_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < m, \\ S^nP(e_{k-m}) & \text{si } k \geq m, \end{cases}$$

$$S^nP(e_{k-m}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > m, \\ S^n(e_0) = e_n & \text{si } k = m. \end{cases}$$

Entonces $S^nPS^{*m}(e_k) = \delta_{k,m}e_n = \langle e_k, e_m \rangle e_n = \theta_{n,m}(e_k)$, $\forall k$. Luego $S^nPS^{*m} = \theta_{n,m}$.

(e) Todo operador $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $[T]$ es finita en la base $\mathcal{B}$ está en $\mathcal{T}$, pues por (d) es:

$$\theta_{n,m} = S^nPS^{*m} = S^n(Id - SS^*)S^{*m} \in \mathcal{T}.$$

Como dichos operadores forman un subespacio denso de K, se deduce que $\mathrm{K} \subseteq \mathcal{T}$.

Sean $C(\mathcal{H}) := \frac{\mathrm{B}(\mathcal{H})}{\mathrm{K}(\mathcal{H})}$ el *álgebra de Calkin* y $\pi : \mathrm{B}(\mathcal{H}) \to C(\mathcal{H})$ la proyección.

Sean $C(\mathcal{H}) := \frac{\mathrm{B}(\mathcal{H})}{\mathrm{K}(\mathcal{H})}$ el *álgebra de Calkin* y $\pi : \mathrm{B}(\mathcal{H}) \to C(\mathcal{H})$ la proyección.

Sean $C(\mathcal{H}) := \frac{\mathrm{B}(\mathcal{H})}{\mathrm{K}(\mathcal{H})}$ el *álgebra de Calkin* y $\pi : \mathrm{B}(\mathcal{H}) \to C(\mathcal{H})$ la proyección. Si $U := \pi(S)$, entonces $\frac{\mathcal{T}}{\mathrm{K}} = \pi(\mathcal{T}) = C^*(U)$, Sean $C(\mathcal{H}) := \frac{\mathrm{B}(\mathcal{H})}{\mathrm{K}(\mathcal{H})}$ el *álgebra de Calkin* y $\pi : \mathrm{B}(\mathcal{H}) \to C(\mathcal{H})$ la proyección. Si $U := \pi(S)$, entonces $\frac{\mathcal{T}}{\mathrm{K}} = \pi(\mathcal{T}) = C^*(U)$, porque $\mathcal{T} = C^*(S)$.

Sean $C(\mathcal{H}) := \frac{\mathrm{B}(\mathcal{H})}{\mathrm{K}(\mathcal{H})}$ el ***álgebra de Calkin*** y $\pi : \mathrm{B}(\mathcal{H}) \to C(\mathcal{H})$ la proyección. Si $U := \pi(S)$, entonces $\frac{\mathcal{T}}{\mathrm{K}} = \pi(\mathcal{T}) = C^*(U)$, porque $\mathcal{T} = C^*(S)$. Observar que U es un elemento unitario:

Sean $C(\mathcal{H}) := \frac{\mathrm{B}(\mathcal{H})}{\mathrm{K}(\mathcal{H})}$ el *álgebra de Calkin* y $\pi : \mathrm{B}(\mathcal{H}) \to C(\mathcal{H})$ la proyección. Si $U := \pi(S)$, entonces $\frac{\mathcal{T}}{\mathrm{K}} = \pi(\mathcal{T}) = C^*(U)$, porque $\mathcal{T} = C^*(S)$. Observar que U es un elemento unitario:

$$U^*U = \pi(S)^*\pi(S)$$

Sean $C(\mathcal{H}) := \frac{\mathrm{B}(\mathcal{H})}{\mathrm{K}(\mathcal{H})}$ el *álgebra de Calkin* y $\pi : \mathrm{B}(\mathcal{H}) \to C(\mathcal{H})$ la proyección. Si $U := \pi(S)$, entonces $\frac{\mathcal{T}}{\mathrm{K}} = \pi(\mathcal{T}) = C^*(U)$, porque $\mathcal{T} = C^*(S)$. Observar que U es un elemento unitario:

$$U^*U = \pi(S)^*\pi(S) = \pi(S^*S)$$

Sean $C(\mathcal{H}) := \frac{\mathrm{B}(\mathcal{H})}{\mathrm{K}(\mathcal{H})}$ el *álgebra de Calkin* y $\pi : \mathrm{B}(\mathcal{H}) \to C(\mathcal{H})$ la proyección. Si $U := \pi(S)$, entonces $\frac{\mathcal{T}}{\mathrm{K}} = \pi(\mathcal{T}) = C^*(U)$, porque $\mathcal{T} = C^*(S)$. Observar que U es un elemento unitario:

$$U^*U = \pi(S)^*\pi(S) = \pi(S^*S) = \pi(Id)$$

Sean $C(\mathcal{H}) := \frac{\mathrm{B}(\mathcal{H})}{\mathrm{K}(\mathcal{H})}$ el *álgebra de Calkin* y $\pi : \mathrm{B}(\mathcal{H}) \to C(\mathcal{H})$ la proyección. Si $U := \pi(S)$, entonces $\frac{\mathcal{T}}{\mathrm{K}} = \pi(\mathcal{T}) = C^*(U)$, porque $\mathcal{T} = C^*(S)$. Observar que U es un elemento unitario:

$$U^*U = \pi(S)^*\pi(S) = \pi(S^*S) = \pi(Id) = 1.$$

Sean $C(\mathcal{H}) := \frac{\mathrm{B}(\mathcal{H})}{\mathrm{K}(\mathcal{H})}$ el *álgebra de Calkin* y $\pi : \mathrm{B}(\mathcal{H}) \to C(\mathcal{H})$ la proyección. Si $U := \pi(S)$, entonces $\frac{\mathcal{T}}{\mathrm{K}} = \pi(\mathcal{T}) = C^*(U)$, porque $\mathcal{T} = C^*(S)$. Observar que U es un elemento unitario:

$$U^*U = \pi(S)^*\pi(S) = \pi(S^*S) = \pi(Id) = 1.$$

$UU^* = \pi(S)\pi(S)^*$

Sean $C(\mathcal{H}) := \frac{\mathrm{B}(\mathcal{H})}{\mathrm{K}(\mathcal{H})}$ el *álgebra de Calkin* y $\pi : \mathrm{B}(\mathcal{H}) \to C(\mathcal{H})$ la proyección. Si $U := \pi(S)$, entonces $\frac{\mathcal{T}}{\mathrm{K}} = \pi(\mathcal{T}) = C^*(U)$, porque $\mathcal{T} = C^*(S)$. Observar que U es un elemento unitario:

$$U^*U = \pi(S)^*\pi(S) = \pi(S^*S) = \pi(Id) = 1.$$

$$UU^* = \pi(S)\pi(S)^* = \pi(SS^*)$$

Sean $C(\mathcal{H}) := \frac{\mathrm{B}(\mathcal{H})}{\mathrm{K}(\mathcal{H})}$ el *álgebra de Calkin* y $\pi : \mathrm{B}(\mathcal{H}) \to C(\mathcal{H})$ la proyección. Si $U := \pi(S)$, entonces $\frac{\mathcal{T}}{\mathrm{K}} = \pi(\mathcal{T}) = C^*(U)$, porque $\mathcal{T} = C^*(S)$. Observar que U es un elemento unitario:

$$U^*U = \pi(S)^*\pi(S) = \pi(S^*S) = \pi(Id) = 1.$$

$$UU^* = \pi(S)\pi(S)^* = \pi(SS^*) = \pi(SS^* + P) - \pi(P)$$

Sean $C(\mathcal{H}) := \frac{\mathrm{B}(\mathcal{H})}{\mathrm{K}(\mathcal{H})}$ el *álgebra de Calkin* y $\pi : \mathrm{B}(\mathcal{H}) \to C(\mathcal{H})$ la proyección. Si $U := \pi(S)$, entonces $\frac{\mathcal{T}}{\mathrm{K}} = \pi(\mathcal{T}) = C^*(U)$, porque $\mathcal{T} = C^*(S)$. Observar que U es un elemento unitario:

$$U^*U = \pi(S)^*\pi(S) = \pi(S^*S) = \pi(Id) = 1.$$

$$UU^* = \pi(S)\pi(S)^* = \pi(SS^*) = \pi(SS^* + P) - \pi(P) = \pi(Id)$$

Sean $C(\mathcal{H}) := \frac{\mathrm{B}(\mathcal{H})}{\mathrm{K}(\mathcal{H})}$ el *álgebra de Calkin* y $\pi : \mathrm{B}(\mathcal{H}) \to C(\mathcal{H})$ la proyección. Si $U := \pi(S)$, entonces $\frac{\mathcal{T}}{\mathrm{K}} = \pi(\mathcal{T}) = C^*(U)$, porque $\mathcal{T} = C^*(S)$. Observar que U es un elemento unitario:

$$U^*U = \pi(S)^*\pi(S) = \pi(S^*S) = \pi(Id) = 1.$$

$$UU^* = \pi(S)\pi(S)^* = \pi(SS^*) = \pi(SS^* + P) - \pi(P) = \pi(Id) = 1,$$

Sean $C(\mathcal{H}) := \frac{\mathrm{B}(\mathcal{H})}{\mathrm{K}(\mathcal{H})}$ el *álgebra de Calkin* y $\pi : \mathrm{B}(\mathcal{H}) \to C(\mathcal{H})$ la proyección. Si $U := \pi(S)$, entonces $\frac{\mathcal{T}}{\mathrm{K}} = \pi(\mathcal{T}) = C^*(U)$, porque $\mathcal{T} = C^*(S)$. Observar que U es un elemento unitario:

$$U^*U = \pi(S)^*\pi(S) = \pi(S^*S) = \pi(Id) = 1.$$
$$UU^* = \pi(S)\pi(S)^* = \pi(SS^*) = \pi(SS^* + P) - \pi(P) = \pi(Id) = 1,$$

pues $\pi(P) = 0$ ya que P es un operador compacto.

Sean $C(\mathcal{H}) := \frac{\mathrm{B}(\mathcal{H})}{\mathrm{K}(\mathcal{H})}$ el *álgebra de Calkin* y $\pi : \mathrm{B}(\mathcal{H}) \to C(\mathcal{H})$ la proyección. Si $U := \pi(S)$, entonces $\frac{\mathcal{T}}{\mathrm{K}} = \pi(\mathcal{T}) = C^*(U)$, porque $\mathcal{T} = C^*(S)$. Observar que U es un elemento unitario:

$$U^*U = \pi(S)^*\pi(S) = \pi(S^*S) = \pi(Id) = 1.$$

$$UU^* = \pi(S)\pi(S)^* = \pi(SS^*) = \pi(SS^* + P) - \pi(P) = \pi(Id) = 1,$$

pues $\pi(P) = 0$ ya que P es un operador compacto. En consecuencia

Sean $C(\mathcal{H}) := \frac{\mathrm{B}(\mathcal{H})}{\mathrm{K}(\mathcal{H})}$ el *álgebra de Calkin* y $\pi : \mathrm{B}(\mathcal{H}) \to C(\mathcal{H})$ la proyección. Si $U := \pi(S)$, entonces $\frac{\mathcal{T}}{\mathrm{K}} = \pi(\mathcal{T}) = C^*(U)$, porque $\mathcal{T} = C^*(S)$. Observar que U es un elemento unitario:

$$U^*U = \pi(S)^*\pi(S) = \pi(S^*S) = \pi(Id) = 1.$$

$$UU^* = \pi(S)\pi(S)^* = \pi(SS^*) = \pi(SS^* + P) - \pi(P) = \pi(Id) = 1,$$

pues $\pi(P) = 0$ ya que P es un operador compacto. En consecuencia

$$\pi(\mathcal{T}) = C^*(U) \cong C(\sigma(U)).$$

Sean $C(\mathcal{H}) := \frac{\mathrm{B}(\mathcal{H})}{\mathrm{K}(\mathcal{H})}$ el *álgebra de Calkin* y $\pi : \mathrm{B}(\mathcal{H}) \to C(\mathcal{H})$ la proyección. Si $U := \pi(S)$, entonces $\frac{\mathcal{T}}{\mathrm{K}} = \pi(\mathcal{T}) = C^*(U)$, porque $\mathcal{T} = C^*(S)$. Observar que U es un elemento unitario:

$$U^*U = \pi(S)^*\pi(S) = \pi(S^*S) = \pi(Id) = 1.$$

$$UU^* = \pi(S)\pi(S)^* = \pi(SS^*) = \pi(SS^* + P) - \pi(P) = \pi(Id) = 1,$$

pues $\pi(P) = 0$ ya que P es un operador compacto. En consecuencia

$$\pi(\mathcal{T}) = C^*(U) \cong C(\sigma(U)).$$

Para terminar la demostración veamos que $\sigma(U) = S^1$.

