

1 Espacio de ideales primitivos y espectro de una C^* -álgebra

- Representaciones irreducibles de $K(\mathcal{H})$
- Espacio de ideales primitivos
- Espectro de una C^* -álgebra

2 Un par de Ejemplos

- $M_n(C(X))$
- Álgebra de Toeplitz \mathcal{T}

Representaciones irreducibles de $K(\mathcal{H})$

Lema

Dados $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, sea $\theta_{\xi, \eta} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ dada por

$$\theta_{\xi, \eta}(\zeta) = \langle \zeta, \eta \rangle \xi.$$

Entonces

- (i) Si $\xi, \eta \neq 0$, entonces $\theta_{\xi, \eta}$ es un operador de rango 1 y $\|\theta_{\xi, \eta}\| = \|\xi\| \|\eta\|$.
- (ii) Todo operador de rango $n \in \mathbb{Z}^+$ es combinación lineal de n operadores $\theta_{\xi, \eta}$.
- (iii) $K(\mathcal{H}) = \overline{\text{span}}\{\theta_{\xi, \eta} : \xi, \eta \in \mathcal{H}\}$.
- (iv) $\theta_{\xi, \eta}^* = \theta_{\eta, \xi}$, y el mapa $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow K(\mathcal{H})$ tal que $(\xi, \eta) \mapsto \theta_{\xi, \eta}$ es sesquilineal.
- (v) $T\theta_{\xi, \eta} = \theta_{T\xi, \eta}$ y $\theta_{\xi, \eta}T = \theta_{\xi, T^*\eta}$, para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, $T \in B(\mathcal{H})$.
- (vi) $\theta_{\xi, \eta}\theta_{\xi', \eta'} = \langle \xi', \eta \rangle \theta_{\xi, \eta'}$ para todos $\xi, \xi', \eta, \eta' \in \mathcal{H}$.
- (vii) $\theta_{\xi, \xi} \in K(\mathcal{H})^+$, y $\theta_{\xi, \xi} = 0$ si y sólo si $\xi = 0$.

Demostración.

(i) Usando C-S es $\|\theta_{\xi,\eta}(\zeta)\| = \|\langle \zeta, \eta \rangle \xi\| = |\langle \zeta, \eta \rangle| \|\xi\| \leq \|\zeta\| \|\eta\| \|\xi\|$.
Entonces $\|\theta_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\| \|\eta\|$. Además $\theta_{\xi,\eta}(\frac{\eta}{\|\eta\|}) = \|\xi\| \|\eta\|$. Es claro que $\text{Im}(\theta_{\xi,\eta}) = \mathbb{C}\xi$, de modo que $\theta_{\xi,\eta}$ es de rango 1.

(ii) Si $T \in B(\mathcal{H})$ tal que $\text{Im } T$ es de dimensión n , sea $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ una base ortonormal de $\text{Im } T$. Entonces, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

$$T\zeta = \sum_{j=1}^n \langle T\zeta, \eta_j \rangle \eta_j = \sum_{j=1}^n \langle \zeta, T^* \eta_j \rangle \eta_j = \left(\sum_{j=1}^n \theta_{\eta_j, T^* \eta_j} \right) \zeta.$$

(iii) Los operadores de rango finito son densos en K .

(iv) $\langle \theta_{\xi,\eta} \zeta, \zeta' \rangle = \langle \langle \zeta, \eta \rangle \xi, \zeta' \rangle = \langle \zeta, \eta \rangle \langle \xi, \zeta' \rangle = \langle \zeta, \overline{\langle \xi, \zeta' \rangle} \eta \rangle = \langle \zeta, \langle \zeta', \xi \rangle \eta \rangle = \langle \zeta, \theta_{\eta,\xi} \zeta' \rangle$. Entonces $\theta_{\eta,\xi} = \theta_{\xi,\eta}^*$.

(v) $T\theta_{\xi,\eta}(\zeta) = T(\langle \zeta, \eta \rangle \xi) = \langle \zeta, \eta \rangle T\xi = \theta_{T\xi,\eta}(\zeta)$. Luego $T\theta_{\xi,\eta} = \theta_{T\xi,\eta}$.
Tomando adjuntos: $\theta_{\eta,\xi} T^* = \theta_{\eta,T\xi}$. Entonces $\theta_{\xi,\eta} T = \theta_{\xi,T^*\eta}$.

(vi) $\theta_{\xi,\eta} \theta_{\xi',\eta'} = \theta_{\theta_{\xi,\eta}(\xi'), \eta'} = \theta_{\langle \xi', \eta \rangle \xi, \eta'} = \langle \xi', \eta \rangle \theta_{\xi,\eta'}$.

(vii) Por (iv) y (vi) es $\theta_{\xi,\xi}^* \theta_{\xi,\xi} = \theta_{\xi,\xi} \theta_{\xi,\xi} = \|\xi\|^2 \theta_{\xi,\xi}$. Notar que si $\|\xi\| = 1$, entonces $\theta_{\xi,\xi}$ es una proyección de rango 1.

Teorema

Sean \mathcal{H} un espacio de Hilbert y $K(\mathcal{H})$ la C^* -álgebra de operadores compactos en \mathcal{H} . Si $\pi : K(\mathcal{H}) \rightarrow B(\mathcal{H}_\pi)$ es una representación irreducible, entonces existe un operador unitario $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_\pi$ tal que $\pi(T) = UTU^*$ para todo $T \in K(\mathcal{H})$. En otras palabras, si $\iota : K(\mathcal{H}) \rightarrow B(\mathcal{H})$ es la inclusión, entonces $\pi \underset{U}{\sim} \iota$.

