1. Estados puros y representaciones irreducibles
    - Comparación de funcionales positivas.
    - Estados puros y representaciones irreducibles.
    - Repaso sobre puntos extremales y el teorema de Krein-Milman.
    - Quasi-estados y sus puntos extremales.
    - Representación universal atómica.

Estados puros y representaciones irreducibles

Estados puros y representaciones irreducibles

A continuación veremos cómo son los estados de A cuya GNS es una representación irreducible.

Estados puros y representaciones irreducibles

A continuación veremos cómo son los estados de A cuya GNS es una representación irreducible.
Supongamos que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$,

Estados puros y representaciones irreducibles

A continuación veremos cómo son los estados de A cuya GNS es una representación irreducible.
Supongamos que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$, con $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$.

Estados puros y representaciones irreducibles

A continuación veremos cómo son los estados de A cuya GNS es una representación irreducible.
Supongamos que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$, con $\pi : A \to B(\mathcal{H})$. Si π es reducible, existe $\mathcal{K} \leq \mathcal{H}$, $0 \neq \mathcal{K} \neq \mathcal{H}$,

Estados puros y representaciones irreducibles

A continuación veremos cómo son los estados de A cuya GNS es una representación irreducible.
Supongamos que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$, con $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$. Si π es reducible, existe $\mathcal{K} \leq \mathcal{H}$, $0 \neq \mathcal{K} \neq \mathcal{H}$, tal que $\pi(a)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$ para todo $a \in A$.

Estados puros y representaciones irreducibles

A continuación veremos cómo son los estados de A cuya GNS es una representación irreducible.
Supongamos que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$, con $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$. Si π es reducible, existe $\mathcal{K} \leq \mathcal{H}$, $0 \neq \mathcal{K} \neq \mathcal{H}$, tal que $\pi(a)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$ para todo $a \in A$. Sea $\rho := \pi^{(\mathcal{K})}$ la subrepresentación de π correspondiente a $\mathcal{K}$.

Estados puros y representaciones irreducibles

A continuación veremos cómo son los estados de A cuya GNS es una representación irreducible.
Supongamos que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$, con $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$. Si π es reducible, existe $\mathcal{K} \leq \mathcal{H}$, $0 \neq \mathcal{K} \neq \mathcal{H}$, tal que $\pi(a)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$ para todo $a \in A$. Sea $\rho := \pi^{(\mathcal{K})}$ la subrepresentación de π correspondiente a $\mathcal{K}$. Sea $\eta = \mathrm{P}\xi$.

Estados puros y representaciones irreducibles

A continuación veremos cómo son los estados de A cuya GNS es una representación irreducible.
Supongamos que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi\rangle$, con $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$. Si π es reducible, existe $\mathcal{K} \leq \mathcal{H}$, $0 \neq \mathcal{K} \neq \mathcal{H}$, tal que $\pi(a)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$ para todo $a \in A$. Sea $\rho := \pi^{(\mathcal{K})}$ la subrepresentación de π correspondiente a $\mathcal{K}$. Sea $\eta = \mathrm{P}\xi$.
Entonces $\psi : A \to \mathbb{C}$ dada por $\psi(a) = \langle \rho(a)\eta, \eta\rangle$ es una funcional positiva,

Estados puros y representaciones irreducibles

A continuación veremos cómo son los estados de A cuya GNS es una representación irreducible.
Supongamos que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$, con $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$. Si π es reducible, existe $\mathcal{K} \leq \mathcal{H}$, $0 \neq \mathcal{K} \neq \mathcal{H}$, tal que $\pi(a)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$ para todo $a \in A$. Sea $\rho := \pi^{(\mathcal{K})}$ la subrepresentación de π correspondiente a $\mathcal{K}$. Sea $\eta = \mathrm{P}\xi$.
Entonces $\psi : A \to \mathbb{C}$ dada por $\psi(a) = \langle \rho(a)\eta, \eta \rangle$ es una funcional positiva, que satisface $\psi \leq \varphi$.

Estados puros y representaciones irreducibles

A continuación veremos cómo son los estados de A cuya GNS es una representación irreducible.
Supongamos que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$, con $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$. Si π es reducible, existe $\mathcal{K} \leq \mathcal{H}$, $0 \neq \mathcal{K} \neq \mathcal{H}$, tal que $\pi(a)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$ para todo $a \in A$. Sea $\rho := \pi^{(\mathcal{K})}$ la subrepresentación de π correspondiente a $\mathcal{K}$. Sea $\eta = \mathrm{P}\xi$.
Entonces $\psi : A \to \mathbb{C}$ dada por $\psi(a) = \langle \rho(a)\eta, \eta \rangle$ es una funcional positiva, que satisface $\psi \leq \varphi$.

Proposición

$T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$ si y sólo si $\langle T\xi, \xi \rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$ ($\mathcal{H}$ complejo).

Estados puros y representaciones irreducibles

A continuación veremos cómo son los estados de A cuya GNS es una representación irreducible.
Supongamos que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$, con $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$. Si π es reducible, existe $\mathcal{K} \leq \mathcal{H}$, $0 \neq \mathcal{K} \neq \mathcal{H}$, tal que $\pi(a)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$ para todo $a \in A$. Sea $\rho := \pi^{(\mathcal{K})}$ la subrepresentación de π correspondiente a $\mathcal{K}$. Sea $\eta = \mathrm{P}\xi$.
Entonces $\psi : A \to \mathbb{C}$ dada por $\psi(a) = \langle \rho(a)\eta, \eta \rangle$ es una funcional positiva, que satisface $\psi \leq \varphi$.

Proposición

$T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$ si y sólo si $\langle T\xi, \xi \rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$ ($\mathcal{H}$ complejo).

Demostración.

$(\Rightarrow)$ Como $T = S^*S$ para algún $S \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$,

Estados puros y representaciones irreducibles

A continuación veremos cómo son los estados de A cuya GNS es una representación irreducible.
Supongamos que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$, con $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$. Si π es reducible, existe $\mathcal{K} \leq \mathcal{H}$, $0 \neq \mathcal{K} \neq \mathcal{H}$, tal que $\pi(a)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$ para todo $a \in A$. Sea $\rho := \pi^{(\mathcal{K})}$ la subrepresentación de π correspondiente a $\mathcal{K}$. Sea $\eta = \mathrm{P}\xi$.
Entonces $\psi : A \to \mathbb{C}$ dada por $\psi(a) = \langle \rho(a)\eta, \eta \rangle$ es una funcional positiva, que satisface $\psi \leq \varphi$.

Proposición

$T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$ si y sólo si $\langle T\xi, \xi \rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$ ($\mathcal{H}$ complejo).

Demostración.

$(\Rightarrow)$ Como $T = S^*S$ para algún $S \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$,

Estados puros y representaciones irreducibles

A continuación veremos cómo son los estados de A cuya GNS es una representación irreducible.
Supongamos que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi\rangle$, con $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$. Si π es reducible, existe $\mathcal{K} \leq \mathcal{H}$, $0 \neq \mathcal{K} \neq \mathcal{H}$, tal que $\pi(a)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$ para todo $a \in A$. Sea $\rho := \pi^{(\mathcal{K})}$ la subrepresentación de π correspondiente a $\mathcal{K}$. Sea $\eta = \mathrm{P}\xi$. Entonces $\psi : A \to \mathbb{C}$ dada por $\psi(a) = \langle \rho(a)\eta, \eta\rangle$ es una funcional positiva, que satisface $\psi \leq \varphi$.

Proposición

$T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$ si y sólo si $\langle T\xi, \xi\rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$ ($\mathcal{H}$ complejo).

Demostración.

$(\Rightarrow)$ Como $T = S^*S$ para algún $S \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$, si $\xi \in \mathcal{H}$ se tiene:

Estados puros y representaciones irreducibles

A continuación veremos cómo son los estados de A cuya GNS es una representación irreducible.
Supongamos que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$, con $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$. Si π es reducible, existe $\mathcal{K} \leq \mathcal{H}$, $0 \neq \mathcal{K} \neq \mathcal{H}$, tal que $\pi(a)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$ para todo $a \in A$. Sea $\rho := \pi^{(\mathcal{K})}$ la subrepresentación de π correspondiente a $\mathcal{K}$. Sea $\eta = \mathrm{P}\xi$.
Entonces $\psi : A \to \mathbb{C}$ dada por $\psi(a) = \langle \rho(a)\eta, \eta \rangle$ es una funcional positiva, que satisface $\psi \leq \varphi$.

Proposición

$T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$ si y sólo si $\langle T\xi, \xi \rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$ ($\mathcal{H}$ complejo).

Demostración.

($\Rightarrow$) Como $T = S^*S$ para algún $S \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$, si $\xi \in \mathcal{H}$ se tiene:

$$\langle T\xi, \xi \rangle = \langle S^*S\xi, \xi \rangle$$

Estados puros y representaciones irreducibles

A continuación veremos cómo son los estados de A cuya GNS es una representación irreducible.
Supongamos que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$, con $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$. Si π es reducible, existe $\mathcal{K} \leq \mathcal{H}$, $0 \neq \mathcal{K} \neq \mathcal{H}$, tal que $\pi(a)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$ para todo $a \in A$. Sea $\rho := \pi^{(\mathcal{K})}$ la subrepresentación de π correspondiente a $\mathcal{K}$. Sea $\eta = \mathrm{P}\xi$.
Entonces $\psi : A \to \mathbb{C}$ dada por $\psi(a) = \langle \rho(a)\eta, \eta \rangle$ es una funcional positiva, que satisface $\psi \leq \varphi$.