Sean $C(\mathcal{H}) := \frac{B(\mathcal{H})}{K(\mathcal{H})}$ el *álgebra de Calkin* y $\pi : B(\mathcal{H}) \to C(\mathcal{H})$ la proyección. Si $U := \pi(S)$, entonces $\frac{\mathcal{T}}{K} = \pi(\mathcal{T}) = C^*(U)$, porque $\mathcal{T} = C^*(S)$. Observar que U es un elemento unitario:

$$U^*U = \pi(S)^*\pi(S) = \pi(S^*S) = \pi(Id) = 1.$$

$$UU^* = \pi(S)\pi(S)^* = \pi(SS^*) = \pi(SS^* + P) - \pi(P) = \pi(Id) = 1,$$

pues $\pi(P) = 0$ ya que P es un operador compacto. En consecuencia

$$\pi(\mathcal{T}) = C^*(U) \cong C(\sigma(U)).$$

Para terminar la demostración veamos que $\sigma(U) = S^1$. Como U es unitario, se tiene que $\sigma(U) \subseteq S^1$.

Sean $C(\mathcal{H}) := \frac{\mathrm{B}(\mathcal{H})}{\mathrm{K}(\mathcal{H})}$ el *álgebra de Calkin* y $\pi : \mathrm{B}(\mathcal{H}) \to C(\mathcal{H})$ la proyección. Si $U := \pi(S)$, entonces $\frac{\mathcal{T}}{\mathrm{K}} = \pi(\mathcal{T}) = C^*(U)$, porque $\mathcal{T} = C^*(S)$. Observar que U es un elemento unitario:

$$U^*U = \pi(S)^*\pi(S) = \pi(S^*S) = \pi(Id) = 1.$$

$$UU^* = \pi(S)\pi(S)^* = \pi(SS^*) = \pi(SS^* + P) - \pi(P) = \pi(Id) = 1,$$

pues $\pi(P) = 0$ ya que P es un operador compacto. En consecuencia

$$\pi(\mathcal{T}) = C^*(U) \cong C(\sigma(U)).$$

Para terminar la demostración veamos que $\sigma(U) = S^1$. Como U es unitario, se tiene que $\sigma(U) \subseteq S^1$. Dado $z \in S^1$, sea $V_z \in \mathrm{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ dado por $V_z(e_n) = z^n e_n$ para todo $n \geq 0$. El operador adjunto de V_z es $V_{\bar{z}}$,

Sean $C(\mathcal{H}) := \frac{\mathrm{B}(\mathcal{H})}{\mathrm{K}(\mathcal{H})}$ el *álgebra de Calkin* y $\pi : \mathrm{B}(\mathcal{H}) \to C(\mathcal{H})$ la proyección. Si $U := \pi(S)$, entonces $\frac{\mathcal{T}}{\mathrm{K}} = \pi(\mathcal{T}) = C^*(U)$, porque $\mathcal{T} = C^*(S)$. Observar que U es un elemento unitario:

$$U^*U = \pi(S)^*\pi(S) = \pi(S^*S) = \pi(Id) = 1.$$

$$UU^* = \pi(S)\pi(S)^* = \pi(SS^*) = \pi(SS^* + P) - \pi(P) = \pi(Id) = 1,$$

pues $\pi(P) = 0$ ya que P es un operador compacto. En consecuencia

$$\pi(\mathcal{T}) = C^*(U) \cong C(\sigma(U)).$$

Para terminar la demostración veamos que $\sigma(U) = S^1$. Como U es unitario, se tiene que $\sigma(U) \subseteq S^1$. Dado $z \in S^1$, sea $V_z \in \mathrm{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ dado por $V_z(e_n) = z^n e_n$ para todo $n \geq 0$. El operador adjunto de V_z es $V_{\bar{z}}$, que también es su inverso.

Sean $C(\mathcal{H}) := \frac{\mathrm{B}(\mathcal{H})}{\mathrm{K}(\mathcal{H})}$ el *álgebra de Calkin* y $\pi : \mathrm{B}(\mathcal{H}) \to C(\mathcal{H})$ la proyección. Si $U := \pi(S)$, entonces $\frac{\mathcal{T}}{\mathrm{K}} = \pi(\mathcal{T}) = C^*(U)$, porque $\mathcal{T} = C^*(S)$. Observar que U es un elemento unitario:

$$U^*U = \pi(S)^*\pi(S) = \pi(S^*S) = \pi(Id) = 1.$$

$$UU^* = \pi(S)\pi(S)^* = \pi(SS^*) = \pi(SS^* + P) - \pi(P) = \pi(Id) = 1,$$

pues $\pi(P) = 0$ ya que P es un operador compacto. En consecuencia

$$\pi(\mathcal{T}) = C^*(U) \cong C(\sigma(U)).$$

Para terminar la demostración veamos que $\sigma(U) = S^1$. Como U es unitario, se tiene que $\sigma(U) \subseteq S^1$. Dado $z \in S^1$, sea $V_z \in \mathrm{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ dado por $V_z(e_n) = z^n e_n$ para todo $n \geq 0$. El operador adjunto de V_z es $V_{\bar{z}}$, que también es su inverso. Por lo tanto V_z es unitario.

Sean $C(\mathcal{H}) := \frac{\mathrm{B}(\mathcal{H})}{\mathrm{K}(\mathcal{H})}$ el *álgebra de Calkin* y $\pi : \mathrm{B}(\mathcal{H}) \to C(\mathcal{H})$ la proyección. Si $U := \pi(S)$, entonces $\frac{\mathcal{T}}{\mathrm{K}} = \pi(\mathcal{T}) = C^*(U)$, porque $\mathcal{T} = C^*(S)$. Observar que U es un elemento unitario:

$$U^*U = \pi(S)^*\pi(S) = \pi(S^*S) = \pi(Id) = 1.$$

$$UU^* = \pi(S)\pi(S)^* = \pi(SS^*) = \pi(SS^* + P) - \pi(P) = \pi(Id) = 1,$$

pues $\pi(P) = 0$ ya que P es un operador compacto. En consecuencia

$$\pi(\mathcal{T}) = C^*(U) \cong C(\sigma(U)).$$

Para terminar la demostración veamos que $\sigma(U) = S^1$. Como U es unitario, se tiene que $\sigma(U) \subseteq S^1$. Dado $z \in S^1$, sea $V_z \in \mathrm{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ dado por $V_z(e_n) = z^n e_n$ para todo $n \geq 0$. El operador adjunto de V_z es $V_{\bar{z}}$, que también es su inverso. Por lo tanto V_z es unitario. Entonces el mapa $\alpha_z : \mathrm{B}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ dado por $\alpha_z(T) = V_z T V_z^*$ es un automorfismo de $\mathrm{B}(\mathcal{H})$.

Sean $C(\mathcal{H}) := \frac{\mathrm{B}(\mathcal{H})}{\mathrm{K}(\mathcal{H})}$ el *álgebra de Calkin* y $\pi : \mathrm{B}(\mathcal{H}) \to C(\mathcal{H})$ la proyección. Si $U := \pi(S)$, entonces $\frac{\mathcal{T}}{\mathrm{K}} = \pi(\mathcal{T}) = C^*(U)$, porque $\mathcal{T} = C^*(S)$. Observar que U es un elemento unitario:

$$U^*U = \pi(S)^*\pi(S) = \pi(S^*S) = \pi(Id) = 1.$$

$$UU^* = \pi(S)\pi(S)^* = \pi(SS^*) = \pi(SS^* + P) - \pi(P) = \pi(Id) = 1,$$

pues $\pi(P) = 0$ ya que P es un operador compacto. En consecuencia

$$\pi(\mathcal{T}) = C^*(U) \cong C(\sigma(U)).$$

Para terminar la demostración veamos que $\sigma(U) = S^1$. Como U es unitario, se tiene que $\sigma(U) \subseteq S^1$. Dado $z \in S^1$, sea $V_z \in \mathrm{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ dado por $V_z(e_n) = z^n e_n$ para todo $n \geq 0$. El operador adjunto de V_z es $V_{\bar{z}}$, que también es su inverso. Por lo tanto V_z es unitario. Entonces el mapa $\alpha_z : \mathrm{B}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ dado por $\alpha_z(T) = V_z T V_z^*$ es un automorfismo de $\mathrm{B}(\mathcal{H})$. Como además $\alpha_z(\mathrm{K}) = \mathrm{K}$, se tiene que α_z pasa al cociente, induciendo un automorfismo $\tilde{\alpha}_z : C(\mathcal{H}) \to C(\mathcal{H})$.

Sean $C(\mathcal{H}) := \frac{\mathrm{B}(\mathcal{H})}{\mathrm{K}(\mathcal{H})}$ el *álgebra de Calkin* y $\pi : \mathrm{B}(\mathcal{H}) \to C(\mathcal{H})$ la proyección. Si $U := \pi(S)$, entonces $\frac{\mathcal{T}}{\mathrm{K}} = \pi(\mathcal{T}) = C^*(U)$, porque $\mathcal{T} = C^*(S)$. Observar que U es un elemento unitario:

$$U^*U = \pi(S)^*\pi(S) = \pi(S^*S) = \pi(Id) = 1.$$
$$UU^* = \pi(S)\pi(S)^* = \pi(SS^*) = \pi(SS^* + P) - \pi(P) = \pi(Id) = 1,$$

pues $\pi(P) = 0$ ya que P es un operador compacto. En consecuencia

$$\pi(\mathcal{T}) = C^*(U) \cong C(\sigma(U)).$$

Para terminar la demostración veamos que $\sigma(U) = S^1$. Como U es unitario, se tiene que $\sigma(U) \subseteq S^1$. Dado $z \in S^1$, sea $V_z \in \mathrm{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ dado por $V_z(e_n) = z^n e_n$ para todo $n \geq 0$. El operador adjunto de V_z es $V_{\bar{z}}$, que también es su inverso. Por lo tanto V_z es unitario. Entonces el mapa $\alpha_z : \mathrm{B}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ dado por $\alpha_z(T) = V_z T V_z^*$ es un automorfismo de $\mathrm{B}(\mathcal{H})$. Como además $\alpha_z(\mathrm{K}) = \mathrm{K}$, se tiene que α_z pasa al cociente, induciendo un automorfismo $\tilde{\alpha}_z : C(\mathcal{H}) \to C(\mathcal{H})$. Por otro lado:

$$\alpha_z(S)|_{e_n} = V_z S V_{\bar{z}}(e_n)$$

$$\alpha_z(S)|_{e_n} = V_z S V_{\bar{z}}(e_n)$$

$$\alpha_z(S)|_{e_n} = V_z S V_{\bar{z}}(e_n) = V_z S(\bar{z}^n e_n)$$

$$\alpha_z(S)|_{e_n} = V_z S V_{\bar{z}}(e_n) = V_z S(\bar{z}^n e_n) = \bar{z}^n V_z(e_{n+1})$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_z(S)|_{e_n} &= V_z S V_{\bar z}(e_n) = V_z S(\bar z^n e_n) = \bar z^n V_z(e_{n+1}) \\
&= \bar z^n z^{n+1} e_{n+1}
\end{aligned}
$$

$$\alpha_z(S)|_{e_n} = V_z S V_{\bar{z}}(e_n) = V_z S(\bar{z}^n e_n) = \bar{z}^n V_z(e_{n+1})$$
$$= \bar{z}^n z^{n+1} e_{n+1} = z e_{n+1} = zS|_{e_n}.$$

$$\alpha_z(S)|_{e_n} = V_z S V_{\bar{z}}(e_n) = V_z S(\bar{z}^n e_n) = \bar{z}^n V_z(e_{n+1})$$
$$= \bar{z}^n z^{n+1} e_{n+1} = z e_{n+1} = zS|_{e_n}.$$