Demostración.

Sea $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\|\xi\| = 1$. Entonces $\theta_{\xi,\xi}$ es una proyección de rango 1, y por lo tanto $P := \pi(\theta_{\xi,\xi})$ es una proyección:

$$P^*P = \pi(\theta_{\xi,\xi}^* \theta_{\xi,\xi}) = \pi(\theta_{\xi,\xi}) = P.$$

Además $P \neq 0$: si fuera $P = 0$ entonces $\theta_{\xi,\xi} \in \ker(\pi)$, y por lo tanto $S\theta_{\xi,\xi}T^* = \theta_{S\xi, T\xi} \in \ker\pi, \forall S, T \in B(\mathcal{H})$. Entonces $\theta_{\eta,\zeta} \in \ker\pi$ para todo $\eta, \zeta \in \mathcal{H}$. Luego se tendría $K(\mathcal{H}) \subseteq \ker\pi$, es decir $\pi = 0$, y esto es absurdo.

Considérese ahora $x \in \mathcal{H}_\pi$ tal que $x = P(x)$ y $\|x\| = 1$. Definimos $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_\pi$ como $U(\eta) = \pi(\theta_{\eta,\xi})x$. Entonces U es lineal, y como $\pi(\theta_{\xi,\xi})x = P(x) = x$:

$$\begin{aligned} \langle U\eta, U\eta' \rangle_{\mathcal{H}_\pi} &= \langle \pi(\theta_{\eta,\xi})x, \pi(\theta_{\eta',\xi})x \rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \pi(\theta_{\xi,\eta'}\theta_{\eta,\xi})x, x \rangle_{\mathcal{H}_\pi} \\ &= \langle \eta, \eta' \rangle_{\mathcal{H}} \langle \pi(\theta_{\xi,\xi})x, x \rangle_{\mathcal{H}_\pi} = \langle \eta, \eta' \rangle_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

Entonces U es una isometría. Sea $\mathcal{H}' = \overline{\text{span}}\{\pi(\theta_{\eta,\xi})x : \eta \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{H}_\pi$. Entonces $x \in \mathcal{H}'$ porque $x = \pi(\theta_{\xi,\xi})x$. Además \mathcal{H}' es π -invariante: si $T \in K(\mathcal{H})$:

$$\pi(T)(\pi(\theta_{\eta,\xi})x) = \pi(T\theta_{\eta,\xi})x = \pi(\theta_{T\eta,\xi})x \in \mathcal{H}'.$$

Luego $\pi(T)\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}'$ para todo $T \in K(\mathcal{H})$. Pero π es irreducible y $\mathcal{H}' \neq 0$, de donde $\mathcal{H}' = \mathcal{H}_\pi$. Luego U es sobreyectivo y por lo tanto $\mathcal{H} \xrightarrow[U \cong]{U} \mathcal{H}_\pi$.

Para ver que $\pi(T) = UTU^*$ para todo $T \in K(\mathcal{H})$ basta mostrar que $\pi(\theta_{\eta,\tau})U = U\theta_{\eta,\tau}$ para todos $\eta, \tau \in \mathcal{H}$. Ahora, si $\zeta \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} U\theta_{\eta,\tau}(\zeta) &= U(\langle \zeta, \tau \rangle \eta) = \langle \zeta, \tau \rangle U(\eta) = \langle \zeta, \tau \rangle \pi(\theta_{\eta,\xi})x \\ &= \pi(\theta_{\eta,\tau}\theta_{\zeta,\xi})x = \pi(\theta_{\eta,\tau})\pi(\theta_{\zeta,\xi})x = \pi(\theta_{\eta,\tau})U(\zeta). \end{aligned}$$

Corolario

Sea $\pi : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow B(\mathbb{C}^n)$ la representación natural, es decir que si $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ y $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, entonces $\pi(A)x := y$, donde $y = (y_1, \dots, y_n)$, con $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$, $\forall i = 1, \dots, n$. Entonces toda representación irreducible de $M_n(\mathbb{C})$ es unitariamente equivalente a π , y toda representación no degenerada de $M_n(\mathbb{C})$ es unitariamente equivalente a una suma directa de copias de π .

Corolario

$K(\mathcal{H})$ es simple.

Demostración.

Sea $J \neq K(\mathcal{H})$, $J \triangleleft K(\mathcal{H})$, y sea $\pi : \frac{K(\mathcal{H})}{J} \rightarrow B(\mathcal{H}_\pi)$ una representación irreducible. Si $q : K(\mathcal{H}) \rightarrow \frac{K(\mathcal{H})}{J}$ es la proyección, entonces $\pi \circ q : K(\mathcal{H}) \rightarrow B(\mathcal{H}_\pi)$ es una representación irreducible. Entonces $\pi \circ q \underset{u}{\sim} \iota$. Luego $\ker q = 0$, y por lo tanto $J = 0$. □

Definición

Se dice que un ideal P de una C^* -álgebra A es *primitivo* si existe $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible tal que $P = \ker \pi$.

Ejemplos

- (1) Si $A = C_0(X)$ entonces $J \triangleleft A$ es primitivo si y sólo si existe $x \in X$ tal que $J = \{a \in A : a(x) = 0\}$.
- (2) El único ideal primitivo de $K(\mathcal{H})$ es el nulo.