Proposición

$T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$ si y sólo si $\langle T\xi, \xi \rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$ ($\mathcal{H}$ complejo).

Demostración.

$(\Rightarrow)$ Como $T = S^*S$ para algún $S \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$, si $\xi \in \mathcal{H}$ se tiene:

$$\langle T\xi, \xi \rangle = \langle S^*S\xi, \xi \rangle = \langle S\xi, S\xi \rangle$$

Estados puros y representaciones irreducibles

A continuación veremos cómo son los estados de A cuya GNS es una representación irreducible.
Supongamos que $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$, con $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$. Si π es reducible, existe $\mathcal{K} \leq \mathcal{H}$, $0 \neq \mathcal{K} \neq \mathcal{H}$, tal que $\pi(a)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$ para todo $a \in A$. Sea $\rho := \pi^{(\mathcal{K})}$ la subrepresentación de π correspondiente a $\mathcal{K}$. Sea $\eta = \mathrm{P}\xi$.
Entonces $\psi : A \to \mathbb{C}$ dada por $\psi(a) = \langle \rho(a)\eta, \eta \rangle$ es una funcional positiva, que satisface $\psi \leq \varphi$.

Proposición

$T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$ *si y sólo si* $\langle T\xi, \xi \rangle \geq 0$ *para todo* $\xi \in \mathcal{H}$ *($\mathcal{H}$ complejo).*

Demostración.

$(\Rightarrow)$ Como $T = S^*S$ para algún $S \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$, si $\xi \in \mathcal{H}$ se tiene:

$$\langle T\xi, \xi \rangle = \langle S^*S\xi, \xi \rangle = \langle S\xi, S\xi \rangle = \|S\xi\|^2 \geq 0$$

Continuación.

($\Leftarrow$) Sea $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\langle T\xi, \xi\rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$.

Continuación.

($\Leftarrow$) Sea $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\langle T\xi, \xi\rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$.

Continuación.

($\Leftarrow$) Sea $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\langle T\xi, \xi\rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Entonces de la identidad de polarización:

Continuación.

($\Leftarrow$) Sea $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\langle T\xi, \xi\rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Entonces de la identidad de polarización:

$$\langle T\xi, \eta\rangle = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} i^j \langle T(\xi + i^j\eta), \xi + i^j\eta\rangle$$

Continuación.

($\Leftarrow$) Sea $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\langle T\xi, \xi\rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Entonces de la identidad de polarización:

$$\langle T\xi, \eta\rangle = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} i^j \langle T(\xi + i^j\eta), \xi + i^j\eta\rangle$$

se deduce que $T = T^*$.

Continuación.

($\Leftarrow$) Sea $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\langle T\xi, \xi\rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Entonces de la identidad de polarización:

$$\langle T\xi, \eta\rangle = \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{j=0}^{3} i^j \langle T(\xi + i^j\eta), \xi + i^j\eta\rangle$$

se deduce que $T = T^*$. Entonces $T = T_+ - T_-$, con $T_+, T_- \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$ tales que $T_+T_- = 0 = T_-T_+$,

Continuación.

($\Leftarrow$) Sea $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\langle T\xi, \xi\rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Entonces de la identidad de polarización:

$$\langle T\xi, \eta\rangle = \tfrac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} i^j \langle T(\xi + i^j\eta), \xi + i^j\eta\rangle$$

se deduce que $T = T^*$. Entonces $T = T_+ - T_-$, con $T_+, T_- \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$ tales que $T_+T_- = 0 = T_-T_+$, y por lo tanto $T_+(\mathcal{H}) \perp T_-(\mathcal{H})$:

Continuación.

($\Leftarrow$) Sea $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\langle T\xi, \xi\rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Entonces de la identidad de polarización:

$$\langle T\xi, \eta\rangle = \tfrac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} i^j \langle T(\xi + i^j\eta), \xi + i^j\eta\rangle$$

se deduce que $T = T^*$. Entonces $T = T_+ - T_-$, con $T_+, T_- \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$ tales que $T_+T_- = 0 = T_-T_+$, y por lo tanto $T_+(\mathcal{H}) \perp T_-(\mathcal{H})$:
$\langle T_+(\xi), T_-(\eta)\rangle = \langle \xi, T_+T_-(\eta)\rangle = 0$.

Continuación.

($\Leftarrow$) Sea $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\langle T\xi, \xi\rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Entonces de la identidad de polarización:

$$\langle T\xi, \eta\rangle = \tfrac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} i^j \langle T(\xi + i^j\eta), \xi + i^j\eta\rangle$$

se deduce que $T = T^*$. Entonces $T = T_+ - T_-$, con $T_+, T_- \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$ tales que $T_+T_- = 0 = T_-T_+$, y por lo tanto $T_+(\mathcal{H}) \perp T_-(\mathcal{H})$: $\langle T_+(\xi), T_-(\eta)\rangle = \langle \xi, T_+T_-(\eta)\rangle = 0$. Entonces si $\eta = T_-(\xi) \in T_-(\mathcal{H})$, y teniendo en cuenta que $T_-^3 \geq 0$, se tiene:

Continuación.

($\Leftarrow$) Sea $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\langle T\xi, \xi\rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Entonces de la identidad de polarización:

$$\langle T\xi, \eta\rangle = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} i^j \langle T(\xi + i^j\eta), \xi + i^j\eta\rangle$$

se deduce que $T = T^*$. Entonces $T = T_+ - T_-$, con $T_+, T_- \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$ tales que $T_+T_- = 0 = T_-T_+$, y por lo tanto $T_+(\mathcal{H}) \perp T_-(\mathcal{H})$: $\langle T_+(\xi), T_-(\eta)\rangle = \langle \xi, T_+T_-(\eta)\rangle = 0$. Entonces si $\eta = T_-(\xi) \in T_-(\mathcal{H})$, y teniendo en cuenta que $T_-^3 \geq 0$, se tiene:

$$0 \leq \langle T\eta, \eta\rangle$$

Continuación.

($\Leftarrow$) Sea $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\langle T\xi, \xi\rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Entonces de la identidad de polarización:

$$\langle T\xi, \eta\rangle = \tfrac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} i^j \langle T(\xi + i^j\eta), \xi + i^j\eta\rangle$$

se deduce que $T = T^*$. Entonces $T = T_+ - T_-$, con $T_+, T_- \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$ tales que $T_+T_- = 0 = T_-T_+$, y por lo tanto $T_+(\mathcal{H}) \perp T_-(\mathcal{H})$: $\langle T_+(\xi), T_-(\eta)\rangle = \langle \xi, T_+T_-(\eta)\rangle = 0$. Entonces si $\eta = T_-(\xi) \in T_-(\mathcal{H})$, y teniendo en cuenta que $T_-^3 \geq 0$, se tiene:

$$0 \leq \langle T\eta, \eta\rangle = \langle T_+(\eta) - T_-(\eta), T_-(\xi)\rangle$$

Continuación.

($\Leftarrow$) Sea $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\langle T\xi, \xi\rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Entonces de la identidad de polarización:

$$\langle T\xi, \eta\rangle = \tfrac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} i^j \langle T(\xi + i^j\eta), \xi + i^j\eta\rangle$$

se deduce que $T = T^*$. Entonces $T = T_+ - T_-$, con $T_+, T_- \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$ tales que $T_+T_- = 0 = T_-T_+$, y por lo tanto $T_+(\mathcal{H}) \perp T_-(\mathcal{H})$: $\langle T_+(\xi), T_-(\eta)\rangle = \langle \xi, T_+T_-(\eta)\rangle = 0$. Entonces si $\eta = T_-(\xi) \in T_-(\mathcal{H})$, y teniendo en cuenta que $T_-^3 \geq 0$, se tiene:

$$0 \leq \langle T\eta, \eta\rangle = \langle T_+(\eta) - T_-(\eta), T_-(\xi)\rangle = \langle T_+T_-(\xi) - T_-^2(\xi), T_-(\xi)\rangle$$

Continuación.

($\Leftarrow$) Sea $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\langle T\xi, \xi\rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Entonces de la identidad de polarización:

$$\langle T\xi, \eta\rangle = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} i^j \langle T(\xi + i^j\eta), \xi + i^j\eta\rangle$$

se deduce que $T = T^*$. Entonces $T = T_+ - T_-$, con $T_+, T_- \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$ tales que $T_+T_- = 0 = T_-T_+$, y por lo tanto $T_+(\mathcal{H}) \perp T_-(\mathcal{H})$: $\langle T_+(\xi), T_-(\eta)\rangle = \langle \xi, T_+T_-(\eta)\rangle = 0$. Entonces si $\eta = T_-(\xi) \in T_-(\mathcal{H})$, y teniendo en cuenta que $T_-^3 \geq 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle T\eta, \eta\rangle &= \langle T_+(\eta) - T_-(\eta), T_-(\xi)\rangle = \langle T_+T_-(\xi) - T_-^2(\xi), T_-(\xi)\rangle \\ &= \langle -T_-^2(\xi), T_-(\xi)\rangle \end{aligned}$$

Continuación.