Como $\{e_n\}$ es una base de ℓ^2,

$$\alpha_z(S)|_{e_n} = V_z S V_{\bar z}(e_n) = V_z S(\bar z^n e_n) = \bar z^n V_z(e_{n+1})$$
$$= \bar z^n z^{n+1} e_{n+1} = z e_{n+1} = zS|_{e_n}.$$

Como $\{e_n\}$ es una base de ℓ^2, el cálculo anterior implica que $\alpha_z(S) = zS$

$$\begin{aligned}\alpha_z(S)|_{e_n} &= V_z S V_{\bar{z}}(e_n) = V_z S(\bar{z}^n e_n) = \bar{z}^n V_z(e_{n+1}) \\ &= \bar{z}^n z^{n+1} e_{n+1} = z e_{n+1} = zS|_{e_n}.\end{aligned}$$

Como $\{e_n\}$ es una base de ℓ^2, el cálculo anterior implica que $\alpha_z(S) = zS$ (y por lo tanto $\alpha_z(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$),

$$\begin{aligned}\alpha_z(S)|_{e_n} &= V_z S V_{\bar{z}}(e_n) = V_z S(\bar{z}^n e_n) = \bar{z}^n V_z(e_{n+1}) \\ &= \bar{z}^n z^{n+1} e_{n+1} = z e_{n+1} = zS|_{e_n}.\end{aligned}$$

Como $\{e_n\}$ es una base de ℓ^2, el cálculo anterior implica que $\alpha_z(S) = zS$ (y por lo tanto $\alpha_z(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$), y entonces se tiene también que $\tilde{\alpha}_z(U) = zU$. Como $\tilde{\alpha}_z$ es un automorfismo de $C(\mathcal{H})$, se tiene

$$\begin{aligned}\alpha_z(S)|_{e_n} &= V_z S V_{\bar{z}}(e_n) = V_z S(\bar{z}^n e_n) = \bar{z}^n V_z(e_{n+1}) \\ &= \bar{z}^n z^{n+1} e_{n+1} = z e_{n+1} = zS|_{e_n}.\end{aligned}$$

Como $\{e_n\}$ es una base de ℓ^2, el cálculo anterior implica que $\alpha_z(S) = zS$ (y por lo tanto $\alpha_z(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$), y entonces se tiene también que $\tilde{\alpha}_z(U) = zU$. Como $\tilde{\alpha}_z$ es un automorfismo de $C(\mathcal{H})$, se tiene

$$\sigma(U) = \sigma(\tilde{\alpha}_z(U))$$

$$\begin{aligned}\alpha_z(S)|_{e_n} &= V_z S V_{\bar{z}}(e_n) = V_z S(\bar{z}^n e_n) = \bar{z}^n V_z(e_{n+1}) \\ &= \bar{z}^n z^{n+1} e_{n+1} = z e_{n+1} = zS|_{e_n}.\end{aligned}$$

Como $\{e_n\}$ es una base de ℓ^2, el cálculo anterior implica que $\alpha_z(S) = zS$ (y por lo tanto $\alpha_z(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$), y entonces se tiene también que $\tilde{\alpha}_z(U) = zU$. Como $\tilde{\alpha}_z$ es un automorfismo de $C(\mathcal{H})$, se tiene

$$\sigma(U) = \sigma(\tilde{\alpha}_z(U)) = \sigma(zU)$$

$$\begin{aligned}\alpha_z(S)|_{e_n} &= V_z S V_{\bar{z}}(e_n) = V_z S(\bar{z}^n e_n) = \bar{z}^n V_z(e_{n+1}) \\ &= \bar{z}^n z^{n+1} e_{n+1} = z e_{n+1} = zS|_{e_n}.\end{aligned}$$

Como $\{e_n\}$ es una base de ℓ^2, el cálculo anterior implica que $\alpha_z(S) = zS$ (y por lo tanto $\alpha_z(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$), y entonces se tiene también que $\tilde{\alpha}_z(U) = zU$. Como $\tilde{\alpha}_z$ es un automorfismo de $C(\mathcal{H})$, se tiene

$$\sigma(U) = \sigma(\tilde{\alpha}_z(U)) = \sigma(zU) = z\sigma(U).$$

$$\begin{aligned}\alpha_z(S)|_{e_n} &= V_z S V_{\bar z}(e_n) = V_z S(\bar z^n e_n) = \bar z^n V_z(e_{n+1})\\ &= \bar z^n z^{n+1} e_{n+1} = z e_{n+1} = zS|_{e_n}.\end{aligned}$$

Como $\{e_n\}$ es una base de ℓ^2, el cálculo anterior implica que $\alpha_z(S) = zS$ (y por lo tanto $\alpha_z(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$), y entonces se tiene también que $\tilde\alpha_z(U) = zU$. Como $\tilde\alpha_z$ es un automorfismo de $C(\mathcal{H})$, se tiene

$$\sigma(U) = \sigma(\tilde\alpha_z(U)) = \sigma(zU) = z\sigma(U).$$

Como $z \in S^1$ es arbitrario, $\sigma(U)$ resulta ser invariante por rotaciones,

$$\alpha_z(S)|_{e_n} = V_z S V_{\bar{z}}(e_n) = V_z S(\bar{z}^n e_n) = \bar{z}^n V_z(e_{n+1})$$
$$= \bar{z}^n z^{n+1} e_{n+1} = z e_{n+1} = zS|_{e_n}.$$

Como $\{e_n\}$ es una base de ℓ^2, el cálculo anterior implica que $\alpha_z(S) = zS$ (y por lo tanto $\alpha_z(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$), y entonces se tiene también que $\tilde{\alpha}_z(U) = zU$. Como $\tilde{\alpha}_z$ es un automorfismo de $C(\mathcal{H})$, se tiene

$$\sigma(U) = \sigma(\tilde{\alpha}_z(U)) = \sigma(zU) = z\sigma(U).$$

Como $z \in S^1$ es arbitrario, $\sigma(U)$ resulta ser invariante por rotaciones, y como no es vacío, se concluye que $\sigma(U) = S^1$.

$$\alpha_z(S)|_{e_n} = V_z S V_{\bar{z}}(e_n) = V_z S(\bar{z}^n e_n) = \bar{z}^n V_z(e_{n+1})$$
$$= \bar{z}^n z^{n+1} e_{n+1} = z e_{n+1} = zS|_{e_n}.$$

Como $\{e_n\}$ es una base de ℓ^2, el cálculo anterior implica que $\alpha_z(S) = zS$ (y por lo tanto $\alpha_z(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$), y entonces se tiene también que $\tilde{\alpha}_z(U) = zU$. Como $\tilde{\alpha}_z$ es un automorfismo de $C(\mathcal{H})$, se tiene

$$\sigma(U) = \sigma(\tilde{\alpha}_z(U)) = \sigma(zU) = z\sigma(U).$$

Como $z \in S^1$ es arbitrario, $\sigma(U)$ resulta ser invariante por rotaciones, y como no es vacío, se concluye que $\sigma(U) = S^1$.

Observación.

De acuerdo al resultado anterior tenemos una sucesión exacta

$$\alpha_z(S)|_{e_n} = V_z S V_{\bar{z}}(e_n) = V_z S(\bar{z}^n e_n) = \bar{z}^n V_z(e_{n+1})$$
$$= \bar{z}^n z^{n+1} e_{n+1} = z e_{n+1} = zS|_{e_n}.$$

Como $\{e_n\}$ es una base de ℓ^2, el cálculo anterior implica que $\alpha_z(S) = zS$ (y por lo tanto $\alpha_z(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$), y entonces se tiene también que $\tilde{\alpha}_z(U) = zU$. Como $\tilde{\alpha}_z$ es un automorfismo de $C(\mathcal{H})$, se tiene

$$\sigma(U) = \sigma(\tilde{\alpha}_z(U)) = \sigma(zU) = z\sigma(U).$$

Como $z \in S^1$ es arbitrario, $\sigma(U)$ resulta ser invariante por rotaciones, y como no es vacío, se concluye que $\sigma(U) = S^1$.

Observación.

De acuerdo al resultado anterior tenemos una sucesión exacta

$$\alpha_z(S)|_{e_n} = V_z S V_{\bar{z}}(e_n) = V_z S(\bar{z}^n e_n) = \bar{z}^n V_z(e_{n+1})$$
$$= \bar{z}^n z^{n+1} e_{n+1} = z e_{n+1} = zS|_{e_n}.$$

Como $\{e_n\}$ es una base de ℓ^2, el cálculo anterior implica que $\alpha_z(S) = zS$ (y por lo tanto $\alpha_z(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$), y entonces se tiene también que $\tilde{\alpha}_z(U) = zU$. Como $\tilde{\alpha}_z$ es un automorfismo de $C(\mathcal{H})$, se tiene

$$\sigma(U) = \sigma(\tilde{\alpha}_z(U)) = \sigma(zU) = z\sigma(U).$$

Como $z \in S^1$ es arbitrario, $\sigma(U)$ resulta ser invariante por rotaciones, y como no es vacío, se concluye que $\sigma(U) = S^1$.

Observación.

De acuerdo al resultado anterior tenemos una sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{K} \hookrightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{\pi} C^*(U) = C(S^1) \to 0. \tag{1}$$

$$\alpha_z(S)|_{e_n} = V_z S V_{\bar{z}}(e_n) = V_z S(\bar{z}^n e_n) = \bar{z}^n V_z(e_{n+1})$$
$$= \bar{z}^n z^{n+1} e_{n+1} = z e_{n+1} = zS|_{e_n}.$$

Como $\{e_n\}$ es una base de ℓ^2, el cálculo anterior implica que $\alpha_z(S) = zS$ (y por lo tanto $\alpha_z(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$), y entonces se tiene también que $\tilde{\alpha}_z(U) = zU$. Como $\tilde{\alpha}_z$ es un automorfismo de $C(\mathcal{H})$, se tiene

$$\sigma(U) = \sigma(\tilde{\alpha}_z(U)) = \sigma(zU) = z\sigma(U).$$

Como $z \in S^1$ es arbitrario, $\sigma(U)$ resulta ser invariante por rotaciones, y como no es vacío, se concluye que $\sigma(U) = S^1$.

Observación.

De acuerdo al resultado anterior tenemos una sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{K} \hookrightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{\pi} C^*(U) = C(S^1) \to 0. \tag{1}$$

¿Esta sucesión exacta se escinde?, es decir,

$$\alpha_z(S)|_{e_n} = V_z S V_{\bar{z}}(e_n) = V_z S(\bar{z}^n e_n) = \bar{z}^n V_z(e_{n+1})$$
$$= \bar{z}^n z^{n+1} e_{n+1} = z e_{n+1} = zS|_{e_n}.$$

Como $\{e_n\}$ es una base de ℓ^2, el cálculo anterior implica que $\alpha_z(S) = zS$ (y por lo tanto $\alpha_z(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$), y entonces se tiene también que $\tilde{\alpha}_z(U) = zU$. Como $\tilde{\alpha}_z$ es un automorfismo de $C(\mathcal{H})$, se tiene

$$\sigma(U) = \sigma(\tilde{\alpha}_z(U)) = \sigma(zU) = z\sigma(U).$$

Como $z \in S^1$ es arbitrario, $\sigma(U)$ resulta ser invariante por rotaciones, y como no es vacío, se concluye que $\sigma(U) = S^1$.

Observación.

De acuerdo al resultado anterior tenemos una sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{K} \hookrightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{\pi} C^*(U) = C(S^1) \to 0. \tag{1}$$

¿Esta sucesión exacta se escinde?, es decir, ¿existe un homomorfismo de C^*-álgebras $\mathrm{s} : C(S^1) \to \mathcal{T}$ tal que $\pi \circ \mathrm{s} = \mathrm{id}_{C(S^1)}$?