Observación

Si $\pi \underset{U}{\sim} \pi'$, entonces existe U unitario tal que $\pi(a) = U\pi'(a)U^*$ para todo $a \in A$, y por lo tanto $a \in \ker \pi$ si y sólo si $a \in \ker \pi'$. Si $[\pi]$ es la clase de equivalencia unitaria de π , podemos definir entonces

$$\begin{aligned} \kappa : \{[\pi] : \pi \text{ es irreducible}\} &\rightarrow \{P \triangleleft A : P \text{ es primitivo}\}, \\ [\pi] &\longmapsto \ker \pi \end{aligned}$$

En general κ no es inyectivo. Un ejemplo son las álgebras UHF o de Glimm, que son simples pero tienen una cantidad no numerable de clases de representaciones irreducibles.

Proposición

Sea A una C^* -álgebra.

- (a) Si $I \triangleleft A$ entonces $I = \bigcap \{P : I \subseteq P \text{ y } P \text{ es primitivo}\}$.
- (b) Si $P \triangleleft A$ es primitivo entonces P es primo, es decir: si $I, J \triangleleft A$ son tales que $IJ \subseteq P$ entonces $I \subseteq P$ o $J \subseteq P$.

Demostración.

- (a) Es claro que $I \subseteq \bigcap \{P : I \subseteq P \text{ y } P \text{ es primitivo}\}$. Para ver la inclusión inversa consideremos $a \in A$ tal que $a \notin I$, y sea $q : A \rightarrow \frac{A}{I}$ es la proyección. Tomemos $\pi : \frac{A}{I} \rightarrow B(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible y tal que $\pi(q(a)) \neq 0$. Entonces $\pi \circ q : A \rightarrow B(\mathcal{H}_\pi)$ es irreducible, y $a \notin P := \ker(\pi \circ q)$. Luego $a \notin \bigcap \{Q : Q \text{ es primitivo y } Q \supseteq I\}$. Entonces $\bigcap \{Q : Q \text{ es primitivo y } Q \supseteq I\} \subseteq I$.
- (b) Supongamos $J \not\subseteq P$. Sea $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible, con $P = \ker \pi$. Entonces $\pi(J) \neq 0$. Luego $\overline{\text{span}} \pi(J) \mathcal{H}_\pi \neq 0$ y es $\pi(A)$ -invariante, pues $\pi(A)\pi(J) = \pi(AJ) = \pi(J)$. Entonces $\overline{\text{span}} \pi(J) \mathcal{H}_\pi = \mathcal{H}_\pi$. Por otro lado: $\pi(I)(\pi(J) \mathcal{H}_\pi) = \pi(IJ) \mathcal{H}_\pi \subseteq \pi(P) \mathcal{H}_\pi = 0$, de donde $\pi(I)(\overline{\text{span}} \pi(J) \mathcal{H}_\pi) = 0$, es decir $\pi(I) = 0$, y por lo tanto $I \subseteq P$.

Definición

Sea A una C^* -álgebra. Se llama espacio de ideales primitivos de A al espacio topológico $\text{Prim}(A)$ cuyos elementos son los ideales primitivos de A y cuya topología es la Jacobson (o hull-kernel), que se describe a continuación.

Si $F \subseteq \text{Prim}(A)$ entonces $\overline{F} = \{P \in \text{Prim}(A) : P \supseteq \cap \{Q : Q \in F\}\}$. El mapa $F \mapsto \overline{F}$ es un operador de clausura, que es el que define la topología hull-kernel. $F \subseteq \text{Prim}(A)$ es cerrado si y sólo si

$$F = \overline{F} := \{Q \in \text{Prim}(A) : Q \supseteq \cap \{P : P \in F\}\}.$$

Entonces los abiertos de $\text{Prim}(A)$ son los conjuntos \mathcal{O}_J , donde $J \triangleleft A$, y $\mathcal{O}_J := \{P \in \text{Prim}(A) : P \not\supseteq J\}$. Observar que si $I \subseteq J$, entonces $\mathcal{O}_I \subseteq \mathcal{O}_J$. Además:

- (a) $\mathcal{O}_I \cap \mathcal{O}_J = \mathcal{O}_{I \cap J}$ (porque si $P \supseteq I \cap J$, entonces $P \supseteq I$ o $P \supseteq J$ porque P es primo, luego es $\mathcal{O}_I \cap \mathcal{O}_J \subseteq \mathcal{O}_{I \cap J}$).
- (b) $\cup_i \mathcal{O}_{J_i} = \mathcal{O}_{\overline{\sum_i J_i}}$.

Definición

Se llama *espectro* de A al espacio topológico \hat{A} cuyos elementos son las clases de equivalencia unitaria de representaciones irreducibles de A , con la topología inicial correspondiente a

$$\begin{aligned}\kappa : \hat{A} &\rightarrow \text{Prim}(A), \\ [\pi] &\mapsto \ker \pi\end{aligned}$$

(o sea: los abiertos de \hat{A} son los conjuntos $\kappa^{-1}(V)$ donde V es abierto en $\text{Prim}(A)$).

Observación

Si existe $[\pi] \in \hat{A}$ tal que π es fiel, entonces $0 \in \text{Prim}(A)$ y $\overline{\{0\}} = \text{Prim}(A)$.

Proposición

Sean $a \in A$ y $r > 0$. Entonces $K := \{[\pi] \in \hat{A} : \|\pi(a)\| \geq r\}$ es compacto en \hat{A} .

Demostración.