($\Leftarrow$) Sea $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\langle T\xi, \xi\rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Entonces de la identidad de polarización:

$$\langle T\xi, \eta\rangle = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} i^j \langle T(\xi + i^j\eta), \xi + i^j\eta\rangle$$

se deduce que $T = T^*$. Entonces $T = T_+ - T_-$, con $T_+, T_- \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$ tales que $T_+T_- = 0 = T_-T_+$, y por lo tanto $T_+(\mathcal{H}) \perp T_-(\mathcal{H})$: $\langle T_+(\xi), T_-(\eta)\rangle = \langle \xi, T_+T_-(\eta)\rangle = 0$. Entonces si $\eta = T_-(\xi) \in T_-(\mathcal{H})$, y teniendo en cuenta que $T_-^3 \geq 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle T\eta, \eta\rangle &= \langle T_+(\eta) - T_-(\eta), T_-(\xi)\rangle = \langle T_+T_-(\xi) - T_-^2(\xi), T_-(\xi)\rangle \\ &= \langle -T_-^2(\xi), T_-(\xi)\rangle = -\langle T_-^3(\xi), \xi\rangle \end{aligned}$$

Continuación.

($\Leftarrow$) Sea $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\langle T\xi, \xi\rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Entonces de la identidad de polarización:

$$\langle T\xi, \eta\rangle = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} i^j \langle T(\xi + i^j\eta), \xi + i^j\eta\rangle$$

se deduce que $T = T^*$. Entonces $T = T_+ - T_-$, con $T_+, T_- \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$ tales que $T_+T_- = 0 = T_-T_+$, y por lo tanto $T_+(\mathcal{H}) \perp T_-(\mathcal{H})$: $\langle T_+(\xi), T_-(\eta)\rangle = \langle \xi, T_+T_-(\eta)\rangle = 0$. Entonces si $\eta = T_-(\xi) \in T_-(\mathcal{H})$, y teniendo en cuenta que $T_-^3 \geq 0$, se tiene:

$$0 \leq \langle T\eta, \eta\rangle = \langle T_+(\eta) - T_-(\eta), T_-(\xi)\rangle = \langle T_+T_-(\xi) - T_-^2(\xi), T_-(\xi)\rangle$$

$$= \langle -T_-^2(\xi), T_-(\xi)\rangle = -\langle T_-^3(\xi), \xi\rangle = -\|T_-^{3/2}\xi\|^2$$

Continuación.

($\Leftarrow$) Sea $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\langle T\xi, \xi\rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Entonces de la identidad de polarización:

$$\langle T\xi, \eta\rangle = \tfrac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} i^j \langle T(\xi + i^j\eta), \xi + i^j\eta\rangle$$

se deduce que $T = T^*$. Entonces $T = T_+ - T_-$, con $T_+, T_- \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$ tales que $T_+T_- = 0 = T_-T_+$, y por lo tanto $T_+(\mathcal{H}) \perp T_-(\mathcal{H})$: $\langle T_+(\xi), T_-(\eta)\rangle = \langle \xi, T_+T_-(\eta)\rangle = 0$. Entonces si $\eta = T_-(\xi) \in T_-(\mathcal{H})$, y teniendo en cuenta que $T_-^3 \geq 0$, se tiene:

$$0 \leq \langle T\eta, \eta\rangle = \langle T_+(\eta) - T_-(\eta), T_-(\xi)\rangle = \langle T_+T_-(\xi) - T_-^2(\xi), T_-(\xi)\rangle$$

$$= \langle -T_-^2(\xi), T_-(\xi)\rangle = -\langle T_-^3(\xi), \xi\rangle = -\| T_-^{3/2}\xi\|^2 \leq 0.$$

Continuación.

($\Leftarrow$) Sea $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\langle T\xi, \xi\rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Entonces de la identidad de polarización:

$$\langle T\xi, \eta\rangle = \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{j=0}^{3} i^j \langle T(\xi + i^j\eta), \xi + i^j\eta\rangle$$

se deduce que $T = T^*$. Entonces $T = T_+ - T_-$, con $T_+, T_- \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$ tales que $T_+T_- = 0 = T_-T_+$, y por lo tanto $T_+(\mathcal{H}) \perp T_-(\mathcal{H})$: $\langle T_+(\xi), T_-(\eta)\rangle = \langle \xi, T_+T_-(\eta)\rangle = 0$. Entonces si $\eta = T_-(\xi) \in T_-(\mathcal{H})$, y teniendo en cuenta que $T_-^3 \geq 0$, se tiene:

$$0 \leq \langle T\eta, \eta\rangle = \langle T_+(\eta) - T_-(\eta), T_-(\xi)\rangle = \langle T_+T_-(\xi) - T_-^2(\xi), T_-(\xi)\rangle$$

$$= \langle -T_-^2(\xi), T_-(\xi)\rangle = -\langle T_-^3(\xi), \xi\rangle = -\|T_-^{3/2}\xi\|^2 \leq 0.$$

Entonces $T_-^2\xi = T_-^{1/2}T_-^{3/2}(\xi) = 0$,

Continuación.

($\Leftarrow$) Sea $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\langle T\xi, \xi\rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Entonces de la identidad de polarización:

$$\langle T\xi, \eta\rangle = \tfrac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} i^j \langle T(\xi + i^j\eta), \xi + i^j\eta\rangle$$

se deduce que $T = T^*$. Entonces $T = T_+ - T_-$, con $T_+, T_- \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$ tales que $T_+T_- = 0 = T_-T_+$, y por lo tanto $T_+(\mathcal{H}) \perp T_-(\mathcal{H})$: $\langle T_+(\xi), T_-(\eta)\rangle = \langle \xi, T_+T_-(\eta)\rangle = 0$. Entonces si $\eta = T_-(\xi) \in T_-(\mathcal{H})$, y teniendo en cuenta que $T_-^3 \geq 0$, se tiene:

$$0 \leq \langle T\eta, \eta\rangle = \langle T_+(\eta) - T_-(\eta), T_-(\xi)\rangle = \langle T_+T_-(\xi) - T_-^2(\xi), T_-(\xi)\rangle$$

$$= \langle -T_-^2(\xi), T_-(\xi)\rangle = -\langle T_-^3(\xi), \xi\rangle = -\|T_-^{3/2}\xi\|^2 \leq 0.$$

Entonces $T_-^2\xi = T_-^{1/2}T_-^{3/2}(\xi) = 0$, lo que implica

Continuación.

($\Leftarrow$) Sea $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\langle T\xi, \xi\rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Entonces de la identidad de polarización:

$$\langle T\xi, \eta\rangle = \tfrac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} i^j \langle T(\xi + i^j\eta), \xi + i^j\eta\rangle$$

se deduce que $T = T^*$. Entonces $T = T_+ - T_-$, con $T_+, T_- \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$ tales que $T_+T_- = 0 = T_-T_+$, y por lo tanto $T_+(\mathcal{H}) \perp T_-(\mathcal{H})$: $\langle T_+(\xi), T_-(\eta)\rangle = \langle \xi, T_+T_-(\eta)\rangle = 0$. Entonces si $\eta = T_-(\xi) \in T_-(\mathcal{H})$, y teniendo en cuenta que $T_-^3 \geq 0$, se tiene:

$$0 \leq \langle T\eta, \eta\rangle = \langle T_+(\eta) - T_-(\eta), T_-(\xi)\rangle = \langle T_+T_-(\xi) - T_-^2(\xi), T_-(\xi)\rangle$$

$$= \langle -T_-^2(\xi), T_-(\xi)\rangle = -\langle T_-^3(\xi), \xi\rangle = -\| T_-^{3/2}\xi\|^2 \leq 0.$$

Entonces $T_-^2\xi = T_-^{1/2}T_-^{3/2}(\xi) = 0$, lo que implica

$$\| T_-(\xi)\|^2 = \langle T_-(\xi), T_-(\xi)\rangle$$

Continuación.

($\Leftarrow$) Sea $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\langle T\xi, \xi\rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Entonces de la identidad de polarización:

$$\langle T\xi, \eta\rangle = \tfrac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} i^j \langle T(\xi + i^j\eta), \xi + i^j\eta\rangle$$

se deduce que $T = T^*$. Entonces $T = T_+ - T_-$, con $T_+, T_- \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$ tales que $T_+T_- = 0 = T_-T_+$, y por lo tanto $T_+(\mathcal{H}) \perp T_-(\mathcal{H})$: $\langle T_+(\xi), T_-(\eta)\rangle = \langle \xi, T_+T_-(\eta)\rangle = 0$. Entonces si $\eta = T_-(\xi) \in T_-(\mathcal{H})$, y teniendo en cuenta que $T_-^3 \geq 0$, se tiene:

$$0 \leq \langle T\eta, \eta\rangle = \langle T_+(\eta) - T_-(\eta), T_-(\xi)\rangle = \langle T_+T_-(\xi) - T_-^2(\xi), T_-(\xi)\rangle$$

$$= \langle -T_-^2(\xi), T_-(\xi)\rangle = -\langle T_-^3(\xi), \xi\rangle = -\|T_-^{3/2}\xi\|^2 \leq 0.$$

Entonces $T_-^2\xi = T_-^{1/2}T_-^{3/2}(\xi) = 0$, lo que implica

$$\|T_-(\xi)\|^2 = \langle T_-(\xi), T_-(\xi)\rangle = \langle T_-^2(\xi), \xi\rangle$$

Continuación.