Recuérdese que un operador $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es llamado operador de *Fredholm* si $\ker T$ y $\ker \mathrm{T}^*$ son de dimensión finita;

Recuérdese que un operador $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es llamado operador de *Fredholm* si $\ker T$ y $\ker \mathrm{T}^*$ son de dimensión finita;

Recuérdese que un operador $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es llamado operador de *Fredholm* si $\ker T$ y $\ker \mathrm{T}^*$ son de dimensión finita; en ese caso se define el índice de Fredholm de T como

Recuérdese que un operador $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es llamado operador de *Fredholm* si $\ker T$ y $\ker \mathrm{T}^*$ son de dimensión finita; en ese caso se define el índice de Fredholm de T como

$$\operatorname{ind} T := \dim(\ker T) - \dim(\ker \mathrm{T}^*).$$

Recuérdese que un operador $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es llamado operador de *Fredholm* si $\ker T$ y $\ker \mathrm{T}^*$ son de dimensión finita; en ese caso se define el índice de Fredholm de T como

$$\operatorname{ind} T := \dim(\ker T) - \dim(\ker \mathrm{T}^*).$$

El índice es invariante por perturbaciones compactas.

Recuérdese que un operador $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es llamado operador de *Fredholm* si $\ker T$ y $\ker \mathrm{T}^*$ son de dimensión finita; en ese caso se define el índice de Fredholm de T como

$$\operatorname{ind} T := \dim(\ker T) - \dim(\ker \mathrm{T}^*).$$

El índice es invariante por perturbaciones compactas. Más precisamente, si T es de Fredholm y K es un operador compacto,

Recuérdese que un operador $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es llamado operador de *Fredholm* si $\ker T$ y $\ker \mathrm{T}^*$ son de dimensión finita; en ese caso se define el índice de Fredholm de T como

$$\operatorname{ind} T := \dim(\ker T) - \dim(\ker \mathrm{T}^*).$$

El índice es invariante por perturbaciones compactas. Más precisamente, si T es de Fredholm y K es un operador compacto, entonces $\mathrm{T} + \mathrm{K}$ es de Fredholm, e $\operatorname{ind}(\mathrm{T} + \mathrm{K}) = \operatorname{ind}(T)$.

Recuérdese que un operador $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es llamado operador de *Fredholm* si $\ker T$ y $\ker \mathrm{T}^*$ son de dimensión finita; en ese caso se define el índice de Fredholm de T como

$$\operatorname{ind} T := \dim(\ker T) - \dim(\ker \mathrm{T}^*).$$

El índice es invariante por perturbaciones compactas. Más precisamente, si T es de Fredholm y K es un operador compacto, entonces $\mathrm{T} + \mathrm{K}$ es de Fredholm, e $\operatorname{ind}(\mathrm{T} + \mathrm{K}) = \operatorname{ind}(T)$.
Supongamos que la sucesión exacta (1) se escinde,

Recuérdese que un operador $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es llamado operador de *Fredholm* si $\ker T$ y $\ker \mathrm{T}^*$ son de dimensión finita; en ese caso se define el índice de Fredholm de T como

$$\operatorname{ind} T := \dim(\ker T) - \dim(\ker \mathrm{T}^*).$$

El índice es invariante por perturbaciones compactas. Más precisamente, si T es de Fredholm y K es un operador compacto, entonces $\mathrm{T} + \mathrm{K}$ es de Fredholm, e $\operatorname{ind}(\mathrm{T} + \mathrm{K}) = \operatorname{ind}(T)$.

Supongamos que la sucesión exacta (1) se escinde, y sea s una sección de π.

Recuérdese que un operador $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es llamado operador de *Fredholm* si $\ker T$ y $\ker \mathrm{T}^*$ son de dimensión finita; en ese caso se define el índice de Fredholm de T como

$$\mathrm{ind}\, T := \dim(\ker T) - \dim(\ker \mathrm{T}^*).$$

El índice es invariante por perturbaciones compactas. Más precisamente, si T es de Fredholm y K es un operador compacto, entonces $\mathrm{T} + \mathrm{K}$ es de Fredholm, e $\mathrm{ind}(\mathrm{T} + \mathrm{K}) = \mathrm{ind}(T)$.

Supongamos que la sucesión exacta (1) se escinde, y sea s una sección de π. Entonces $\mathrm{s}(U)$ debe ser unitario, y

Recuérdese que un operador $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es llamado operador de *Fredholm* si $\ker T$ y $\ker \mathrm{T}^*$ son de dimensión finita; en ese caso se define el índice de Fredholm de T como

$$\operatorname{ind} T := \dim(\ker T) - \dim(\ker \mathrm{T}^*).$$

El índice es invariante por perturbaciones compactas. Más precisamente, si T es de Fredholm y K es un operador compacto, entonces $\mathrm{T} + \mathrm{K}$ es de Fredholm, e $\operatorname{ind}(\mathrm{T} + \mathrm{K}) = \operatorname{ind}(T)$.
Supongamos que la sucesión exacta (1) se escinde, y sea s una sección de π. Entonces $\mathrm{s}(U)$ debe ser unitario, y

$$\pi(S - \mathrm{s}(U)) = \pi(S) - \pi\mathrm{s}(U) = U - U = 0,$$

Recuérdese que un operador $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es llamado operador de *Fredholm* si $\ker T$ y $\ker \mathrm{T}^*$ son de dimensión finita; en ese caso se define el índice de Fredholm de T como

$$\operatorname{ind} T := \dim(\ker T) - \dim(\ker \mathrm{T}^*).$$

El índice es invariante por perturbaciones compactas. Más precisamente, si T es de Fredholm y K es un operador compacto, entonces $\mathrm{T} + \mathrm{K}$ es de Fredholm, e $\operatorname{ind}(\mathrm{T} + \mathrm{K}) = \operatorname{ind}(T)$.

Supongamos que la sucesión exacta (1) se escinde, y sea s una sección de π. Entonces $\mathrm{s}(U)$ debe ser unitario, y

$$\pi(S - \mathrm{s}(U)) = \pi(S) - \pi\mathrm{s}(U) = U - U = 0,$$

de modo que $S - \mathrm{s}(U) \in \mathrm{K}$.

Recuérdese que un operador $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es llamado operador de *Fredholm* si $\ker T$ y $\ker \mathrm{T}^*$ son de dimensión finita; en ese caso se define el índice de Fredholm de T como

$$\operatorname{ind} T := \dim(\ker T) - \dim(\ker \mathrm{T}^*).$$

El índice es invariante por perturbaciones compactas. Más precisamente, si T es de Fredholm y K es un operador compacto, entonces $\mathrm{T} + \mathrm{K}$ es de Fredholm, e $\operatorname{ind}(\mathrm{T} + \mathrm{K}) = \operatorname{ind}(T)$.
Supongamos que la sucesión exacta (1) se escinde, y sea s una sección de π. Entonces $\mathrm{s}(U)$ debe ser unitario, y

$$\pi(S - \mathrm{s}(U)) = \pi(S) - \pi \mathrm{s}(U) = U - U = 0,$$

de modo que $S - \mathrm{s}(U) \in \mathrm{K}$. Siendo unitario, el operador $\mathrm{s}(U)$ es de Fredholm, con $\operatorname{ind} \mathrm{s}(U) = 0$.

Recuérdese que un operador $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es llamado operador de *Fredholm* si $\ker T$ y $\ker \mathrm{T}^*$ son de dimensión finita; en ese caso se define el índice de Fredholm de T como

$$\operatorname{ind} T := \dim(\ker T) - \dim(\ker \mathrm{T}^*).$$

El índice es invariante por perturbaciones compactas. Más precisamente, si T es de Fredholm y K es un operador compacto, entonces $\mathrm{T} + \mathrm{K}$ es de Fredholm, e $\operatorname{ind}(\mathrm{T} + \mathrm{K}) = \operatorname{ind}(T)$.
Supongamos que la sucesión exacta (1) se escinde, y sea s una sección de π. Entonces $\mathrm{s}(U)$ debe ser unitario, y

$$\pi(S - \mathrm{s}(U)) = \pi(S) - \pi\mathrm{s}(U) = U - U = 0,$$

de modo que $S - \mathrm{s}(U) \in \mathrm{K}$. Siendo unitario, el operador $\mathrm{s}(U)$ es de Fredholm, con $\operatorname{ind} \mathrm{s}(U) = 0$. Por otro lado, S es de Fredholm, y además

Recuérdese que un operador $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es llamado operador de *Fredholm* si $\ker T$ y $\ker \mathrm{T}^*$ son de dimensión finita; en ese caso se define el índice de Fredholm de T como

$$\operatorname{ind} T := \dim(\ker T) - \dim(\ker \mathrm{T}^*).$$

El índice es invariante por perturbaciones compactas. Más precisamente, si T es de Fredholm y K es un operador compacto, entonces $\mathrm{T} + \mathrm{K}$ es de Fredholm, e $\operatorname{ind}(\mathrm{T} + \mathrm{K}) = \operatorname{ind}(T)$.
Supongamos que la sucesión exacta (1) se escinde, y sea s una sección de π. Entonces $\mathrm{s}(U)$ debe ser unitario, y

$$\pi(S - \mathrm{s}(U)) = \pi(S) - \pi \mathrm{s}(U) = U - U = 0,$$

de modo que $S - \mathrm{s}(U) \in \mathrm{K}$. Siendo unitario, el operador $\mathrm{s}(U)$ es de Fredholm, con $\operatorname{ind} \mathrm{s}(U) = 0$. Por otro lado, S es de Fredholm, y además

$$\operatorname{ind}(S) = \dim(\ker S) - \dim(\ker S^*)$$

Recuérdese que un operador $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es llamado operador de *Fredholm* si $\ker T$ y $\ker \mathrm{T}^*$ son de dimensión finita; en ese caso se define el índice de Fredholm de T como

$$\operatorname{ind} T := \dim(\ker T) - \dim(\ker \mathrm{T}^*).$$

El índice es invariante por perturbaciones compactas. Más precisamente, si T es de Fredholm y K es un operador compacto, entonces $\mathrm{T} + \mathrm{K}$ es de Fredholm, e $\operatorname{ind}(\mathrm{T} + \mathrm{K}) = \operatorname{ind}(T)$.

Supongamos que la sucesión exacta (1) se escinde, y sea s una sección de π. Entonces $\mathrm{s}(U)$ debe ser unitario, y

$$\pi(S - \mathrm{s}(U)) = \pi(S) - \pi\mathrm{s}(U) = U - U = 0,$$

de modo que $S - \mathrm{s}(U) \in \mathrm{K}$. Siendo unitario, el operador $\mathrm{s}(U)$ es de Fredholm, con $\operatorname{ind} \mathrm{s}(U) = 0$. Por otro lado, S es de Fredholm, y además

$$\operatorname{ind}(S) = \dim(\ker S) - \dim(\ker S^*) = 0 - 1 = -1.$$

Recuérdese que un operador $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es llamado operador de *Fredholm* si $\ker T$ y $\ker \mathrm{T}^*$ son de dimensión finita; en ese caso se define el índice de Fredholm de T como

$$\operatorname{ind} T := \dim(\ker T) - \dim(\ker \mathrm{T}^*).$$

El índice es invariante por perturbaciones compactas. Más precisamente, si T es de Fredholm y K es un operador compacto, entonces $\mathrm{T} + \mathrm{K}$ es de Fredholm, e $\operatorname{ind}(\mathrm{T} + \mathrm{K}) = \operatorname{ind}(T)$.
Supongamos que la sucesión exacta (1) se escinde, y sea s una sección de π. Entonces $\mathrm{s}(U)$ debe ser unitario, y

$$\pi(S - \mathrm{s}(U)) = \pi(S) - \pi\mathrm{s}(U) = U - U = 0,$$

de modo que $S - \mathrm{s}(U) \in \mathrm{K}$. Siendo unitario, el operador $\mathrm{s}(U)$ es de Fredholm, con $\operatorname{ind}\mathrm{s}(U) = 0$. Por otro lado, S es de Fredholm, y además

$$\operatorname{ind}(S) = \dim(\ker S) - \dim(\ker S^*) = 0 - 1 = -1.$$

Como $S - \mathrm{s}(U) \in \mathrm{K}$,

Recuérdese que un operador $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es llamado operador de *Fredholm* si $\ker T$ y $\ker \mathrm{T}^*$ son de dimensión finita; en ese caso se define el índice de Fredholm de T como

$$\operatorname{ind} T := \dim(\ker T) - \dim(\ker \mathrm{T}^*).$$

El índice es invariante por perturbaciones compactas. Más precisamente, si T es de Fredholm y K es un operador compacto, entonces $\mathrm{T} + \mathrm{K}$ es de Fredholm, e $\operatorname{ind}(\mathrm{T} + \mathrm{K}) = \operatorname{ind}(T)$.
Supongamos que la sucesión exacta (1) se escinde, y sea s una sección de π. Entonces $\mathrm{s}(U)$ debe ser unitario, y

$$\pi(S - \mathrm{s}(U)) = \pi(S) - \pi\mathrm{s}(U) = U - U = 0,$$

de modo que $S - \mathrm{s}(U) \in \mathrm{K}$. Siendo unitario, el operador $\mathrm{s}(U)$ es de Fredholm, con $\operatorname{ind} \mathrm{s}(U) = 0$. Por otro lado, S es de Fredholm, y además

$$\operatorname{ind}(S) = \dim(\ker S) - \dim(\ker S^*) = 0 - 1 = -1.$$

Como $S - \mathrm{s}(U) \in \mathrm{K}$, debería ser $\operatorname{ind}(S) = \operatorname{ind}(\mathrm{s}(U))$, es decir: $0 = -1$.