Sean $\{F_i\} \downarrow$ una flia. de cerrados $\neq \emptyset$ en K , y $J_i := \bigcap \{\ker \pi : [\pi] \in F_i\}$, $\forall i$. Entonces sea $J_i \triangleleft A$. Si $i \leq i'$, entonces $J_i \subseteq J_{i'}$. Sea $J = \overline{\bigcup_i J_i} \triangleleft A$, y sea $\pi_i = \bigoplus \{\pi : [\pi] \in F_i\}$. Entonces $\ker \pi_i = \bigcap \{\ker \pi : [\pi] \in F_i\} = J_i$. Por otro lado $\|a + J_i\| = \|\pi_i(a)\| \geq \|\pi(a)\| \geq r$, $\forall [\pi] \in F_i$. Esto es porque

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\pi_i} & B(\mathcal{H}_i) \\ \downarrow & \nearrow \tilde{\pi}_i & \\ \frac{A}{J_i} & & \end{array}$$

Por otra parte $\|a + J\| = d(a, J) = \inf d(a, J_i) = \|a + J_i\| \geq r$. Entonces $\|a + J\| \geq r$. Luego existe $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H}_\pi)$ irreducible tal que $\|\pi(a)\| \geq r$ y $\ker \pi \supseteq J$ (basta tomar $\pi' \in \hat{A}_J$ tal que $\|\pi'(a + J)\| = \|a + J\|$ y tomar $\pi = \pi' \circ q$, donde q es la proyección). Entonces

- (i) $\pi \in K$.
- (ii) $\pi \in F_i = \overline{F_i}$, pues $\ker \pi = J \supseteq J_i = \ker \pi_i$.

Entonces $\pi \in \bigcap F_i$, luego K tiene la propiedad de intersección finita, y por lo tanto es compacto. □

Lema

Para cada $a \in A$, el mapa $\nu : \hat{A} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nu(\pi) = \|\pi(a)\|$ es semicontinua inferiormente, o sea $\nu^{-1}((-\infty, \alpha])$ es cerrado en \hat{A} (equivalentemente: $\nu^{-1}((\alpha, \infty))$ es abierto en \hat{A}) para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demostración.

Se puede suponer que $a \geq 0$ porque $\|\pi(a^*a)\| = \|\pi(a)\|^2$ para todo a . Dado $\alpha > 0$, sea $C = \{\pi \in \hat{A} : \|\pi(a)\| \leq \alpha\} = \nu^{-1}((-\infty, \alpha])$. Sea $\rho \in \overline{C}$, y supongamos que $\rho \notin C$. Como $a \geq 0$, entonces $\|\pi(a)\| \leq \alpha$ si y sólo si $\sigma(\pi(a)) \subseteq [0, \alpha]$. Como $\rho \notin C$, se tiene que $\sigma(\rho(a)) \not\subseteq [0, \alpha]$. Entonces existe $\lambda > \alpha$ tal que $\lambda \in \sigma(\rho(a))$. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(\lambda) = 1$ y $f|_{[0, \alpha]} = 0$. Entonces para todo $\pi \in C$ se tiene $\pi(f(a)) = f(\pi(a)) = 0$. Mientras tanto: $\rho(f(a)) = f(\rho(a)) \neq 0$ pues $\sigma(f(\rho(a))) \ni 1$. Pero $f(a) \in \bigcap \{\ker \pi : \pi \in C\} \subseteq \ker \rho$ pues $\rho \in \overline{C}$. Sin embargo $f(a) \notin \ker \rho$. Entonces $C = \overline{C}$. □

Teorema

$\text{Prim}(A)$ y \hat{A} son localmente compactos, y son compactos si A tiene unidad.

Demostración.

Si A tiene unidad, es $\hat{A} = \{[\pi] \in \hat{A} : \|\pi(1)\| \geq 1\}$, que es compacto. Como $\kappa : \hat{A} \rightarrow \text{Prim}(A)$ es continua y sobreyectiva, $\text{Prim}(A)$ también es compacto. Supongamos ahora que A no tiene unidad. Veamos que \hat{A} es localmente compacto. Sean $\pi \in \hat{A}$ y $\hat{\mathcal{O}}_I = \kappa^{-1}(\mathcal{O}_I)$ un abierto de \hat{A} que contiene a π , es decir $\pi|_I \neq 0$. Sea $a \in I$ tal que $\pi(a) \neq 0$, y sea $r < \|\pi(a)\|$. Sean $V = \{\rho \in \hat{A} : \|\rho(a)\| > r\} \ni \pi$ y $C = \{\rho \in \hat{A} : \|\rho(a)\| \geq r\} \supseteq V \ni \pi$. Entonces:

- C es compacto.
- V es abierto (por la semicontinuidad de V).
- $\pi \in V$.
- $C \subseteq \mathcal{O}_I = \{\tau \in \hat{A} : \tau|_I \neq 0\}$.

Entonces C es un entorno compacto de π contenido en $\hat{\mathcal{O}}_I$. □

Teorema

Sean A una C^* -álgebra, $J \triangleleft A$ y $q : A \rightarrow \frac{A}{J}$ la proyección. Entonces los siguientes mapas son homeomorfismos.

- (a) $\mathcal{O}_J \xrightarrow{\alpha} \text{Prim}(J)$ dado por $\alpha(P) = P \cap J$.
- (b) $\widehat{\mathcal{O}}_J \xrightarrow{\beta} \widehat{J}$ dado por $\beta(\pi) = \pi|_J$.
- (c) $\text{Prim}(\frac{A}{J}) \xrightarrow{\gamma} \text{Prim}(A) \setminus \mathcal{O}_J$ dado por $\gamma(P) = q^{-1}(P)$.
- (d) $\widehat{\frac{A}{J}} \xrightarrow{\delta} \widehat{A} \setminus \widehat{\mathcal{O}}_J$ dado por $\delta(\pi) = \pi \circ q$.