($\Leftarrow$) Sea $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\langle T\xi, \xi\rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Entonces de la identidad de polarización:

$$\langle T\xi, \eta\rangle = \tfrac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} i^j \langle T(\xi + i^j\eta), \xi + i^j\eta\rangle$$

se deduce que $T = T^*$. Entonces $T = T_+ - T_-$, con $T_+, T_- \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$ tales que $T_+T_- = 0 = T_-T_+$, y por lo tanto $T_+(\mathcal{H}) \perp T_-(\mathcal{H})$: $\langle T_+(\xi), T_-(\eta)\rangle = \langle \xi, T_+T_-(\eta)\rangle = 0$. Entonces si $\eta = T_-(\xi) \in T_-(\mathcal{H})$, y teniendo en cuenta que $T_-^3 \geq 0$, se tiene:

$$0 \leq \langle T\eta, \eta\rangle = \langle T_+(\eta) - T_-(\eta), T_-(\xi)\rangle = \langle T_+T_-(\xi) - T_-^2(\xi), T_-(\xi)\rangle$$

$$= \langle -T_-^2(\xi), T_-(\xi)\rangle = -\langle T_-^3(\xi), \xi\rangle = -\|T_-^{3/2}\xi\|^2 \leq 0.$$

Entonces $T_-^2\xi = T_-^{1/2}T_-^{3/2}(\xi) = 0$, lo que implica

$$\|T_-(\xi)\|^2 = \langle T_-(\xi), T_-(\xi)\rangle = \langle T_-^2(\xi), \xi\rangle = 0,$$

Continuación.

($\Leftarrow$) Sea $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\langle T\xi, \xi \rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Entonces de la identidad de polarización:

$$\langle T\xi, \eta \rangle = \tfrac{1}{4} \sum_{j=0}^{3} i^j \langle T(\xi + i^j \eta), \xi + i^j \eta \rangle$$

se deduce que $T = T^*$. Entonces $T = T_+ - T_-$, con $T_+, T_- \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$ tales que $T_+ T_- = 0 = T_- T_+$, y por lo tanto $T_+(\mathcal{H}) \perp T_-(\mathcal{H})$: $\langle T_+(\xi), T_-(\eta) \rangle = \langle \xi, T_+ T_-(\eta) \rangle = 0$. Entonces si $\eta = T_-(\xi) \in T_-(\mathcal{H})$, y teniendo en cuenta que $T_-^3 \geq 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle T\eta, \eta \rangle &= \langle T_+(\eta) - T_-(\eta), T_-(\xi) \rangle = \langle T_+ T_-(\xi) - T_-^2(\xi), T_-(\xi) \rangle \\ &= \langle -T_-^2(\xi), T_-(\xi) \rangle = -\langle T_-^3(\xi), \xi \rangle = -\| T_-^{3/2} \xi \|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Entonces $T_-^2 \xi = T_-^{1/2} T_-^{3/2}(\xi) = 0$, lo que implica

$$\| T_-(\xi) \|^2 = \langle T_-(\xi), T_-(\xi) \rangle = \langle T_-^2(\xi), \xi \rangle = 0,$$

y por lo tanto $T_-(\xi) = 0$.

Continuación.

($\Leftarrow$) Sea $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\langle T\xi, \xi\rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Entonces de la identidad de polarización:

$$\langle T\xi, \eta\rangle = \tfrac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} i^j \langle T(\xi + i^j\eta), \xi + i^j\eta\rangle$$

se deduce que $T = T^*$. Entonces $T = T_+ - T_-$, con $T_+, T_- \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$ tales que $T_+T_- = 0 = T_-T_+$, y por lo tanto $T_+(\mathcal{H}) \perp T_-(\mathcal{H})$: $\langle T_+(\xi), T_-(\eta)\rangle = \langle \xi, T_+T_-(\eta)\rangle = 0$. Entonces si $\eta = T_-(\xi) \in T_-(\mathcal{H})$, y teniendo en cuenta que $T_-^3 \geq 0$, se tiene:

$$0 \leq \langle T\eta, \eta\rangle = \langle T_+(\eta) - T_-(\eta), T_-(\xi)\rangle = \langle T_+T_-(\xi) - T_-^2(\xi), T_-(\xi)\rangle$$

$$= \langle -T_-^2(\xi), T_-(\xi)\rangle = -\langle T_-^3(\xi), \xi\rangle = -\|T_-^{3/2}\xi\|^2 \leq 0.$$

Entonces $T_-^2\xi = T_-^{1/2}T_-^{3/2}(\xi) = 0$, lo que implica

$$\|T_-(\xi)\|^2 = \langle T_-(\xi), T_-(\xi)\rangle = \langle T_-^2(\xi), \xi\rangle = 0,$$

y por lo tanto $T_-(\xi) = 0$. Luego $T_- = 0$,

Continuación.

($\Leftarrow$) Sea $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que $\langle T\xi, \xi\rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Entonces de la identidad de polarización:

$$\langle T\xi, \eta\rangle = \tfrac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} i^j \langle T(\xi + i^j\eta), \xi + i^j\eta\rangle$$

se deduce que $T = T^*$. Entonces $T = T_+ - T_-$, con $T_+, T_- \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$ tales que $T_+T_- = 0 = T_-T_+$, y por lo tanto $T_+(\mathcal{H}) \perp T_-(\mathcal{H})$: $\langle T_+(\xi), T_-(\eta)\rangle = \langle \xi, T_+T_-(\eta)\rangle = 0$. Entonces si $\eta = T_-(\xi) \in T_-(\mathcal{H})$, y teniendo en cuenta que $T_-^3 \geq 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle T\eta, \eta\rangle &= \langle T_+(\eta) - T_-(\eta), T_-(\xi)\rangle = \langle T_+T_-(\xi) - T_-^2(\xi), T_-(\xi)\rangle \\ &= \langle -T_-^2(\xi), T_-(\xi)\rangle = -\langle T_-^3(\xi), \xi\rangle = -\|T_-^{3/2}\xi\|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Entonces $T_-^2\xi = T_-^{1/2}T_-^{3/2}(\xi) = 0$, lo que implica

$$\|T_-(\xi)\|^2 = \langle T_-(\xi), T_-(\xi)\rangle = \langle T_-^2(\xi), \xi\rangle = 0,$$

y por lo tanto $T_-(\xi) = 0$. Luego $T_- = 0$, y por lo tanto $T = T_+ \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$.

Lema

Sean φ y ψ funcionales positivas sobre la C-álgebra A,*

Lema

Sean φ y ψ funcionales positivas sobre la C-álgebra A,*

Lema

Sean φ y ψ funcionales positivas sobre la C-álgebra A, con $\psi \leq \varphi$,*

Lema

Sean φ y ψ funcionales positivas sobre la C-álgebra A, con $\psi \leq \varphi$, y sea $(\mathcal{H}, \pi, \xi)$ la GNS de φ.*

Lema

Sean φ y ψ funcionales positivas sobre la C-álgebra A, con $\psi \leq \varphi$, y sea $(\mathcal{H}, \pi, \xi)$ la GNS de φ. Entonces existe un único $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que:*

Lema

Sean φ y ψ funcionales positivas sobre la C-álgebra A, con $\psi \leq \varphi$, y sea $(\mathcal{H}, \pi, \xi)$ la GNS de φ. Entonces existe un único $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que:*

(a) $V \in \pi(A)'$.

Lema

Sean φ *y* ψ *funcionales positivas sobre la C*-álgebra* A*, con* $\psi \leq \varphi$*, y sea* $(\mathcal{H}, \pi, \xi)$ *la GNS de* φ*. Entonces existe un único* $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ *tal que:*

(a) $V \in \pi(A)'$.

(b) $\psi(a) = \langle \pi(a) V \xi, \xi \rangle$ *para todo* $a \in A$.

Lema

Sean φ y ψ funcionales positivas sobre la C-álgebra A, con $\psi \leq \varphi$, y sea $(\mathcal{H}, \pi, \xi)$ la GNS de φ. Entonces existe un único $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que:*

(a) $V \in \pi(A)'$.

(b) $\psi(a) = \langle \pi(a) V\xi, \xi \rangle$ *para todo* $a \in A$.

(c) $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$.

Lema

Sean φ y ψ funcionales positivas sobre la C-álgebra A, con $\psi \leq \varphi$, y sea $(\mathcal{H}, \pi, \xi)$ la GNS de φ. Entonces existe un único $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que:*

(a) $V \in \pi(A)'$.

(b) $\psi(a) = \langle \pi(a) V\xi, \xi \rangle$ *para todo* $a \in A$.

(c) $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$.

Lema

Sean φ y ψ funcionales positivas sobre la C-álgebra A, con $\psi \leq \varphi$, y sea $(\mathcal{H}, \pi, \xi)$ la GNS de φ. Entonces existe un único $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que:*

(a) $V \in \pi(A)'$.

(b) $\psi(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi \rangle$ *para todo* $a \in A$.

(c) $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$.

Demostración.

Lema

Sean φ y ψ funcionales positivas sobre la C-álgebra A, con $\psi \leq \varphi$, y sea $(\mathcal{H}, \pi, \xi)$ la GNS de φ. Entonces existe un único $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que:*

(a) $V \in \pi(A)'$.

(b) $\psi(a) = \langle \pi(a) V\xi, \xi \rangle$ *para todo* $a \in A$.

(c) $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$.

Demostración.

Lema

Sean φ y ψ funcionales positivas sobre la C-álgebra A, con $\psi \leq \varphi$, y sea $(\mathcal{H}, \pi, \xi)$ la GNS de φ. Entonces existe un único $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que:*

(a) $V \in \pi(A)'$.

(b) $\psi(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi \rangle$ *para todo* $a \in A$.

(c) $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$.

Demostración.

Si V y W satisfacen (a) y (b), entonces para todos $a, b \in A$ es

Lema

Sean φ y ψ funcionales positivas sobre la C-álgebra A, con $\psi \leq \varphi$, y sea $(\mathcal{H}, \pi, \xi)$ la GNS de φ. Entonces existe un único $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que:*

(a) $V \in \pi(A)'$.