Recuérdese que un operador $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es llamado operador de *Fredholm* si $\ker T$ y $\ker \mathrm{T}^*$ son de dimensión finita; en ese caso se define el índice de Fredholm de T como

$$\operatorname{ind} T := \dim(\ker T) - \dim(\ker \mathrm{T}^*).$$

El índice es invariante por perturbaciones compactas. Más precisamente, si T es de Fredholm y K es un operador compacto, entonces $\mathrm{T} + \mathrm{K}$ es de Fredholm, e $\operatorname{ind}(\mathrm{T} + \mathrm{K}) = \operatorname{ind}(T)$.
Supongamos que la sucesión exacta (1) se escinde, y sea s una sección de π. Entonces $\mathrm{s}(U)$ debe ser unitario, y

$$\pi(S - \mathrm{s}(U)) = \pi(S) - \pi\mathrm{s}(U) = U - U = 0,$$

de modo que $S - \mathrm{s}(U) \in \mathrm{K}$. Siendo unitario, el operador $\mathrm{s}(U)$ es de Fredholm, con $\operatorname{ind}\mathrm{s}(U) = 0$. Por otro lado, S es de Fredholm, y además

$$\operatorname{ind}(S) = \dim(\ker S) - \dim(\ker S^*) = 0 - 1 = -1.$$

Como $S - \mathrm{s}(U) \in \mathrm{K}$, debería ser $\operatorname{ind}(S) = \operatorname{ind}(\mathrm{s}(U))$, es decir: $0 = -1$. El absurdo permite concluir que no puede existir un tal homomorfismo s.

Un hecho fundamental acerca del álgebra de Toeplitz es el siguiente:

Teorema (Coburn, 1967)

Supongamos que $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es una isometría en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces existe un único homomorfismo de C^*-álgebras $\mathcal{T} \to C^*(T)$ tal que $S \mapsto T$. Este homomorfismo es sobreyectivo, y es un isomorfismo si y sólo si T no es unitario.

Operadores de Toeplitz. Consideremos la representación unital $\mathrm{M} : C(S^1) \to \mathrm{B}(L^2(S^1))$ tal que $f \mapsto \mathrm{M}_f$.

Un hecho fundamental acerca del álgebra de Toeplitz es el siguiente:

Teorema (Coburn, 1967)

Supongamos que $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ *es una isometría en el espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$. *Entonces existe un único homomorfismo de* C^**-álgebras* $\mathcal{T} \to C^*(T)$ *tal que* $S \mapsto T$. *Este homomorfismo es sobreyectivo, y es un isomorfismo si y sólo si* T *no es unitario.*

Operadores de Toeplitz. Consideremos la representación unital $\mathrm{M} : C(S^1) \to \mathrm{B}(L^2(S^1))$ tal que $f \mapsto \mathrm{M}_f$.

Un hecho fundamental acerca del álgebra de Toeplitz es el siguiente:

Teorema (Coburn, 1967)

Supongamos que $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ *es una isometría en el espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$*. Entonces existe un único homomorfismo de* C^**-álgebras* $\mathcal{T} \to C^*(T)$ *tal que* $S \mapsto T$*. Este homomorfismo es sobreyectivo, y es un isomorfismo si y sólo si* T *no es unitario.*

Operadores de Toeplitz. Consideremos la representación unital $\mathrm{M} : C(S^1) \to \mathrm{B}(L^2(S^1))$ tal que $f \mapsto \mathrm{M}_f$. Como es un homomorfismo inyectivo de C^*-álgebras, M es una isometría.

Un hecho fundamental acerca del álgebra de Toeplitz es el siguiente:

Teorema (Coburn, 1967)

Supongamos que $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es una isometría en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces existe un único homomorfismo de C^*-álgebras $\mathcal{T} \to C^*(T)$ tal que $S \mapsto T$. Este homomorfismo es sobreyectivo, y es un isomorfismo si y sólo si T no es unitario.

Operadores de Toeplitz. Consideremos la representación unital $\mathrm{M} : C(S^1) \to \mathrm{B}(L^2(S^1))$ tal que $f \mapsto \mathrm{M}_f$. Como es un homomorfismo inyectivo de C^*-álgebras, M es una isometría.
El **espacio de Hardy** es $\mathcal{H}^2 := \overline{\mathrm{span}}\{e_n : \ n \geq 0\}$, donde $e_n : S^1 \to S^1$ está definido como $e_n(z) = z^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $z \in S^1$.

Un hecho fundamental acerca del álgebra de Toeplitz es el siguiente:

Teorema (Coburn, 1967)

Supongamos que $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es una isometría en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces existe un único homomorfismo de C^*-álgebras $\mathcal{T} \to C^*(T)$ tal que $S \mapsto T$. Este homomorfismo es sobreyectivo, y es un isomorfismo si y sólo si T no es unitario.

Operadores de Toeplitz. Consideremos la representación unital $\mathrm{M} : C(S^1) \to \mathrm{B}(L^2(S^1))$ tal que $f \mapsto \mathrm{M}_f$. Como es un homomorfismo inyectivo de C^*-álgebras, M es una isometría.
El **espacio de Hardy** es $\mathcal{H}^2 := \overline{\mathrm{span}}\{e_n : \ n \geq 0\}$, donde $e_n : S^1 \to S^1$ está definido como $e_n(z) = z^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $z \in S^1$. La familia $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(S^1)$:

Un hecho fundamental acerca del álgebra de Toeplitz es el siguiente:

Teorema (Coburn, 1967)

Supongamos que $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es una isometría en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces existe un único homomorfismo de C^*-álgebras $\mathcal{T} \to C^*(T)$ tal que $S \mapsto T$. Este homomorfismo es sobreyectivo, y es un isomorfismo si y sólo si T no es unitario.

Operadores de Toeplitz. Consideremos la representación unital $\mathrm{M} : C(S^1) \to \mathrm{B}(L^2(S^1))$ tal que $f \mapsto \mathrm{M}_f$. Como es un homomorfismo inyectivo de C^*-álgebras, M es una isometría.
El **espacio de Hardy** es $\mathcal{H}^2 := \overline{\mathrm{span}}\{e_n : \ n \geq 0\}$, donde $e_n : S^1 \to S^1$ está definido como $e_n(z) = z^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $z \in S^1$. La familia $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(S^1)$:

$$\langle e_n, e_m \rangle = \int_{S^1} z^n z^{-m} dz$$

Un hecho fundamental acerca del álgebra de Toeplitz es el siguiente:

Teorema (Coburn, 1967)

Supongamos que $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es una isometría en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces existe un único homomorfismo de C^*-álgebras $\mathcal{T} \to C^*(T)$ tal que $S \mapsto T$. Este homomorfismo es sobreyectivo, y es un isomorfismo si y sólo si T no es unitario.

Operadores de Toeplitz. Consideremos la representación unital $\mathrm{M} : C(S^1) \to \mathrm{B}(L^2(S^1))$ tal que $f \mapsto \mathrm{M}_f$. Como es un homomorfismo inyectivo de C^*-álgebras, M es una isometría.

El **espacio de Hardy** es $\mathcal{H}^2 := \overline{\mathrm{span}}\{e_n : \ n \geq 0\}$, donde $e_n : S^1 \to S^1$ está definido como $e_n(z) = z^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $z \in S^1$. La familia $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(S^1)$:

$$\langle e_n, e_m \rangle = \int_{S^1} z^n z^{-m} dz = \int_{S^1} z^{n-m} dz$$

Un hecho fundamental acerca del álgebra de Toeplitz es el siguiente:

Teorema (Coburn, 1967)

Supongamos que $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es una isometría en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces existe un único homomorfismo de C^*-álgebras $\mathcal{T} \to C^*(T)$ tal que $S \mapsto T$. Este homomorfismo es sobreyectivo, y es un isomorfismo si y sólo si T no es unitario.

Operadores de Toeplitz. Consideremos la representación unital $\mathrm{M} : C(S^1) \to \mathrm{B}(L^2(S^1))$ tal que $f \mapsto \mathrm{M}_f$. Como es un homomorfismo inyectivo de C^*-álgebras, M es una isometría.

El **espacio de Hardy** es $\mathcal{H}^2 := \overline{\mathrm{span}}\{e_n : \ n \geq 0\}$, donde $e_n : S^1 \to S^1$ está definido como $e_n(z) = z^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $z \in S^1$. La familia $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(S^1)$:

$$\langle e_n, e_m \rangle = \int_{S^1} z^n z^{-m} dz = \int_{S^1} z^{n-m} dz = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{si } n \neq m, \end{cases}$$

Un hecho fundamental acerca del álgebra de Toeplitz es el siguiente:

Teorema (Coburn, 1967)

Supongamos que $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es una isometría en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces existe un único homomorfismo de C^*-álgebras $\mathcal{T} \to C^*(T)$ tal que $S \mapsto T$. Este homomorfismo es sobreyectivo, y es un isomorfismo si y sólo si T no es unitario.

Operadores de Toeplitz. Consideremos la representación unital $\mathrm{M} : C(S^1) \to \mathrm{B}(L^2(S^1))$ tal que $f \mapsto \mathrm{M}_f$. Como es un homomorfismo inyectivo de C^*-álgebras, M es una isometría.
El **espacio de Hardy** es $\mathcal{H}^2 := \overline{\mathrm{span}}\{e_n : \ n \geq 0\}$, donde $e_n : S^1 \to S^1$ está definido como $e_n(z) = z^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $z \in S^1$. La familia $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(S^1)$:

$$\langle e_n, e_m\rangle = \int_{S^1} z^n z^{-m} dz = \int_{S^1} z^{n-m} dz = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{si } n \neq m, \end{cases}$$

así que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal.

Por otro lado, por el teorema de Stone-Weierstrass, Por otro lado, por el teorema de Stone-Weierstrass, o por el teorema de Féjer, Por otro lado, por el teorema de Stone-Weierstrass, o por el teorema de Féjer, $\operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $C(S^1)$ en $\| \|_\infty$.

Por otro lado, por el teorema de Stone-Weierstrass, o por el teorema de Féjer, $\mathrm{span}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $C(S^1)$ en $\| \, \|_\infty$. Entonces $\mathrm{span}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es $\| \, \|_2$-denso en $C(S^1)$

Por otro lado, por el teorema de Stone-Weierstrass, o por el teorema de Féjer, $\text{span}\{e_n :\ n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $C(S^1)$ en $\| \ \|_\infty$. Entonces $\text{span}\{e_n :\ n \in \mathbb{Z}\}$ es $\| \ \|_2$-denso en $C(S^1)$ y como $\overline{C(S^1)}^{\| \ \|_2} = L^2(S^1)$, Por otro lado, por el teorema de Stone-Weierstrass, o por el teorema de Féjer, $\operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $C(S^1)$ en $\| \|_\infty$. Entonces $\operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es $\| \|_2$-denso en $C(S^1)$ y como $\overline{C(S^1)}^{\| \|_2} = L^2(S^1)$, entonces $\overline{\operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}}^{\| \|_2} = L^2(S^1)$.