Lema

Sean A una C^* -álgebra y J un $*$ -ideal de A , no necesariamente cerrado. Si $\pi : J \rightarrow B(\mathcal{H})$ es una representación no degenerada, entonces π admite una única extensión a una representación $\tilde{\pi} : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ (en particular π es continua). Además π es irreducible si y sólo si $\tilde{\pi}$ lo es.

Demostración.

Si $\tilde{\pi}$ existe necesariamente debe ser, para todo $a \in A$, $x \in J$, $\xi \in \mathcal{H}$:
 $\tilde{\pi}(a)\pi(x)\xi = \tilde{\pi}(ax)\xi = \pi(ax)\xi$. Como $\overline{\text{span}}\{\pi(x)\xi : x \in J, \xi \in \mathcal{H}\} = \mathcal{H}$, si $\tilde{\pi}$ existe es única. Para ver que existe, supongamos que $\sum_{i=1}^n \pi(x_i)\xi_i = 0$.
Sea (u_λ) una unidad aproximada de J . Entonces $\forall a \in A$:

$$\sum_{i=1}^n \pi(ax_i)\xi_i = \lim_{\lambda} \pi(au_\lambda) \sum_{i=1}^n \pi(x_i)\xi_i = 0.$$

Se puede definir entonces $\tilde{\pi}(a) : \text{span}\pi(J)\mathcal{H} \rightarrow \pi(J)\mathcal{H}$ como

$$\tilde{\pi}(a) \left(\sum_{j=1}^k \pi(y_j)\eta_j \right) := \sum_{j=1}^k \pi(ay_j)\eta_j.$$

Usando nuevamente unidades aproximadas se ve que $\tilde{\pi}(a)$ es acotada y por lo tanto se extiende por continuidad a $\tilde{\pi}(a) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Entonces el mapa $a \mapsto \tilde{\pi}(a)$ es una representación que extiende a π .

Ahora obsérvese que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ es π -invariante si y sólo si \mathcal{K} es $\tilde{\pi}$ -invariante. Entonces π es irreducible si y sólo si $\tilde{\pi}$ lo es. □

Teorema

Sea A una C^* -subálgebra de $K(\mathcal{H})$, y supongamos que la inclusión $A \hookrightarrow B(\mathcal{H})$ es irreducible. Entonces $A = K(\mathcal{H})$.

Teorema

Sea $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ una representación irreducible. Si $\pi(A) \cap K(\mathcal{H}) \neq 0$, entonces $K(\mathcal{H}) \subseteq \pi(A)$. En este caso, si $I = \ker \pi$, y $\rho : A \rightarrow B(\mathcal{H}')$ es otra representación irreducible tal que $\ker \rho = I$, entonces π y ρ son unitariamente equivalentes.

Demostración.

Sea $J := \pi^{-1}(K(\mathcal{H}))$. Entonces $J \triangleleft A$, $J \neq I$, y $\pi(J)$ es una C^* -subálgebra de $K(\mathcal{H})$. Como π es irreducible y $\pi|_J \neq 0$, entonces $\pi|_J$ es irreducible, y entonces $\pi(J) = K(\mathcal{H})$ por el teorema anterior. En cuanto a la segunda afirmación basta notar que

$$\rho(A) \cong A/I \cong \pi(A) \cong K(\mathcal{H}),$$

y que esta última C^* -álgebra tiene una única representación irreducible a menos de equivalencia unitaria. □

Definición

Sea A una C^* -álgebra. Se dice que A es *CCR* o *liminal* si para toda representación irreducible π de A se tiene $\pi(A) = K(\mathcal{H}_\pi)$. Se dice que A es *GCR* o *post-liminal* si $\pi(A) = K(\mathcal{H}_\pi)$. En otro caso se dice que A es *NGR* o *anti-liminal*.

Teorema

Sea $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ una representación irreducible, y sea $I = \ker \pi$. Si $\pi(A) \cap K(\mathcal{H}) = 0$, entonces existe una cantidad no numerable de clases de equivalencia unitaria de representaciones irreducibles de A con núcleo I .

Si A es unital, simple y de dimensión infinita, entonces $\text{Prim}(A) = 0$ y A es NGR. Naimark conjeturó que si \hat{A} tiene sólo un punto, entonces $A \cong K(\mathcal{H})$. Esto es cierto si A es separable, pero en general no lo es si A no es separable.

Ejemplos

A continuación calculamos el espectro y el espacio de ideales primitivos en un par de ejemplos.

(1) $M_n(C(X))$, X compacto y de Hausdorff.

Sea $A = C(X, M_n)$. Mostraremos que el mapa $X \rightarrow \hat{A}$ tal que $x \mapsto \delta_x : \delta_x(a) = a(x)$ es un homeomorfismo. Sea $\pi \in \hat{A}$. Como $\pi(C(X)Id_n) \subseteq \pi(A)' = \mathbb{C}Id$, existe un único $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\pi(f) = \lambda Id$, para todo $f \in C(X)$. Veamos que $\ker \delta_x \subseteq \ker \pi$. Sean $a \in \ker \delta_x$, $\varepsilon > 0$, y V_x un entorno de x tal que $\|a(y)\| < \varepsilon$ para todo $y \in V_x$; si $f \in C(X)$ es tal que $f(x) = 0$ y $f|_{X \setminus V_x} = 1$, $0 \leq f \leq 1$, entonces:

$$\|a - fa\| = \sup_{y \in V_x} \|(a - fa)(y)\| \leq \sup_{y \in V_x} \|(1 - f)(a)(y)\| < \varepsilon.$$

Se deduce que $\pi(a) = 0$, porque al ser $f(x) = 0$:

$$\|\pi(a)\| = \|\pi(a) - \pi(f)\pi(a)\| = \|\pi(a) - \pi(fa)\| \leq \|a - fa\| < \varepsilon.$$