(b) $\psi(a) = \langle \pi(a) V\xi, \xi \rangle$ *para todo* $a \in A$.

(c) $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$.

Demostración.

Si V y W satisfacen (a) y (b), entonces para todos $a, b \in A$ es

$$0 = \psi(b^* a) - \psi(b^* a)$$

Lema

Sean φ y ψ funcionales positivas sobre la C-álgebra A, con $\psi \leq \varphi$, y sea $(\mathcal{H}, \pi, \xi)$ la GNS de φ. Entonces existe un único $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que:*

(a) $V \in \pi(A)'$.

(b) $\psi(a) = \langle \pi(a) V \xi, \xi \rangle$ *para todo* $a \in A$.

(c) $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$.

Demostración.

Si V y W satisfacen (a) y (b), entonces para todos $a, b \in A$ es

$$0 = \psi(b^* a) - \psi(b^* a) = \langle \pi(b^*)(V - W)\pi(a)\xi, \xi \rangle$$

Lema

Sean φ y ψ funcionales positivas sobre la C-álgebra A, con $\psi \leq \varphi$, y sea $(\mathcal{H}, \pi, \xi)$ la GNS de φ. Entonces existe un único $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que:*

(a) $V \in \pi(A)'$.

(b) $\psi(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi\rangle$ *para todo* $a \in A$.

(c) $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$.

Demostración.

Si V y W satisfacen (a) y (b), entonces para todos $a, b \in A$ es

$$0 = \psi(b^*a) - \psi(b^*a) = \langle \pi(b^*)(V - W)\pi(a)\xi, \xi\rangle = \langle (V - W)\pi(a)\xi, \pi(b)\xi\rangle,$$

Lema

Sean φ y ψ funcionales positivas sobre la C-álgebra A, con $\psi \leq \varphi$, y sea $(\mathcal{H}, \pi, \xi)$ la GNS de φ. Entonces existe un único $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que:*

(a) $V \in \pi(A)'$.

(b) $\psi(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi\rangle$ *para todo* $a \in A$.

(c) $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$.

Demostración.

Si V y W satisfacen (a) y (b), entonces para todos $a, b \in A$ es

$$0 = \psi(b^*a) - \psi(b^*a) = \langle \pi(b^*)(V - W)\pi(a)\xi, \xi\rangle = \langle (V - W)\pi(a)\xi, \pi(b)\xi\rangle,$$

y por lo tanto $V = W$,

Lema

Sean φ y ψ funcionales positivas sobre la C-álgebra A, con $\psi \leq \varphi$, y sea $(\mathcal{H}, \pi, \xi)$ la GNS de φ. Entonces existe un único $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que:*

(a) $V \in \pi(A)'$.

(b) $\psi(a) = \langle \pi(a) V\xi, \xi\rangle$ *para todo* $a \in A$.

(c) $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$.

Demostración.

Si V y W satisfacen (a) y (b), entonces para todos $a, b \in A$ es

$$0 = \psi(b^*a) - \psi(b^*a) = \langle \pi(b^*)(V - W)\pi(a)\xi, \xi\rangle = \langle (V - W)\pi(a)\xi, \pi(b)\xi\rangle,$$

y por lo tanto $V = W$, pues $\pi(A)\xi$ es denso en $\mathcal{H}$.

Lema

Sean φ y ψ funcionales positivas sobre la C-álgebra A, con $\psi \leq \varphi$, y sea $(\mathcal{H}, \pi, \xi)$ la GNS de φ. Entonces existe un único $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que:*

(a) $V \in \pi(A)'$.

(b) $\psi(a) = \langle \pi(a) V\xi, \xi \rangle$ *para todo* $a \in A$.

(c) $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$.

Demostración.

Si V y W satisfacen (a) y (b), entonces para todos $a, b \in A$ es

$$0 = \psi(b^* a) - \psi(b^* a) = \langle \pi(b^*)(V - W)\pi(a)\xi, \xi \rangle = \langle (V - W)\pi(a)\xi, \pi(b)\xi \rangle,$$

y por lo tanto $V = W$, pues $\pi(A)\xi$ es denso en $\mathcal{H}$. Para definir V, consideremos primero $\eta = \pi(a)\xi$, $\zeta = \pi(b)\xi$, para ciertos $a, b \in A$.

Lema

Sean φ y ψ funcionales positivas sobre la C-álgebra A, con $\psi \leq \varphi$, y sea $(\mathcal{H}, \pi, \xi)$ la GNS de φ. Entonces existe un único $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que:*

(a) $V \in \pi(A)'$.

(b) $\psi(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi \rangle$ *para todo* $a \in A$.

(c) $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$.

Demostración.

Si V y W satisfacen (a) y (b), entonces para todos $a, b \in A$ es

$$0 = \psi(b^* a) - \psi(b^* a) = \langle \pi(b^*)(V - W)\pi(a)\xi, \xi \rangle = \langle (V - W)\pi(a)\xi, \pi(b)\xi \rangle,$$

y por lo tanto $V = W$, pues $\pi(A)\xi$ es denso en $\mathcal{H}$. Para definir V, consideremos primero $\eta = \pi(a)\xi$, $\zeta = \pi(b)\xi$, para ciertos $a, b \in A$. Entonces

Lema

Sean φ y ψ funcionales positivas sobre la C-álgebra A, con $\psi \leq \varphi$, y sea $(\mathcal{H}, \pi, \xi)$ la GNS de φ. Entonces existe un único $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que:*

(a) $V \in \pi(A)'$.

(b) $\psi(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi \rangle$ *para todo* $a \in A$.

(c) $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$.

Demostración.

Si V y W satisfacen (a) y (b), entonces para todos $a, b \in A$ es

$$0 = \psi(b^*a) - \psi(b^*a) = \langle \pi(b^*)(V - W)\pi(a)\xi, \xi \rangle = \langle (V - W)\pi(a)\xi, \pi(b)\xi \rangle,$$

y por lo tanto $V = W$, pues $\pi(A)\xi$ es denso en $\mathcal{H}$. Para definir V, consideremos primero $\eta = \pi(a)\xi$, $\zeta = \pi(b)\xi$, para ciertos $a, b \in A$. Entonces

$$|\psi(b^*a)|$$

Lema

Sean φ y ψ funcionales positivas sobre la C-álgebra A, con $\psi \leq \varphi$, y sea $(\mathcal{H}, \pi, \xi)$ la GNS de φ. Entonces existe un único $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que:*

(a) $V \in \pi(A)'$.

(b) $\psi(a) = \langle \pi(a) V \xi, \xi \rangle$ *para todo* $a \in A$.

(c) $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$.

Demostración.

Si V y W satisfacen (a) y (b), entonces para todos $a, b \in A$ es

$$0 = \psi(b^* a) - \psi(b^* a) = \langle \pi(b^*)(V - W)\pi(a)\xi, \xi \rangle = \langle (V - W)\pi(a)\xi, \pi(b)\xi \rangle,$$

y por lo tanto $V = W$, pues $\pi(A)\xi$ es denso en $\mathcal{H}$. Para definir V, consideremos primero $\eta = \pi(a)\xi$, $\zeta = \pi(b)\xi$, para ciertos $a, b \in A$. Entonces

$$|\psi(b^* a)| \leq \psi(b^* b)^{\frac{1}{2}} \psi(a^* a)^{\frac{1}{2}}$$

Lema

Sean φ y ψ funcionales positivas sobre la C-álgebra A, con $\psi \leq \varphi$, y sea $(\mathcal{H}, \pi, \xi)$ la GNS de φ. Entonces existe un único $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que:*

(a) $V \in \pi(A)'$.

(b) $\psi(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi \rangle$ *para todo* $a \in A$.

(c) $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$.

Demostración.

Si V y W satisfacen (a) y (b), entonces para todos $a, b \in A$ es

$$0 = \psi(b^* a) - \psi(b^* a) = \langle \pi(b^*)(V - W)\pi(a)\xi, \xi \rangle = \langle (V - W)\pi(a)\xi, \pi(b)\xi \rangle,$$

y por lo tanto $V = W$, pues $\pi(A)\xi$ es denso en $\mathcal{H}$. Para definir V, consideremos primero $\eta = \pi(a)\xi$, $\zeta = \pi(b)\xi$, para ciertos $a, b \in A$. Entonces

$$|\psi(b^* a)| \leq \psi(b^* b)^{\frac{1}{2}} \psi(a^* a)^{\frac{1}{2}} \leq \langle \pi(b^* b)\xi, \xi \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \pi(a^* a)\xi, \xi \rangle^{\frac{1}{2}}$$

Lema

Sean φ y ψ funcionales positivas sobre la C-álgebra A, con $\psi \leq \varphi$, y sea $(\mathcal{H}, \pi, \xi)$ la GNS de φ. Entonces existe un único $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que:*

(a) $V \in \pi(A)'$.

(b) $\psi(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi \rangle$ *para todo* $a \in A$.

(c) $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$.

Demostración.

Si V y W satisfacen (a) y (b), entonces para todos $a, b \in A$ es

$$0 = \psi(b^*a) - \psi(b^*a) = \langle \pi(b^*)(V - W)\pi(a)\xi, \xi \rangle = \langle (V - W)\pi(a)\xi, \pi(b)\xi \rangle,$$

y por lo tanto $V = W$, pues $\pi(A)\xi$ es denso en $\mathcal{H}$. Para definir V, consideremos primero $\eta = \pi(a)\xi$, $\zeta = \pi(b)\xi$, para ciertos $a, b \in A$. Entonces

$$\begin{aligned} |\psi(b^*a)| &\leq \psi(b^*b)^{\frac{1}{2}} \psi(a^*a)^{\frac{1}{2}} \leq \langle \pi(b^*b)\xi, \xi \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \pi(a^*a)\xi, \xi \rangle^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\pi(b)\xi\| \, \|\pi(a)\xi\| \end{aligned}$$

Lema

Sean φ y ψ funcionales positivas sobre la C-álgebra A, con $\psi \leq \varphi$, y sea $(\mathcal{H}, \pi, \xi)$ la GNS de φ. Entonces existe un único $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que:*

(a) $V \in \pi(A)'$.