Por otro lado, por el teorema de Stone-Weierstrass, o por el teorema de Féjer, $\mathrm{span}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $C(S^1)$ en $\| \|_\infty$. Entonces $\mathrm{span}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es $\| \|_2$-denso en $C(S^1)$ y como $\overline{C(S^1)}^{\| \|_2} = L^2(S^1)$, entonces $\overline{\mathrm{span}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}}^{\| \|_2} = L^2(S^1)$. Luego $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de $L^2(S^1)$.

Por otro lado, por el teorema de Stone-Weierstrass, o por el teorema de Féjer, $\mathrm{span}\{e_n:\ n\in\mathbb{Z}\}$ es denso en $C(S^1)$ en $\|\ \|_\infty$. Entonces $\mathrm{span}\{e_n:\ n\in\mathbb{Z}\}$ es $\|\ \|_2$-denso en $C(S^1)$ y como $\overline{C(S^1)}^{\|\ \|_2}=L^2(S^1)$, entonces $\overline{\mathrm{span}\{e_n:\ n\in\mathbb{Z}\}}^{\|\ \|_2}=L^2(S^1)$. Luego $\{e_n:\ n\in\mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de $L^2(S^1)$. Y $\{e_n:\ n\geq 0\}$ es una base ortonormal del espacio de Hardy.

La transformada de Fourier $\mathcal{F}:L^2(S^1)\to\ell^2(\mathbb{Z})$, tal que $L^2(S^1)\ni\xi\overset{\mathcal{F}}{\mapsto}\hat{\xi}\in\ell^2(\mathbb{Z})$, donde $\hat{\xi}(n):=\langle\xi,e_n\rangle$, $\forall n\in\mathbb{Z}$ es un isomorfismo, bajo el cual el espacio de Hardy se transforma en $\ell^2(\mathbb{N})$.

Por otro lado, por el teorema de Stone-Weierstrass, o por el teorema de Féjer, $\operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $C(S^1)$ en $\| \|_\infty$. Entonces $\operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es $\| \|_2$-denso en $C(S^1)$ y como $\overline{C(S^1)}^{\| \|_2} = L^2(S^1)$, entonces $\overline{\operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}}^{\| \|_2} = L^2(S^1)$. Luego $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de $L^2(S^1)$. Y $\{e_n : n \geq 0\}$ es una base ortonormal del espacio de Hardy.

La transformada de Fourier $\mathcal{F} : L^2(S^1) \to \ell^2(\mathbb{Z})$, tal que $L^2(S^1) \ni \xi \overset{\mathcal{F}}{\mapsto} \hat{\xi} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, donde $\hat{\xi}(n) := \langle \xi, e_n \rangle$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ es un isomorfismo, bajo el cual el espacio de Hardy se transforma en $\ell^2(\mathbb{N})$.

Definición

El operador de Toeplitz de símbolo $f \in C(S^1)$ es $T_f : \mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}^2$ tal que

Por otro lado, por el teorema de Stone-Weierstrass, o por el teorema de Féjer, $\mathrm{span}\{e_n : \; n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $C(S^1)$ en $\| \; \|_\infty$. Entonces $\mathrm{span}\{e_n : \; n \in \mathbb{Z}\}$ es $\| \; \|_2$-denso en $C(S^1)$ y como $\overline{C(S^1)}^{\| \; \|_2} = L^2(S^1)$, entonces $\overline{\mathrm{span}\{e_n : \; n \in \mathbb{Z}\}}^{\| \; \|_2} = L^2(S^1)$. Luego $\{e_n : \; n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de $L^2(S^1)$. Y $\{e_n : \; n \geq 0\}$ es una base ortonormal del espacio de Hardy.

La transformada de Fourier $\mathcal{F} : L^2(S^1) \to \ell^2(\mathbb{Z})$, tal que $L^2(S^1) \ni \xi \overset{\mathcal{F}}{\mapsto} \hat{\xi} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, donde $\hat{\xi}(n) := \langle \xi, e_n \rangle$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ es un isomorfismo, bajo el cual el espacio de Hardy se transforma en $\ell^2(\mathbb{N})$.

Definición

El operador de Toeplitz de símbolo $f \in C(S^1)$ *es* $T_f : \mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}^2$ *tal que*

Por otro lado, por el teorema de Stone-Weierstrass, o por el teorema de Féjer, $\text{span}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $C(S^1)$ en $\| \|_\infty$. Entonces $\text{span}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es $\| \|_2$-denso en $C(S^1)$ y como $\overline{C(S^1)}^{\| \|_2} = L^2(S^1)$, entonces $\overline{\text{span}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}}^{\| \|_2} = L^2(S^1)$. Luego $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de $L^2(S^1)$. Y $\{e_n : n \geq 0\}$ es una base ortonormal del espacio de Hardy.

La transformada de Fourier $\mathcal{F} : L^2(S^1) \to \ell^2(\mathbb{Z})$, tal que $L^2(S^1) \ni \xi \overset{\mathcal{F}}{\mapsto} \hat{\xi} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, donde $\hat{\xi}(n) := \langle \xi, e_n \rangle$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ es un isomorfismo, bajo el cual el espacio de Hardy se transforma en $\ell^2(\mathbb{N})$.

Definición

El operador de Toeplitz de símbolo $f \in C(S^1)$ es $T_f : \mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}^2$ tal que

$$T_f = P^{L^2}_{\mathcal{H}^2} \mathrm{M}_f|_{\mathcal{H}^2}.$$

Por otro lado, por el teorema de Stone-Weierstrass, o por el teorema de Féjer, $\text{span}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $C(S^1)$ en $\| \|_\infty$. Entonces $\text{span}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es $\| \|_2$-denso en $C(S^1)$ y como $\overline{C(S^1)}^{\| \|_2} = L^2(S^1)$, entonces $\overline{\text{span}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}}^{\| \|_2} = L^2(S^1)$. Luego $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de $L^2(S^1)$. Y $\{e_n : n \geq 0\}$ es una base ortonormal del espacio de Hardy.

La transformada de Fourier $\mathcal{F} : L^2(S^1) \to \ell^2(\mathbb{Z})$, tal que $L^2(S^1) \ni \xi \overset{\mathcal{F}}{\mapsto} \hat{\xi} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, donde $\hat{\xi}(n) := \langle \xi, e_n \rangle$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ es un isomorfismo, bajo el cual el espacio de Hardy se transforma en $\ell^2(\mathbb{N})$.

Definición

El operador de Toeplitz de símbolo $f \in C(S^1)$ es $T_f : \mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}^2$ tal que

$$T_f = P^{L^2}_{\mathcal{H}^2} \mathrm{M}_f|_{\mathcal{H}^2}.$$

En otras palabras, el operador de Toeplitz de símbolo f se obtiene comprimiendo el operador de multiplicación M_f al espacio de Hardy.

Por otro lado, por el teorema de Stone-Weierstrass, o por el teorema de Féjer, $\operatorname{span}\{e_n : \ n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $C(S^1)$ en $\| \ \|_\infty$. Entonces $\operatorname{span}\{e_n : \ n \in \mathbb{Z}\}$ es $\| \ \|_2$-denso en $C(S^1)$ y como $\overline{C(S^1)}^{\| \ \|_2} = L^2(S^1)$, entonces $\overline{\operatorname{span}\{e_n : \ n \in \mathbb{Z}\}}^{\| \ \|_2} = L^2(S^1)$. Luego $\{e_n : \ n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de $L^2(S^1)$. Y $\{e_n : \ n \geq 0\}$ es una base ortonormal del espacio de Hardy.

La transformada de Fourier $\mathcal{F} : L^2(S^1) \to \ell^2(\mathbb{Z})$, tal que $L^2(S^1) \ni \xi \overset{\mathcal{F}}{\mapsto} \hat{\xi} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, donde $\hat{\xi}(n) := \langle \xi, e_n \rangle$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ es un isomorfismo, bajo el cual el espacio de Hardy se transforma en $\ell^2(\mathbb{N})$.

Definición

El operador de Toeplitz de símbolo $f \in C(S^1)$ es $T_f : \mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}^2$ tal que

$$T_f = P^{L^2}_{\mathcal{H}^2} \mathrm{M}_f|_{\mathcal{H}^2}.$$

En otras palabras, el operador de Toeplitz de símbolo f se obtiene comprimiendo el operador de multiplicación M_f al espacio de Hardy.

Observar que $\|T_f\| = \|\mathrm{PM}_f|_{\mathcal{H}^2}\| \leq \|\mathrm{M}_f\| = \|f\|_\infty$.

Algunos ejemplos de operadores de Toeplitz.

Denotemos por P a la proyección ortogonal $P^{L^2}_{\mathcal{H}^2}$.

Algunos ejemplos de operadores de Toeplitz.

Denotemos por P a la proyección ortogonal $P^{L^2}_{\mathcal{H}^2}$.

(1) Calculemos T_{e_n} para $n \geq 0$: $T_{e_n} = P\mathrm{M}_{e_n}|_{\mathcal{H}^2}$.

Algunos ejemplos de operadores de Toeplitz.

Denotemos por P a la proyección ortogonal $P^{L^2}_{\mathcal{H}^2}$.

(1) Calculemos T_{e_n} para $n \geq 0$: $T_{e_n} = P\mathrm{M}_{e_n}|_{\mathcal{H}^2}$.

Algunos ejemplos de operadores de Toeplitz.

Denotemos por P a la proyección ortogonal $P^{L^2}_{\mathcal{H}^2}$.

(1) Calculemos T_{e_n} para $n \geq 0$: $T_{e_n} = P\mathrm{M}_{e_n}|_{\mathcal{H}^2}$. Si $\xi \in \mathcal{H}^2$, entonces $\xi = \sum_{k\geq 0}\langle \xi, e_k\rangle e_k$.

Algunos ejemplos de operadores de Toeplitz.

Denotemos por P a la proyección ortogonal $P_{\mathcal{H}^2}^{L^2}$.

(1) Calculemos T_{e_n} para $n \geq 0$: $T_{e_n} = P\mathrm{M}_{e_n}|_{\mathcal{H}^2}$. Si $\xi \in \mathcal{H}^2$, entonces $\xi = \sum_{k\geq 0}\langle \xi, e_k\rangle e_k$. Entonces $\mathrm{M}_{e_n}\xi = \sum_{k\geq 0}\langle \xi, e_k\rangle e_{n+k}$.

Algunos ejemplos de operadores de Toeplitz.

Denotemos por P a la proyección ortogonal $P^{L^2}_{\mathcal{H}^2}$.

(1) Calculemos T_{e_n} para $n \geq 0$: $T_{e_n} = P\mathrm{M}_{e_n}|_{\mathcal{H}^2}$. Si $\xi \in \mathcal{H}^2$, entonces $\xi = \sum_{k\geq 0}\langle \xi, e_k\rangle e_k$. Entonces $\mathrm{M}_{e_n}\xi = \sum_{k\geq 0}\langle \xi, e_k\rangle e_{n+k}$. Luego $T_{e_n}(e_k) = e_{n+k}$, para todo $k \geq 0$.

Algunos ejemplos de operadores de Toeplitz.

Denotemos por P a la proyección ortogonal $P^{L^2}_{\mathcal{H}^2}$.

(1) Calculemos T_{e_n} para $n \geq 0$: $T_{e_n} = P\mathrm{M}_{e_n}|_{\mathcal{H}^2}$. Si $\xi \in \mathcal{H}^2$, entonces $\xi = \sum_{k\geq 0}\langle \xi, e_k\rangle e_k$. Entonces $\mathrm{M}_{e_n}\xi = \sum_{k\geq 0}\langle \xi, e_k\rangle e_{n+k}$. Luego $T_{e_n}(e_k) = e_{n+k}$, para todo $k \geq 0$. Por lo tanto $T_{e_n} = \mathcal{F}^{-1}S^n\mathcal{F}$:

Algunos ejemplos de operadores de Toeplitz.

Denotemos por P a la proyección ortogonal $P^{L^2}_{\mathcal{H}^2}$.