Luego se tiene el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc}
 & A & \xrightarrow{\pi} B(\mathcal{H}_\pi) \\
 \delta_x \swarrow & \downarrow q & \nearrow \bar{\pi} \\
 M_n = \frac{A}{\ker \delta_x} & \xrightarrow{j} & \frac{A}{\ker \pi}
 \end{array}$$

Entonces $\bar{\pi} \circ j \circ \delta_x = \bar{\pi} \circ q = \pi$. Luego $\bar{\pi} \circ j \circ \delta_x$ es irreducible, y por lo tanto $\bar{\pi} \circ j$ también es irreducible. Entonces existe $U : \mathcal{H}_\pi \rightarrow \mathbb{C}^n$ unitaria tal que

$$\pi(a) = \bar{\pi} \circ j(a + \ker \delta_x) = U(a + \ker \delta_x)U^*.$$

Entonces $U\delta_x(a)U^* = \pi(a)$ para todo $a \in A$. Luego es $[\pi] = [\delta_x]$.

Ejercicio. Completar los detalles faltantes para ver que $x \mapsto \delta_x$ es un homeomorfismo.

(2) Álgebra de Toeplitz \mathcal{T} .

Sea $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$, y sea $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n \geq 0}$ la base ortonormal canónica de $\ell^2(\mathbb{N})$, es decir: $e_n(k) = \delta_{n,k}$, $\forall n, k \geq 0$. Sea $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ el shift unilateral, es decir

$$S(x_0, x_1, \dots) = (0, x_0, x_1, \dots).$$

En términos de la base canónica es $S(e_n) = e_{n+1}$ para todo $n \geq 0$.

Definición

El álgebra de Toeplitz es $\mathcal{T} := C^*(S) \subseteq B(\ell^2(\mathbb{N}))$.

Teorema

Sea K la C^* -álgebra de los operadores compactos en ℓ^2 . Entonces $K \triangleleft \mathcal{T}$ y $\mathcal{T}/K \cong C(S^1)$.

Demostración.

La primera afirmación equivale a probar que $K \subseteq \mathcal{T}$, lo cual hacemos a través de los siguientes pasos.

- (a) Un simple cálculo muestra que $S^*(x_0, x_1, \dots) = (x_1, x_2, \dots)$.
- (b) También es directo verificar que $S^*S = Id$, $SS^* = P_{\overline{\text{span}\{e_n\}_{n \geq 1}}}$.
- (c) Sea $P := Id - SS^* = P_{\mathbb{C}e_0}$. Si $T \in B(\ell^2(\mathbb{N}))$, entonces T tiene asociada una matriz $[T]$ (infinita) en la base \mathcal{B} : $[T]$ está dada por $[T]_{m,n} = \langle Te_n, e_m \rangle$. En particular, si $\theta_{m,n} := \theta_{e_m, e_n}$, se tiene:

$$[\theta_{m,n}] = \begin{array}{c} n \\ \downarrow \\ \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \leftarrow m \end{array}$$

(d) $S^n P S^{*m} = \theta_{n,m}$: se tiene:

$$S^n P S^{*m}(e_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < m, \\ S^n P(e_{k-m}) & \text{si } k \geq m, \end{cases}$$

$$S^n P(e_{k-m}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > m, \\ S^n(e_0) = e_n & \text{si } k = m. \end{cases}$$

Entonces $S^n P S^{*m}(e_k) = \delta_{k,m} e_n = \langle e_k, e_m \rangle e_n = \theta_{n,m}(e_k)$, $\forall k$. Luego $S^n P S^{*m} = \theta_{n,m}$.

(e) Todo operador $T \in B(\mathcal{H})$ tal que $[T]$ es finita en la base \mathcal{B} está en \mathcal{T} , pues por (d) es:

$$\theta_{n,m} = S^n P S^{*m} = S^n (Id - S S^*) S^{*m} \in \mathcal{T}.$$

Como dichos operadores forman un subespacio denso de K , se deduce que $K \subseteq \mathcal{T}$.

Sean $C(\mathcal{H}) := \frac{B(\mathcal{H})}{K(\mathcal{H})}$ el *álgebra de Calkin* y $\pi : B(\mathcal{H}) \rightarrow C(\mathcal{H})$ la proyección. Si $U := \pi(S)$, entonces $\frac{\mathcal{T}}{K} = \pi(\mathcal{T}) = C^*(U)$, porque $\mathcal{T} = C^*(S)$. Observar que U es un elemento unitario:

$$U^*U = \pi(S)^*\pi(S) = \pi(S^*S) = \pi(Id) = 1.$$

$$UU^* = \pi(S)\pi(S)^* = \pi(SS^*) = \pi(SS^* + P) - \pi(P) = \pi(Id) = 1,$$

pues $\pi(P) = 0$ ya que P es un operador compacto. En consecuencia

$$\pi(\mathcal{T}) = C^*(U) \cong C(\sigma(U)).$$

Para terminar la demostración veamos que $\sigma(U) = S^1$. Como U es unitario, se tiene que $\sigma(U) \subseteq S^1$. Dado $z \in S^1$, sea $V_z \in B(\ell^2(\mathbb{N}))$ dado por $V_z(e_n) = z^n e_n$ para todo $n \geq 0$. El operador adjunto de V_z es $V_{\bar{z}}$, que también es su inverso. Por lo tanto V_z es unitario. Entonces el mapa $\alpha_z : B(\mathcal{H}) \rightarrow B(\mathcal{H})$ dado por $\alpha_z(T) = V_z T V_z^*$ es un automorfismo de $B(\mathcal{H})$. Como además $\alpha_z(K) = K$, se tiene que α_z pasa al cociente, induciendo un automorfismo $\tilde{\alpha}_z : C(\mathcal{H}) \rightarrow C(\mathcal{H})$. Por otro lado:

$$\begin{aligned}\alpha_z(S)|_{e_n} &= V_z S V_{\bar{z}}(e_n) = V_z S(\bar{z}^n e_n) = \bar{z}^n V_z(e_{n+1}) \\ &= \bar{z}^n z^{n+1} e_{n+1} = z e_{n+1} = z S|_{e_n}.\end{aligned}$$