(b) $\psi(a) = \langle \pi(a) V\xi, \xi \rangle$ *para todo* $a \in A$.

(c) $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$.

Demostración.

Si V y W satisfacen (a) y (b), entonces para todos $a, b \in A$ es

$$0 = \psi(b^*a) - \psi(b^*a) = \langle \pi(b^*)(V - W)\pi(a)\xi, \xi \rangle = \langle (V - W)\pi(a)\xi, \pi(b)\xi \rangle,$$

y por lo tanto $V = W$, pues $\pi(A)\xi$ es denso en $\mathcal{H}$. Para definir V, consideremos primero $\eta = \pi(a)\xi$, $\zeta = \pi(b)\xi$, para ciertos $a, b \in A$. Entonces

$$\begin{aligned} |\psi(b^*a)| &\leq \psi(b^*b)^{\frac{1}{2}} \psi(a^*a)^{\frac{1}{2}} \leq \langle \pi(b^*b)\xi, \xi \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \pi(a^*a)\xi, \xi \rangle^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\pi(b)\xi\| \, \|\pi(a)\xi\| = \|\eta\| \, \|\zeta\| \end{aligned}$$

Lema

Sean φ y ψ funcionales positivas sobre la C-álgebra A, con $\psi \leq \varphi$, y sea $(\mathcal{H}, \pi, \xi)$ la GNS de φ. Entonces existe un único $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ tal que:*

(a) $V \in \pi(A)'$.

(b) $\psi(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi\rangle$ *para todo* $a \in A$.

(c) $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$.

Demostración.

Si V y W satisfacen (a) y (b), entonces para todos $a, b \in A$ es

$$0 = \psi(b^*a) - \psi(b^*a) = \langle \pi(b^*)(V - W)\pi(a)\xi, \xi\rangle = \langle (V - W)\pi(a)\xi, \pi(b)\xi\rangle,$$

y por lo tanto $V = W$, pues $\pi(A)\xi$ es denso en $\mathcal{H}$. Para definir V, consideremos primero $\eta = \pi(a)\xi$, $\zeta = \pi(b)\xi$, para ciertos $a, b \in A$. Entonces

$$\begin{aligned}|\psi(b^*a)| &\leq \psi(b^*b)^{\frac{1}{2}}\psi(a^*a)^{\frac{1}{2}} \leq \langle \pi(b^*b)\xi, \xi\rangle^{\frac{1}{2}} \langle \pi(a^*a)\xi, \xi\rangle^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\pi(b)\xi\| \, \|\pi(a)\xi\| = \|\eta\| \, \|\zeta\|\end{aligned}$$

Continuación.

Luego, si también se puede escribir $\eta = \pi(a')\xi$, $\zeta = \pi(b')\xi$:

Continuación.

Luego, si también se puede escribir $\eta = \pi(a')\xi$, $\zeta = \pi(b')\xi$:

Continuación.

Luego, si también se puede escribir $\eta = \pi(a')\xi$, $\zeta = \pi(b')\xi$:

$$|\psi(b^*a) - \psi(b'^*a')|$$

Continuación.

Luego, si también se puede escribir $\eta = \pi(a')\xi$, $\zeta = \pi(b')\xi$:

$$|\psi(b^* a) - \psi(b'^* a')| \leq |\psi(b^*(a - a'))| + |\psi((b^* - b'^*)a')|$$

Continuación.

Luego, si también se puede escribir $\eta = \pi(a')\xi$, $\zeta = \pi(b')\xi$:

$$\begin{aligned} |\psi(b^*a) - \psi(b'^*a')| &\leq |\psi(b^*(a-a'))| + |\psi((b^* - b'^*)a')| \\ &\leq \|\zeta\|\,\|\eta - \eta\| + \|\zeta - \zeta\|\,\|\eta\| = 0. \end{aligned}$$

Continuación.

Luego, si también se puede escribir $\eta = \pi(a')\xi$, $\zeta = \pi(b')\xi$:

$$\begin{aligned} |\psi(b^*a) - \psi(b'^*a')| &\leq |\psi(b^*(a-a'))| + |\psi((b^* - b'^*)a')| \\ &\leq \|\zeta\|\,\|\eta - \eta\| + \|\zeta - \zeta\|\,\|\eta\| = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto está definido el mapa $B : \pi(A)\mathcal{H} \times \pi(A)\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que

Continuación.

Luego, si también se puede escribir $\eta = \pi(a')\xi$, $\zeta = \pi(b')\xi$:

$$\begin{aligned} |\psi(b^* a) - \psi(b'^* a')| &\leq |\psi(b^*(a - a'))| + |\psi((b^* - b'^*)a')| \\ &\leq \|\zeta\| \, \|\eta - \eta\| + \|\zeta - \zeta\| \, \|\eta\| = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto está definido el mapa $B : \pi(A)\mathcal{H} \times \pi(A)\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que

$$B(\pi(a)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^* a),$$

Continuación.

Luego, si también se puede escribir $\eta = \pi(a')\xi$, $\zeta = \pi(b')\xi$:

$$
\begin{aligned}
|\psi(b^* a) - \psi(b'^* a')| &\leq |\psi(b^*(a - a'))| + |\psi((b^* - b'^*)a')| \\
&\leq \|\zeta\| \, \|\eta - \eta\| + \|\zeta - \zeta\| \, \|\eta\| = 0.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto está definido el mapa $B : \pi(A)\mathcal{H} \times \pi(A)\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que

$$B(\pi(a)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^* a),$$

que es sesquilineal y verifica que $|B(\eta, \zeta)| \leq \|\eta\| \, \|\zeta\|$.

Continuación.

Luego, si también se puede escribir $\eta = \pi(a')\xi$, $\zeta = \pi(b')\xi$:

$$|\psi(b^*a) - \psi(b'^*a')| \leq |\psi(b^*(a - a'))| + |\psi((b^* - b'^*)a')|$$
$$\leq \|\zeta\| \, \|\eta - \eta\| + \|\zeta - \zeta\| \, \|\eta\| = 0.$$

Por lo tanto está definido el mapa $B : \pi(A)\mathcal{H} \times \pi(A)\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que

$$B(\pi(a)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^*a),$$

que es sesquilineal y verifica que $|B(\eta, \zeta)| \leq \|\eta\| \, \|\zeta\|$. Como $\|B\| \leq 1$,

Continuación.

Luego, si también se puede escribir $\eta = \pi(a')\xi$, $\zeta = \pi(b')\xi$:

$$\begin{aligned} |\psi(b^*a) - \psi(b'^*a')| &\leq |\psi(b^*(a-a'))| + |\psi((b^* - b'^*)a')| \\ &\leq \|\zeta\| \, \|\eta - \eta\| + \|\zeta - \zeta\| \, \|\eta\| = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto está definido el mapa $B : \pi(A)\mathcal{H} \times \pi(A)\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que

$$B(\pi(a)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^*a),$$

que es sesquilineal y verifica que $|B(\eta,\zeta)| \leq \|\eta\| \, \|\zeta\|$. Como $\|B\| \leq 1$, B se extiende por continuidad a una forma sesquilineal $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que $\|B\| \leq 1$.

Continuación.

Luego, si también se puede escribir $\eta = \pi(a')\xi$, $\zeta = \pi(b')\xi$:

$$\begin{aligned} |\psi(b^*a) - \psi(b'^*a')| &\leq |\psi(b^*(a-a'))| + |\psi((b^* - b'^*)a')| \\ &\leq \|\zeta\|\,\|\eta - \eta\| + \|\zeta - \zeta\|\,\|\eta\| = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto está definido el mapa $B : \pi(A)\mathcal{H} \times \pi(A)\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que

$$B(\pi(a)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^*a),$$

que es sesquilineal y verifica que $|B(\eta,\zeta)| \leq \|\eta\|\,\|\zeta\|$. Como $\|B\| \leq 1$, B se extiende por continuidad a una forma sesquilineal $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que $\|B\| \leq 1$. Sea $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ el único operador tal que $B(\eta,\zeta) = \langle V\eta, \zeta\rangle$, $\forall \eta, \zeta \in \mathcal{H}$.

Continuación.

Luego, si también se puede escribir $\eta = \pi(a')\xi$, $\zeta = \pi(b')\xi$:

$$|\psi(b^*a) - \psi(b'^*a')| \leq |\psi(b^*(a-a'))| + |\psi((b^* - b'^*)a')|$$
$$\leq \|\zeta\| \, \|\eta - \eta\| + \|\zeta - \zeta\| \, \|\eta\| = 0.$$

Por lo tanto está definido el mapa $B : \pi(A)\mathcal{H} \times \pi(A)\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que

$$B(\pi(a)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^*a),$$

que es sesquilineal y verifica que $|B(\eta,\zeta)| \leq \|\eta\| \, \|\zeta\|$. Como $\|B\| \leq 1$, B se extiende por continuidad a una forma sesquilineal $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que $\|B\| \leq 1$. Sea $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ el único operador tal que $B(\eta,\zeta) = \langle V\eta, \zeta\rangle$, $\forall \eta, \zeta \in \mathcal{H}$. Entonces $\|V\| = \|B\| \leq 1$,

Continuación.