(1) Calculemos T_{e_n} para $n \geq 0$: $T_{e_n} = P\mathrm{M}_{e_n}|_{\mathcal{H}^2}$. Si $\xi \in \mathcal{H}^2$, entonces $\xi = \sum_{k\geq 0}\langle \xi, e_k\rangle e_k$. Entonces $\mathrm{M}_{e_n}\xi = \sum_{k\geq 0}\langle \xi, e_k\rangle e_{n+k}$. Luego $T_{e_n}(e_k) = e_{n+k}$, para todo $k \geq 0$. Por lo tanto $T_{e_n} = \mathcal{F}^{-1}S^n\mathcal{F}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}^2 \arrow[r, "T_{e_n}"] \arrow[d, "\mathcal{F}"', "\cong"] & \mathcal{H}^2 \arrow[d, "\cong"', "\mathcal{F}"] \\
\ell^2(\mathbb{N}) \arrow[r, "S^n"'] & \ell^2(\mathbb{N})
\end{tikzcd}$$

Algunos ejemplos de operadores de Toeplitz.

Denotemos por P a la proyección ortogonal $P^{L^2}_{\mathcal{H}^2}$.

(1) Calculemos T_{e_n} para $n \geq 0$: $T_{e_n} = P\mathrm{M}_{e_n}|_{\mathcal{H}^2}$. Si $\xi \in \mathcal{H}^2$, entonces $\xi = \sum_{k\geq 0}\langle \xi, e_k\rangle e_k$. Entonces $\mathrm{M}_{e_n}\xi = \sum_{k\geq 0}\langle \xi, e_k\rangle e_{n+k}$. Luego $T_{e_n}(e_k) = e_{n+k}$, para todo $k \geq 0$. Por lo tanto $T_{e_n} = \mathcal{F}^{-1}S^n\mathcal{F}$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}^2 \arrow[r, "T_{e_n}"] \arrow[d, "\mathcal{F}"', "\cong"] & \mathcal{H}^2 \arrow[d, "\cong"', "\mathcal{F}"] \\ \ell^2(\mathbb{N}) \arrow[r, "S^n"'] & \ell^2(\mathbb{N}) \end{tikzcd}$$

(2) T_{e_n}, $n < 0$: $T_{e_n}(e_k) = P(e_{n+k}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < -n, \\ e_{n+k} & \text{si } k \geq -n. \end{cases}$ Por lo tanto $T_{e_n} = \mathcal{F}^{-1}S^{*n}\mathcal{F}$:

Algunos ejemplos de operadores de Toeplitz.

Denotemos por P a la proyección ortogonal $P^{L^2}_{\mathcal{H}^2}$.

(1) Calculemos T_{e_n} para $n \geq 0$: $T_{e_n} = P\mathrm{M}_{e_n}|_{\mathcal{H}^2}$. Si $\xi \in \mathcal{H}^2$, entonces $\xi = \sum_{k\geq 0}\langle \xi, e_k\rangle e_k$. Entonces $\mathrm{M}_{e_n}\xi = \sum_{k\geq 0}\langle \xi, e_k\rangle e_{n+k}$. Luego $T_{e_n}(e_k) = e_{n+k}$, para todo $k \geq 0$. Por lo tanto $T_{e_n} = \mathcal{F}^{-1}S^n\mathcal{F}$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}^2 \arrow[r, "T_{e_n}"] \arrow[d, "\mathcal{F}"', "\cong"] & \mathcal{H}^2 \arrow[d, "\cong"', "\mathcal{F}"] \\ \ell^2(\mathbb{N}) \arrow[r, "S^n"'] & \ell^2(\mathbb{N}) \end{tikzcd}$$

(2) T_{e_n}, $n < 0$: $T_{e_n}(e_k) = P(e_{n+k}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < -n, \\ e_{n+k} & \text{si } k \geq -n. \end{cases}$ Por lo tanto $T_{e_n} = \mathcal{F}^{-1}S^{*n}\mathcal{F}$:

Algunos ejemplos de operadores de Toeplitz.

Denotemos por P a la proyección ortogonal $P^{L^2}_{\mathcal{H}^2}$.

(1) Calculemos T_{e_n} para $n \geq 0$: $T_{e_n} = P\mathrm{M}_{e_n}|_{\mathcal{H}^2}$. Si $\xi \in \mathcal{H}^2$, entonces $\xi = \sum_{k\geq 0}\langle \xi, e_k\rangle e_k$. Entonces $\mathrm{M}_{e_n}\xi = \sum_{k\geq 0}\langle \xi, e_k\rangle e_{n+k}$. Luego $T_{e_n}(e_k) = e_{n+k}$, para todo $k \geq 0$. Por lo tanto $T_{e_n} = \mathcal{F}^{-1}S^n\mathcal{F}$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}^2 \arrow[r, "T_{e_n}"] \arrow[d, "\mathcal{F}"', "\cong"] & \mathcal{H}^2 \arrow[d, "\cong"', "\mathcal{F}"] \\ \ell^2(\mathbb{N}) \arrow[r, "S^n"'] & \ell^2(\mathbb{N}) \end{tikzcd}$$

(2) T_{e_n}, $n < 0$: $T_{e_n}(e_k) = P(e_{n+k}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < -n, \\ e_{n+k} & \text{si } k \geq -n. \end{cases}$ Por lo tanto $T_{e_n} = \mathcal{F}^{-1}{S^*}^n\mathcal{F}$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}^2 \arrow[r, "T_{e_n}"] \arrow[d, "\mathcal{F}"', "\cong"] & \mathcal{H}^2 \arrow[d, "\cong"', "\mathcal{F}"] \\ \ell^2(\mathbb{N}) \arrow[r, "{S^*}^n"'] & \ell^2(\mathbb{N}) \end{tikzcd}$$

(3) Si $f=\sum_{j=-N}^{N} a_j e_j$ con $N\geq 0$, entonces $T_f=\sum_{j=-N}^{N} a_j T_{e_j}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}^2 \arrow[r, "T_f"] \arrow[d, "\mathcal{F}"', "\cong"] & \mathcal{H}^2 \arrow[d, "\cong"', "\mathcal{F}"] \\
\ell^2(\mathbb{N}) \arrow[r, "\sum_{j=-N}^{-1} a_j S^{*-j}+\sum_{j=0}^{N} a_j S^j\in\mathcal{T}"'] & \ell^2(\mathbb{N})
\end{tikzcd}$$

(3) Si $f = \sum_{j=-N}^{N} a_j e_j$ con $N \geq 0$, entonces $T_f = \sum_{j=-N}^{N} a_j T_{e_j}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}^2 \arrow[r, "T_f"] \arrow[d, "\mathcal{F}"', "\cong"] & \mathcal{H}^2 \arrow[d, "\mathcal{F}", "\cong"'] \\
\ell^2(\mathbb{N}) \arrow[r, "\sum_{j=-N}^{-1} a_j S^{*-j} + \sum_{j=0}^{N} a_j S^j \in \mathcal{T}"'] & \ell^2(\mathbb{N})
\end{tikzcd}$$

(3) Si $f = \sum_{j=-N}^{N} a_j e_j$ con $N \geq 0$, entonces $T_f = \sum_{j=-N}^{N} a_j T_{e_j}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}^2 \arrow[r, "T_f"] \arrow[d, "\mathcal{F}"', "\cong"] & \mathcal{H}^2 \arrow[d, "\cong"', "\mathcal{F}"] \\
\ell^2(\mathbb{N}) \arrow[r] & \ell^2(\mathbb{N})
\end{tikzcd}$$

$$\sum_{j=-N}^{-1} a_j S^{*\,-j} + \sum_{j=0}^{N} a_j S^j \in \mathcal{T}$$

Corolario

La C^*-álgebra $C^*(\langle T_f : f \in C(S^1)\rangle)$ generada por los operadores de Toeplitz de símbolo continuo en $B(\mathcal{H}^2)$ es isomorfa a la C^*-álgebra $\mathcal{T} = C^*(S)$ generada por el shift unilateral en $B(\ell^2(\mathbb{N}))$.

Sea $\mathrm{s} : C(S^1) \to \mathcal{T}$ dado por $\mathrm{s}(f) = T_f$.

Sea $\mathrm{s} : C(S^1) \to \mathcal{T}$ dado por $\mathrm{s}(f) = T_f$. Entonces s es un operador acotado.

Sea $s : C(S^1) \to \mathcal{T}$ dado por $s(f) = T_f$. Entonces s es un operador acotado. Además $\pi \circ s = \mathrm{id}_{C(S^1)}$ donde π es la proyección de $\mathcal{T}$ en $C(S^1)$.

Sea $\mathrm{s} : C(S^1) \to \mathcal{T}$ dado por $\mathrm{s}(f) = T_f$. Entonces s es un operador acotado. Además $\pi \circ \mathrm{s} = \mathrm{id}_{C(S^1)}$ donde π es la proyección de $\mathcal{T}$ en $C(S^1)$. En efecto:

Sea $\mathrm{s} : C(S^1) \to \mathcal{T}$ dado por $\mathrm{s}(f) = T_f$. Entonces s es un operador acotado. Además $\pi \circ \mathrm{s} = \mathrm{id}_{C(S^1)}$ donde π es la proyección de $\mathcal{T}$ en $C(S^1)$. En efecto:

- Si $k \geq 0$: $C(S^1) \ni e_k \overset{\mathrm{s}}{\mapsto} S^k \overset{\pi}{\mapsto} U^k = e_k$.

Sea $\mathrm{s} : C(S^1) \to \mathcal{T}$ dado por $\mathrm{s}(f) = T_f$. Entonces s es un operador acotado. Además $\pi \circ \mathrm{s} = \mathrm{id}_{C(S^1)}$ donde π es la proyección de $\mathcal{T}$ en $C(S^1)$. En efecto:

- Si $k \geq 0$: $C(S^1) \ni e_k \overset{\mathrm{s}}{\mapsto} S^k \overset{\pi}{\mapsto} U^k = e_k$.
- Si $k < 0$: $C(S^1) \ni e_k \overset{\mathrm{s}}{\mapsto} \mathrm{S}^{*-\mathrm{k}} \overset{\pi}{\mapsto} U^{*-k} = U^k = e_k$.

Sea $\mathsf{s} : C(S^1) \to \mathcal{T}$ dado por $\mathsf{s}(f) = T_f$. Entonces s es un operador acotado. Además $\pi \circ \mathsf{s} = \mathrm{id}_{C(S^1)}$ donde π es la proyección de $\mathcal{T}$ en $C(S^1)$. En efecto:

- Si $k \geq 0$: $C(S^1) \ni e_k \overset{\mathsf{s}}{\mapsto} S^k \overset{\pi}{\mapsto} U^k = e_k$.
- Si $k < 0$: $C(S^1) \ni e_k \overset{\mathsf{s}}{\mapsto} \mathrm{S}^{*-\mathrm{k}} \overset{\pi}{\mapsto} U^{*-k} = U^k = e_k$.

Sea $\mathrm{s} : C(S^1) \to \mathcal{T}$ dado por $\mathrm{s}(f) = T_f$. Entonces s es un operador acotado. Además $\pi \circ \mathrm{s} = \mathrm{id}_{C(S^1)}$ donde π es la proyección de $\mathcal{T}$ en $C(S^1)$. En efecto:

- Si $k \geq 0$: $C(S^1) \ni e_k \overset{\mathrm{s}}{\mapsto} S^k \overset{\pi}{\mapsto} U^k = e_k$.
- Si $k < 0$: $C(S^1) \ni e_k \overset{\mathrm{s}}{\mapsto} \mathrm{S}^{*-\mathrm{k}} \overset{\pi}{\mapsto} U^{*-k} = U^k = e_k$.

Entonces $e_k \overset{\pi\mathrm{s}}{\mapsto} e_k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, y como los e_k generan $C(S^1)$, se tiene que $\pi\mathrm{s} = \mathrm{id}_{C(S^1)}$.