Como $\{e_n\}$ es una base de ℓ^2 , el cálculo anterior implica que $\alpha_z(S) = zS$ (y por lo tanto $\alpha_z(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$), y entonces se tiene también que $\tilde{\alpha}_z(U) = zU$. Como $\tilde{\alpha}_z$ es un automorfismo de $C(\mathcal{H})$, se tiene

$$\sigma(U) = \sigma(\tilde{\alpha}_z(U)) = \sigma(zU) = z\sigma(U).$$

Como $z \in S^1$ es arbitrario, $\sigma(U)$ resulta ser invariante por rotaciones, y como no es vacío, se concluye que $\sigma(U) = S^1$.

Observación.

De acuerdo al resultado anterior tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{\pi} C^*(U) = C(S^1) \rightarrow 0. \quad (1)$$

¿Esta sucesión exacta se escinde?, es decir, ¿existe un homomorfismo de C^* -álgebras $s : C(S^1) \rightarrow \mathcal{T}$ tal que $\pi \circ s = \text{id}_{C(S^1)}$?

Recuérdese que un operador $T \in B(\mathcal{H})$ es llamado operador de *Fredholm* si $\ker T$ y $\ker T^*$ son de dimensión finita; en ese caso se define el índice de Fredholm de T como

$$\text{ind } T := \dim(\ker T) - \dim(\ker T^*).$$

El índice es invariante por perturbaciones compactas. Más precisamente, si T es de Fredholm y K es un operador compacto, entonces $T + K$ es de Fredholm, e $\text{ind}(T + K) = \text{ind}(T)$.

Supongamos que la sucesión exacta (1) se escinde, y sea s una sección de π . Entonces $s(U)$ debe ser unitario, y

$$\pi(S - s(U)) = \pi(S) - \pi s(U) = U - U = 0,$$

de modo que $S - s(U) \in K$. Siendo unitario, el operador $s(U)$ es de Fredholm, con $\text{ind } s(U) = 0$. Por otro lado, S es de Fredholm, y además

$$\text{ind}(S) = \dim(\ker S) - \dim(\ker S^*) = 0 - 1 = -1.$$

Como $S - s(U) \in K$, debería ser $\text{ind}(S) = \text{ind}(s(U))$, es decir: $0 = -1$. El absurdo permite concluir que no puede existir un tal homomorfismo s .

Un hecho fundamental acerca del álgebra de Toeplitz es el siguiente:

Teorema (Coburn, 1967)

Supongamos que $T \in B(\mathcal{H})$ es una isometría en el espacio de Hilbert \mathcal{H} . Entonces existe un único homomorfismo de C^ -álgebras $\mathcal{T} \rightarrow C^*(T)$ tal que $S \mapsto T$. Este homomorfismo es sobreyectivo, y es un isomorfismo si y sólo si T no es unitario.*

Operadores de Toeplitz. Consideremos la representación unital $M : C(S^1) \rightarrow B(L^2(S^1))$ tal que $f \mapsto M_f$. Como es un homomorfismo inyectivo de C^* -álgebras, M es una isometría.

El **espacio de Hardy** es $\mathcal{H}^2 := \overline{\text{span}}\{e_n : n \geq 0\}$, donde $e_n : S^1 \rightarrow S^1$ está definido como $e_n(z) = z^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $z \in S^1$. La familia $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(S^1)$:

$$\langle e_n, e_m \rangle = \int_{S^1} z^n \bar{z}^m dz = \int_{S^1} z^{n-m} dz = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{si } n \neq m, \end{cases}$$

así que $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es ortonormal.

Por otro lado, por el teorema de Stone-Weierstrass, o por el teorema de Féjer, $\text{span}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $C(S^1)$ en $\|\cdot\|_\infty$. Entonces $\text{span}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es $\|\cdot\|_2$ -denso en $C(S^1)$ y como $\overline{C(S^1)}^{\|\cdot\|_2} = L^2(S^1)$, entonces $\overline{\text{span}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}}^{\|\cdot\|_2} = L^2(S^1)$. Luego $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de $L^2(S^1)$. Y $\{e_n : n \geq 0\}$ es una base ortonormal del espacio de Hardy.

La transformada de Fourier $\mathcal{F} : L^2(S^1) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$, tal que $L^2(S^1) \ni \xi \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{\xi} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, donde $\hat{\xi}(n) := \langle \xi, e_n \rangle$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ es un isomorfismo, bajo el cual el espacio de Hardy se transforma en $\ell^2(\mathbb{N})$.

Definición

El operador de Toeplitz de símbolo $f \in C(S^1)$ es $T_f : \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathcal{H}^2$ tal que

$$T_f = P_{\mathcal{H}^2}^{L^2} M_f|_{\mathcal{H}^2}.$$

En otras palabras, el operador de Toeplitz de símbolo f se obtiene comprimiendo el operador de multiplicación M_f al espacio de Hardy.

Observar que $\|T_f\| = \|PM_f|_{\mathcal{H}^2}\| \leq \|M_f\| = \|f\|_\infty$.