Luego, si también se puede escribir $\eta = \pi(a')\xi$, $\zeta = \pi(b')\xi$:

$$\begin{aligned} |\psi(b^*a) - \psi(b'^*a')| &\leq |\psi(b^*(a-a'))| + |\psi((b^* - b'^*)a')| \\ &\leq \|\zeta\| \, \|\eta - \eta\| + \|\zeta - \zeta\| \, \|\eta\| = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto está definido el mapa $B : \pi(A)\mathcal{H} \times \pi(A)\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que

$$B(\pi(a)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^*a),$$

que es sesquilineal y verifica que $|B(\eta, \zeta)| \leq \|\eta\| \, \|\zeta\|$. Como $\|B\| \leq 1$, B se extiende por continuidad a una forma sesquilineal $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que $\|B\| \leq 1$. Sea $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ el único operador tal que $B(\eta, \zeta) = \langle V\eta, \zeta\rangle$, $\forall \eta, \zeta \in \mathcal{H}$. Entonces $\|V\| = \|B\| \leq 1$, y como para todo $\eta \in \mathcal{H}$ es

Continuación.

Luego, si también se puede escribir $\eta = \pi(a')\xi$, $\zeta = \pi(b')\xi$:

$$|\psi(b^*a) - \psi(b'^*a')| \leq |\psi(b^*(a-a'))| + |\psi((b^* - b'^*)a')|$$
$$\leq \|\zeta\| \, \|\eta - \eta\| + \|\zeta - \zeta\| \, \|\eta\| = 0.$$

Por lo tanto está definido el mapa $B : \pi(A)\mathcal{H} \times \pi(A)\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que

$$B(\pi(a)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^*a),$$

que es sesquilineal y verifica que $|B(\eta, \zeta)| \leq \|\eta\| \, \|\zeta\|$. Como $\|B\| \leq 1$, B se extiende por continuidad a una forma sesquilineal $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que $\|B\| \leq 1$. Sea $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ el único operador tal que $B(\eta, \zeta) = \langle V\eta, \zeta \rangle$, $\forall \eta, \zeta \in \mathcal{H}$. Entonces $\|V\| = \|B\| \leq 1$, y como para todo $\eta \in \mathcal{H}$ es

$\langle V\eta, \eta \rangle$

Continuación.

Luego, si también se puede escribir $\eta = \pi(a')\xi$, $\zeta = \pi(b')\xi$:

$$|\psi(b^*a) - \psi(b'^*a')| \leq |\psi(b^*(a - a'))| + |\psi((b^* - b'^*)a')|$$
$$\leq \|\zeta\| \, \|\eta - \eta\| + \|\zeta - \zeta\| \, \|\eta\| = 0.$$

Por lo tanto está definido el mapa $B : \pi(A)\mathcal{H} \times \pi(A)\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que

$$B(\pi(a)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^*a),$$

que es sesquilineal y verifica que $|B(\eta,\zeta)| \leq \|\eta\| \, \|\zeta\|$. Como $\|B\| \leq 1$, B se extiende por continuidad a una forma sesquilineal $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que $\|B\| \leq 1$. Sea $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ el único operador tal que $B(\eta,\zeta) = \langle V\eta, \zeta\rangle$, $\forall \eta, \zeta \in \mathcal{H}$. Entonces $\|V\| = \|B\| \leq 1$, y como para todo $\eta \in \mathcal{H}$ es

$$\langle V\eta, \eta\rangle = B(\eta,\eta)$$

Continuación.

Luego, si también se puede escribir $\eta = \pi(a')\xi$, $\zeta = \pi(b')\xi$:

$$\begin{aligned} |\psi(b^*a) - \psi(b'^*a')| &\leq |\psi(b^*(a-a'))| + |\psi((b^* - b'^*)a')| \\ &\leq \|\zeta\| \, \|\eta - \eta\| + \|\zeta - \zeta\| \, \|\eta\| = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto está definido el mapa $B : \pi(A)\mathcal{H} \times \pi(A)\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que

$$B(\pi(a)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^*a),$$

que es sesquilineal y verifica que $|B(\eta,\zeta)| \leq \|\eta\| \, \|\zeta\|$. Como $\|B\| \leq 1$, B se extiende por continuidad a una forma sesquilineal $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que $\|B\| \leq 1$. Sea $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ el único operador tal que $B(\eta,\zeta) = \langle V\eta, \zeta\rangle$, $\forall \eta, \zeta \in \mathcal{H}$. Entonces $\|V\| = \|B\| \leq 1$, y como para todo $\eta \in \mathcal{H}$ es

$$\langle V\eta, \eta\rangle = B(\eta,\eta) \geq 0$$

Continuación.

Luego, si también se puede escribir $\eta = \pi(a')\xi$, $\zeta = \pi(b')\xi$:

$$\begin{aligned} |\psi(b^*a) - \psi(b'^*a')| &\leq |\psi(b^*(a-a'))| + |\psi((b^* - b'^*)a')| \\ &\leq \|\zeta\|\,\|\eta - \eta\| + \|\zeta - \zeta\|\,\|\eta\| = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto está definido el mapa $B : \pi(A)\mathcal{H} \times \pi(A)\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que

$$B(\pi(a)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^*a),$$

que es sesquilineal y verifica que $|B(\eta,\zeta)| \leq \|\eta\|\,\|\zeta\|$. Como $\|B\| \leq 1$, B se extiende por continuidad a una forma sesquilineal $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que $\|B\| \leq 1$. Sea $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ el único operador tal que $B(\eta,\zeta) = \langle V\eta, \zeta\rangle$, $\forall \eta, \zeta \in \mathcal{H}$. Entonces $\|V\| = \|B\| \leq 1$, y como para todo $\eta \in \mathcal{H}$ es

$$\langle V\eta, \eta\rangle = B(\eta,\eta) \geq 0 \quad \text{y} \quad \langle (Id - V)\eta, \eta\rangle$$

Continuación.

Luego, si también se puede escribir $\eta = \pi(a')\xi$, $\zeta = \pi(b')\xi$:

$$\begin{aligned}|\psi(b^*a) - \psi(b'^*a')| &\leq |\psi(b^*(a-a'))| + |\psi((b^* - b'^*)a')| \\ &\leq \|\zeta\|\,\|\eta - \eta\| + \|\zeta - \zeta\|\,\|\eta\| = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto está definido el mapa $B : \pi(A)\mathcal{H} \times \pi(A)\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que

$$B(\pi(a)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^*a),$$

que es sesquilineal y verifica que $|B(\eta,\zeta)| \leq \|\eta\|\,\|\zeta\|$. Como $\|B\| \leq 1$, B se extiende por continuidad a una forma sesquilineal $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que $\|B\| \leq 1$. Sea $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ el único operador tal que $B(\eta,\zeta) = \langle V\eta, \zeta\rangle$, $\forall \eta, \zeta \in \mathcal{H}$. Entonces $\|V\| = \|B\| \leq 1$, y como para todo $\eta \in \mathcal{H}$ es

$$\langle V\eta, \eta\rangle = B(\eta,\eta) \geq 0 \quad \text{y} \quad \langle (Id - V)\eta, \eta\rangle = \langle \eta, \eta\rangle - B(\eta,\eta)$$

Continuación.

Luego, si también se puede escribir $\eta = \pi(a')\xi$, $\zeta = \pi(b')\xi$:

$$|\psi(b^*a) - \psi(b'^*a')| \leq |\psi(b^*(a - a'))| + |\psi((b^* - b'^*)a')|$$
$$\leq \|\zeta\| \, \|\eta - \eta\| + \|\zeta - \zeta\| \, \|\eta\| = 0.$$

Por lo tanto está definido el mapa $B : \pi(A)\mathcal{H} \times \pi(A)\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que

$$B(\pi(a)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^*a),$$

que es sesquilineal y verifica que $|B(\eta, \zeta)| \leq \|\eta\| \, \|\zeta\|$. Como $\|B\| \leq 1$, B se extiende por continuidad a una forma sesquilineal $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que $\|B\| \leq 1$. Sea $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ el único operador tal que $B(\eta, \zeta) = \langle V\eta, \zeta\rangle$, $\forall \eta, \zeta \in \mathcal{H}$. Entonces $\|V\| = \|B\| \leq 1$, y como para todo $\eta \in \mathcal{H}$ es

$$\langle V\eta, \eta\rangle = B(\eta, \eta) \geq 0 \quad \text{y} \quad \langle (Id - V)\eta, \eta\rangle = \langle \eta, \eta\rangle - B(\eta, \eta) \geq 0,$$

Continuación.

Luego, si también se puede escribir $\eta = \pi(a')\xi$, $\zeta = \pi(b')\xi$:

$$\begin{aligned} |\psi(b^*a) - \psi(b'^*a')| &\leq |\psi(b^*(a-a'))| + |\psi((b^* - b'^*)a')| \\ &\leq \|\zeta\|\,\|\eta - \eta\| + \|\zeta - \zeta\|\,\|\eta\| = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto está definido el mapa $B : \pi(A)\mathcal{H} \times \pi(A)\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que

$$B(\pi(a)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^*a),$$

que es sesquilineal y verifica que $|B(\eta, \zeta)| \leq \|\eta\|\,\|\zeta\|$. Como $\|B\| \leq 1$, B se extiende por continuidad a una forma sesquilineal $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que $\|B\| \leq 1$. Sea $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ el único operador tal que $B(\eta, \zeta) = \langle V\eta, \zeta\rangle$, $\forall \eta, \zeta \in \mathcal{H}$. Entonces $\|V\| = \|B\| \leq 1$, y como para todo $\eta \in \mathcal{H}$ es

$$\langle V\eta, \eta\rangle = B(\eta, \eta) \geq 0 \quad \text{y} \quad \langle (Id - V)\eta, \eta\rangle = \langle \eta, \eta\rangle - B(\eta, \eta) \geq 0,$$

se tiene V, $Id - V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$.