Sea $\mathsf{s} : C(S^1) \to \mathcal{T}$ dado por $\mathsf{s}(f) = T_f$. Entonces s es un operador acotado. Además $\pi \circ \mathsf{s} = \mathrm{id}_{C(S^1)}$ donde π es la proyección de $\mathcal{T}$ en $C(S^1)$. En efecto:

- Si $k \geq 0$: $C(S^1) \ni e_k \overset{\mathsf{s}}{\mapsto} S^k \overset{\pi}{\mapsto} U^k = e_k$.
- Si $k < 0$: $C(S^1) \ni e_k \overset{\mathsf{s}}{\mapsto} \mathsf{S}^{*-\mathsf{k}} \overset{\pi}{\mapsto} U^{*-k} = U^k = e_k$.

Entonces $e_k \overset{\pi\mathsf{s}}{\mapsto} e_k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, y como los e_k generan $C(S^1)$, se tiene que $\pi\mathsf{s} = \mathrm{id}_{C(S^1)}$. Luego la sucesión exacta corta

Sea $s : C(S^1) \to \mathcal{T}$ dado por $s(f) = T_f$. Entonces s es un operador acotado. Además $\pi \circ s = \mathrm{id}_{C(S^1)}$ donde π es la proyección de $\mathcal{T}$ en $C(S^1)$. En efecto:

- Si $k \geq 0$: $C(S^1) \ni e_k \overset{s}{\mapsto} S^k \overset{\pi}{\mapsto} U^k = e_k$.
- Si $k < 0$: $C(S^1) \ni e_k \overset{s}{\mapsto} S^{*-k} \overset{\pi}{\mapsto} U^{*-k} = U^k = e_k$.

Entonces $e_k \overset{\pi s}{\mapsto} e_k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, y como los e_k generan $C(S^1)$, se tiene que $\pi s = \mathrm{id}_{C(S^1)}$. Luego la sucesión exacta corta

$$0 \to K \mapsto \mathcal{T} \overset{\pi}{\to} C(S^1) \to 0$$

se escinde en la categoría de espacios de Banach.

Sea $\mathrm{s} : C(S^1) \to \mathcal{T}$ dado por $\mathrm{s}(f) = T_f$. Entonces s es un operador acotado. Además $\pi \circ \mathrm{s} = \mathrm{id}_{C(S^1)}$ donde π es la proyección de $\mathcal{T}$ en $C(S^1)$. En efecto:

- Si $k \geq 0$: $C(S^1) \ni e_k \overset{\mathrm{s}}{\mapsto} S^k \overset{\pi}{\mapsto} U^k = e_k$.
- Si $k < 0$: $C(S^1) \ni e_k \overset{\mathrm{s}}{\mapsto} \mathrm{S}^{*-\mathrm{k}} \overset{\pi}{\mapsto} U^{*-k} = U^k = e_k$.

Entonces $e_k \overset{\pi\mathrm{s}}{\mapsto} e_k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, y como los e_k generan $C(S^1)$, se tiene que $\pi\mathrm{s} = \mathrm{id}_{C(S^1)}$. Luego la sucesión exacta corta

$$0 \to \mathrm{K} \mapsto \mathcal{T} \overset{\pi}{\to} C(S^1) \to 0$$

se escinde en la categoría de espacios de Banach.

Observación

El mapa $\mathrm{s}|_{\mathrm{A}(\mathbb{D})} : \mathrm{A}(\mathbb{D}) \to \mathcal{T}$ *es un homomorfismo de álgebras, donde* $\mathrm{A}(\mathbb{D})$ *es el álgebra del disco, el cual es un subespacio de* $C(S^1)$.

Prim($\mathcal{T}$) y $\widehat{\mathcal{T}}$

Sea $\pi \in \hat{\mathcal{T}}$.

Prim($\mathcal{T}$) y $\widehat{\mathcal{T}}$

Sea $\pi \in \hat{\mathcal{T}}$. Entonces $\pi|_K$ es nula o irreducible.

Prim($\mathcal{T}$) y $\widehat{\mathcal{T}}$

Sea $\pi \in \hat{\mathcal{T}}$. Entonces $\pi|_{\mathsf{K}}$ es nula o irreducible.

Si es irreducible se tiene que $\pi|_{\mathsf{K}} : \mathsf{K} \hookrightarrow \mathsf{B}(\mathcal{H})$ es la inclusión.

Prim($\mathcal{T}$) y $\widehat{\mathcal{T}}$

Sea $\pi \in \hat{\mathcal{T}}$. Entonces $\pi|_{\mathsf{K}}$ es nula o irreducible.

Si es irreducible se tiene que $\pi|_{\mathsf{K}} : \mathsf{K} \hookrightarrow \mathsf{B}(\mathcal{H})$ es la inclusión. Entonces $\pi : \mathcal{T} \hookrightarrow \mathsf{B}(\mathcal{H})$ es la inclusión, pues es la única extensión de $\pi|_{\mathsf{K}}$ a $\mathcal{T}$.

Prim($\mathcal{T}$) y $\widehat{\mathcal{T}}$

Sea $\pi \in \hat{\mathcal{T}}$. Entonces $\pi|_{\mathsf{K}}$ es nula o irreducible.

Si es irreducible se tiene que $\pi|_{\mathsf{K}} : \mathsf{K} \hookrightarrow \mathsf{B}(\mathcal{H})$ es la inclusión. Entonces $\pi : \mathcal{T} \hookrightarrow \mathsf{B}(\mathcal{H})$ es la inclusión, pues es la única extensión de $\pi|_{\mathsf{K}}$ a $\mathcal{T}$. En particular $0 \in \mathrm{Prim}(\mathcal{T})$, y $\overline{\{0\}} = \mathrm{Prim}(\mathcal{T})$.

Prim($\mathcal{T}$) y $\widehat{\mathcal{T}}$

Sea $\pi \in \hat{\mathcal{T}}$. Entonces $\pi|_{\mathsf{K}}$ es nula o irreducible.

Si es irreducible se tiene que $\pi|_{\mathsf{K}} : \mathsf{K} \hookrightarrow \mathsf{B}(\mathcal{H})$ es la inclusión. Entonces $\pi : \mathcal{T} \hookrightarrow \mathsf{B}(\mathcal{H})$ es la inclusión, pues es la única extensión de $\pi|_{\mathsf{K}}$ a $\mathcal{T}$. En particular $0 \in \mathrm{Prim}(\mathcal{T})$, y $\overline{\{0\}} = \mathrm{Prim}(\mathcal{T})$.

Si, en cambio, $\pi|_{\mathsf{K}}$ es nulo, π induce una representación irreducible $\bar{\pi} : \frac{\mathcal{T}}{\mathsf{K}} \to \mathsf{B}(\mathcal{H})$.

Prim($\mathcal{T}$) y $\widehat{\mathcal{T}}$

Sea $\pi \in \hat{\mathcal{T}}$. Entonces $\pi|_{\mathsf{K}}$ es nula o irreducible.

Si es irreducible se tiene que $\pi|_{\mathsf{K}} : \mathsf{K} \hookrightarrow \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es la inclusión. Entonces $\pi : \mathcal{T} \hookrightarrow \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es la inclusión, pues es la única extensión de $\pi|_{\mathsf{K}}$ a $\mathcal{T}$. En particular $0 \in \mathrm{Prim}(\mathcal{T})$, y $\overline{\{0\}} = \mathrm{Prim}(\mathcal{T})$.

Si, en cambio, $\pi|_{\mathsf{K}}$ es nulo, π induce una representación irreducible $\bar{\pi} : \frac{\mathcal{T}}{\mathsf{K}} \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$. Pero $\frac{\mathcal{T}}{\mathsf{K}} \cong C(S^1)$, así que $[\bar{\pi}] = [\delta_z]$, para algún $z \in S^1$.

Prim($\mathcal{T}$) y $\widehat{\mathcal{T}}$

Sea $\pi \in \hat{\mathcal{T}}$. Entonces $\pi|_{\mathrm{K}}$ es nula o irreducible.

Si es irreducible se tiene que $\pi|_{\mathrm{K}} : \mathrm{K} \hookrightarrow \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es la inclusión. Entonces $\pi : \mathcal{T} \hookrightarrow \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es la inclusión, pues es la única extensión de $\pi|_{\mathrm{K}}$ a $\mathcal{T}$. En particular $0 \in \mathrm{Prim}(\mathcal{T})$, y $\overline{\{0\}} = \mathrm{Prim}(\mathcal{T})$.

Si, en cambio, $\pi|_{\mathrm{K}}$ es nulo, π induce una representación irreducible $\bar{\pi} : \frac{\mathcal{T}}{\mathrm{K}} \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$. Pero $\frac{\mathcal{T}}{\mathrm{K}} \cong C(S^1)$, así que $[\bar{\pi}] = [\delta_z]$, para algún $z \in S^1$. Entonces $[\pi] = [\delta_z \circ q]$.

Prim($\mathcal{T}$) y $\widehat{\mathcal{T}}$

Sea $\pi \in \hat{\mathcal{T}}$. Entonces $\pi|_{\mathsf{K}}$ es nula o irreducible.

Si es irreducible se tiene que $\pi|_{\mathsf{K}} : \mathsf{K} \hookrightarrow \mathsf{B}(\mathcal{H})$ es la inclusión. Entonces $\pi : \mathcal{T} \hookrightarrow \mathsf{B}(\mathcal{H})$ es la inclusión, pues es la única extensión de $\pi|_{\mathsf{K}}$ a $\mathcal{T}$. En particular $0 \in \mathrm{Prim}(\mathcal{T})$, y $\overline{\{0\}} = \mathrm{Prim}(\mathcal{T})$.

Si, en cambio, $\pi|_{\mathsf{K}}$ es nulo, π induce una representación irreducible $\bar{\pi} : \frac{\mathcal{T}}{\mathsf{K}} \to \mathsf{B}(\mathcal{H})$. Pero $\frac{\mathcal{T}}{\mathsf{K}} \cong C(S^1)$, así que $[\bar{\pi}] = [\delta_z]$, para algún $z \in S^1$. Entonces $[\pi] = [\delta_z \circ q]$.

Como $\widehat{(\frac{\mathcal{T}}{\mathsf{K}})}$ es homeomorfo a $\widehat{\mathcal{T}} \setminus \mathcal{O}_{\mathsf{K}}$ y $\widehat{(\frac{\mathcal{T}}{\mathsf{K}})} = S^1 = \mathrm{Prim}(\frac{\mathcal{T}}{\mathsf{K}})$, que es homeomorfo a $\mathrm{Prim}(\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{O}_{\mathsf{K}}})$,

Prim($\mathcal{T}$) y $\widehat{\mathcal{T}}$

Sea $\pi \in \hat{\mathcal{T}}$. Entonces $\pi|_{\mathsf{K}}$ es nula o irreducible.

Si es irreducible se tiene que $\pi|_{\mathsf{K}} : \mathsf{K} \hookrightarrow \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es la inclusión. Entonces $\pi : \mathcal{T} \hookrightarrow \mathrm{B}(\mathcal{H})$ es la inclusión, pues es la única extensión de $\pi|_{\mathsf{K}}$ a $\mathcal{T}$. En particular $0 \in \mathrm{Prim}(\mathcal{T})$, y $\overline{\{0\}} = \mathrm{Prim}(\mathcal{T})$.

Si, en cambio, $\pi|_{\mathsf{K}}$ es nulo, π induce una representación irreducible $\bar{\pi} : \frac{\mathcal{T}}{\mathsf{K}} \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$. Pero $\frac{\mathcal{T}}{\mathsf{K}} \cong C(S^1)$, así que $[\bar{\pi}] = [\delta_z]$, para algún $z \in S^1$. Entonces $[\pi] = [\delta_z \circ q]$.

Como $\widehat{(\frac{\mathcal{T}}{\mathsf{K}})}$ es homeomorfo a $\widehat{\mathcal{T}} \setminus \mathcal{O}_{\mathsf{K}}$ y $\widehat{(\frac{\mathcal{T}}{\mathsf{K}})} = S^1 = \mathrm{Prim}(\frac{\mathcal{T}}{\mathsf{K}})$, que es homeomorfo a $\mathrm{Prim}(\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{O}_{\mathsf{K}}})$, entonces $\widehat{\mathcal{T}} = \mathrm{Prim}(\mathcal{T})$ es homeomorfo a $S^1 \cup \{0\} = X \subseteq \mathbb{C}$, con la topología formada por X y los abiertos relativos de S^1 con respecto a la topología usual de $\mathbb{C}$.