Algunos ejemplos de operadores de Toeplitz.

Denotemos por P a la proyección ortogonal $P_{\mathcal{H}^2}^{L^2}$.

- (1) Calculemos T_{e_n} para $n \geq 0$: $T_{e_n} = PM_{e_n}|_{\mathcal{H}^2}$. Si $\xi \in \mathcal{H}^2$, entonces $\xi = \sum_{k \geq 0} \langle \xi, e_k \rangle e_k$. Entonces $M_{e_n} \xi = \sum_{k \geq 0} \langle \xi, e_k \rangle e_{n+k}$. Luego $T_{e_n}(e_k) = e_{n+k}$, para todo $k \geq 0$. Por lo tanto $T_{e_n} = \mathcal{F}^{-1} S^n \mathcal{F}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^2 & \xrightarrow{T_{e_n}} & \mathcal{H}^2 \\ \mathcal{F} \downarrow \cong & & \cong \downarrow \mathcal{F} \\ \ell^2(\mathbb{N}) & \xrightarrow{S^n} & \ell^2(\mathbb{N}) \end{array}$$

- (2) T_{e_n} , $n < 0$: $T_{e_n}(e_k) = P(e_{n+k}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < -n, \\ e_{n+k} & \text{si } k \geq -n. \end{cases}$ Por lo

tanto $T_{e_n} = \mathcal{F}^{-1} S^{*n} \mathcal{F}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^2 & \xrightarrow{T_{e_n}} & \mathcal{H}^2 \\ \mathcal{F} \downarrow \cong & & \cong \downarrow \mathcal{F} \\ \ell^2(\mathbb{N}) & \xrightarrow{S^{*n}} & \ell^2(\mathbb{N}) \end{array}$$

(3) Si $f = \sum_{j=-N}^N a_j e_j$ con $N \geq 0$, entonces $T_f = \sum_{j=-N}^N a_j T_{e_j}$.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{H}^2 & \xrightarrow{T_f} & \mathcal{H}^2 \\
 \mathcal{F} \downarrow \cong & & \cong \downarrow \mathcal{F} \\
 \ell^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{N}) \\
 \sum_{j=-N}^{-1} a_j S^{*-j} + \sum_{j=0}^N a_j S^j \in \mathcal{T} & &
 \end{array}$$

Corolario

La C^* -álgebra $C^*(\langle T_f : f \in C(S^1) \rangle)$ generada por los operadores de Toeplitz de símbolo continuo en $B(\mathcal{H}^2)$ es isomorfa a la C^* -álgebra $\mathcal{T} = C^*(S)$ generada por el shift unilateral en $B(\ell^2(\mathbb{N}))$.

Sea $s : C(S^1) \rightarrow \mathcal{T}$ dado por $s(f) = T_f$. Entonces s es un operador acotado. Además $\pi \circ s = \text{id}_{C(S^1)}$ donde π es la proyección de \mathcal{T} en $C(S^1)$. En efecto:

- Si $k \geq 0$: $C(S^1) \ni e_k \xrightarrow{s} S^k \xrightarrow{\pi} U^k = e_k$.
- Si $k < 0$: $C(S^1) \ni e_k \xrightarrow{s} S^{*-k} \xrightarrow{\pi} U^{*-k} = U^k = e_k$.

Entonces $e_k \xrightarrow{\pi s} e_k, \forall k \in \mathbb{Z}$, y como los e_k generan $C(S^1)$, se tiene que $\pi s = \text{id}_{C(S^1)}$. Luego la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{s} \mathcal{T} \xrightarrow{\pi} C(S^1) \rightarrow 0$$

se escinde en la categoría de espacios de Banach.

Observación

El mapa $s|_{A(\mathbb{D})} : A(\mathbb{D}) \rightarrow \mathcal{T}$ es un homomorfismo de álgebras, donde $A(\mathbb{D})$ es el álgebra del disco, el cual es un subespacio de $C(S^1)$.

Sea $\pi \in \widehat{\mathcal{T}}$. Entonces $\pi|_{\mathbb{K}}$ es nula o irreducible.

Si es irreducible se tiene que $\pi|_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H})$ es la inclusión. Entonces $\pi : \mathcal{T} \hookrightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H})$ es la inclusión, pues es la única extensión de $\pi|_{\mathbb{K}}$ a \mathcal{T} . En particular $0 \in \text{Prim}(\mathcal{T})$, y $\overline{\{0\}} = \text{Prim}(\mathcal{T})$.

Si, en cambio, $\pi|_{\mathbb{K}}$ es nulo, π induce una representación irreducible $\bar{\pi} : \frac{\mathcal{T}}{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H})$. Pero $\frac{\mathcal{T}}{\mathbb{K}} \cong C(S^1)$, así que $[\bar{\pi}] = [\delta_z]$, para algún $z \in S^1$. Entonces $[\pi] = [\delta_z \circ q]$.

Como $\widehat{\left(\frac{\mathcal{T}}{\mathbb{K}}\right)}$ es homeomorfo a $\widehat{\mathcal{T}} \setminus \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ y $\widehat{\left(\frac{\mathcal{T}}{\mathbb{K}}\right)} = S^1 = \text{Prim}\left(\frac{\mathcal{T}}{\mathbb{K}}\right)$, que es homeomorfo a $\text{Prim}\left(\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}\right)$, entonces $\widehat{\mathcal{T}} = \text{Prim}(\mathcal{T})$ es homeomorfo a $S^1 \cup \{0\} = X \subseteq \mathbb{C}$, con la topología formada por X y los abiertos relativos de S^1 con respecto a la topología usual de \mathbb{C} .