Continuación.

Luego, si también se puede escribir $\eta = \pi(a')\xi$, $\zeta = \pi(b')\xi$:

$$\begin{aligned} |\psi(b^*a) - \psi(b'^*a')| &\leq |\psi(b^*(a-a'))| + |\psi((b^* - b'^*)a')| \\ &\leq \|\zeta\|\,\|\eta - \eta\| + \|\zeta - \zeta\|\,\|\eta\| = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto está definido el mapa $B : \pi(A)\mathcal{H} \times \pi(A)\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que

$$B(\pi(a)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^*a),$$

que es sesquilineal y verifica que $|B(\eta,\zeta)| \leq \|\eta\|\,\|\zeta\|$. Como $\|B\| \leq 1$, B se extiende por continuidad a una forma sesquilineal $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que $\|B\| \leq 1$. Sea $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ el único operador tal que $B(\eta,\zeta) = \langle V\eta, \zeta\rangle$, $\forall \eta, \zeta \in \mathcal{H}$. Entonces $\|V\| = \|B\| \leq 1$, y como para todo $\eta \in \mathcal{H}$ es

$$\langle V\eta, \eta\rangle = B(\eta,\eta) \geq 0 \quad \text{y} \quad \langle (Id - V)\eta, \eta\rangle = \langle \eta, \eta\rangle - B(\eta,\eta) \geq 0,$$

se tiene V, $Id - V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$. Si $\eta = \pi(a)\xi$, $\zeta = \pi(b)\xi$, entonces $B(\eta,\zeta)$

Continuación.

Luego, si también se puede escribir $\eta = \pi(a')\xi$, $\zeta = \pi(b')\xi$:

$$\begin{aligned} |\psi(b^* a) - \psi(b'^* a')| &\leq |\psi(b^*(a - a'))| + |\psi((b^* - b'^*)a')| \\ &\leq \|\zeta\| \, \|\eta - \eta\| + \|\zeta - \zeta\| \, \|\eta\| = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto está definido el mapa $B : \pi(A)\mathcal{H} \times \pi(A)\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que

$$B(\pi(a)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^* a),$$

que es sesquilineal y verifica que $|B(\eta, \zeta)| \leq \|\eta\| \, \|\zeta\|$. Como $\|B\| \leq 1$, B se extiende por continuidad a una forma sesquilineal $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que $\|B\| \leq 1$. Sea $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ el único operador tal que $B(\eta, \zeta) = \langle V\eta, \zeta \rangle$, $\forall \eta, \zeta \in \mathcal{H}$. Entonces $\|V\| = \|B\| \leq 1$, y como para todo $\eta \in \mathcal{H}$ es

$$\langle V\eta, \eta \rangle = B(\eta, \eta) \geq 0 \quad \text{ y } \quad \langle (Id - V)\eta, \eta \rangle = \langle \eta, \eta \rangle - B(\eta, \eta) \geq 0,$$

se tiene V, $Id - V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$. Si $\eta = \pi(a)\xi$, $\zeta = \pi(b)\xi$, entonces $B(\eta, \zeta) = \langle V\pi(a)\xi, \pi(b)\xi \rangle$

Continuación.

Luego, si también se puede escribir $\eta = \pi(a')\xi$, $\zeta = \pi(b')\xi$:

$$|\psi(b^*a) - \psi(b'^*a')| \leq |\psi(b^*(a-a'))| + |\psi((b^* - b'^*)a')|$$
$$\leq \|\zeta\|\,\|\eta - \eta\| + \|\zeta - \zeta\|\,\|\eta\| = 0.$$

Por lo tanto está definido el mapa $B : \pi(A)\mathcal{H} \times \pi(A)\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que

$$B(\pi(a)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^*a),$$

que es sesquilineal y verifica que $|B(\eta,\zeta)| \leq \|\eta\|\,\|\zeta\|$. Como $\|B\| \leq 1$, B se extiende por continuidad a una forma sesquilineal $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que $\|B\| \leq 1$. Sea $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ el único operador tal que $B(\eta,\zeta) = \langle V\eta, \zeta\rangle$, $\forall \eta, \zeta \in \mathcal{H}$. Entonces $\|V\| = \|B\| \leq 1$, y como para todo $\eta \in \mathcal{H}$ es

$$\langle V\eta, \eta\rangle = B(\eta,\eta) \geq 0 \quad \text{y} \quad \langle (Id - V)\eta, \eta\rangle = \langle \eta, \eta\rangle - B(\eta,\eta) \geq 0,$$

se tiene V, $Id - V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$. Si $\eta = \pi(a)\xi$, $\zeta = \pi(b)\xi$, entonces $B(\eta,\zeta) = \langle V\pi(a)\xi, \pi(b)\xi\rangle = \psi(b^*a)$. En particular

Continuación.

Luego, si también se puede escribir $\eta = \pi(a')\xi$, $\zeta = \pi(b')\xi$:

$$|\psi(b^*a) - \psi(b'^*a')| \leq |\psi(b^*(a - a'))| + |\psi((b^* - b'^*)a')|$$
$$\leq \|\zeta\| \, \|\eta - \eta\| + \|\zeta - \zeta\| \, \|\eta\| = 0.$$

Por lo tanto está definido el mapa $B : \pi(A)\mathcal{H} \times \pi(A)\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que

$$B(\pi(a)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^*a),$$

que es sesquilineal y verifica que $|B(\eta, \zeta)| \leq \|\eta\| \, \|\zeta\|$. Como $\|B\| \leq 1$, B se extiende por continuidad a una forma sesquilineal $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que $\|B\| \leq 1$. Sea $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ el único operador tal que $B(\eta, \zeta) = \langle V\eta, \zeta \rangle$, $\forall \eta, \zeta \in \mathcal{H}$. Entonces $\|V\| = \|B\| \leq 1$, y como para todo $\eta \in \mathcal{H}$ es

$$\langle V\eta, \eta \rangle = B(\eta, \eta) \geq 0 \quad \text{y} \quad \langle (Id - V)\eta, \eta \rangle = \langle \eta, \eta \rangle - B(\eta, \eta) \geq 0,$$

se tiene V, $Id - V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$. Si $\eta = \pi(a)\xi$, $\zeta = \pi(b)\xi$, entonces $B(\eta, \zeta) = \langle V\pi(a)\xi, \pi(b)\xi \rangle = \psi(b^*a)$. En particular

$$\psi(a)$$

Continuación.

Luego, si también se puede escribir $\eta = \pi(a')\xi$, $\zeta = \pi(b')\xi$:

$$\begin{aligned}|\psi(b^*a) - \psi(b'^*a')| &\le |\psi(b^*(a-a'))| + |\psi((b^*-b'^*)a')| \\ &\le \|\zeta\|\,\|\eta-\eta\| + \|\zeta-\zeta\|\,\|\eta\| = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto está definido el mapa $B : \pi(A)\mathcal{H} \times \pi(A)\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que

$$B(\pi(a)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^*a),$$

que es sesquilineal y verifica que $|B(\eta,\zeta)| \le \|\eta\|\,\|\zeta\|$. Como $\|B\| \le 1$, B se extiende por continuidad a una forma sesquilineal $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que $\|B\| \le 1$. Sea $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ el único operador tal que $B(\eta,\zeta) = \langle V\eta, \zeta\rangle$, $\forall \eta,\zeta \in \mathcal{H}$. Entonces $\|V\| = \|B\| \le 1$, y como para todo $\eta \in \mathcal{H}$ es

$$\langle V\eta,\eta\rangle = B(\eta,\eta) \ge 0 \quad \text{y} \quad \langle (Id - V)\eta, \eta\rangle = \langle \eta,\eta\rangle - B(\eta,\eta) \ge 0,$$

se tiene V, $Id - V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$. Si $\eta = \pi(a)\xi$, $\zeta = \pi(b)\xi$, entonces $B(\eta,\zeta) = \langle V\pi(a)\xi, \pi(b)\xi\rangle = \psi(b^*a)$. En particular

$$\psi(a) = \lim_\lambda \psi(au_\lambda)$$

Continuación.

Luego, si también se puede escribir $\eta = \pi(a')\xi$, $\zeta = \pi(b')\xi$:

$$\begin{aligned}|\psi(b^*a) - \psi(b'^*a')| &\leq |\psi(b^*(a-a'))| + |\psi((b^*-b'^*)a')| \\ &\leq \|\zeta\|\,\|\eta-\eta\| + \|\zeta-\zeta\|\,\|\eta\| = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto está definido el mapa $B : \pi(A)\mathcal{H} \times \pi(A)\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que

$$B(\pi(a)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^*a),$$

que es sesquilineal y verifica que $|B(\eta,\zeta)| \leq \|\eta\|\,\|\zeta\|$. Como $\|B\| \leq 1$, B se extiende por continuidad a una forma sesquilineal $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que $\|B\| \leq 1$. Sea $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ el único operador tal que $B(\eta,\zeta) = \langle V\eta, \zeta\rangle$, $\forall \eta, \zeta \in \mathcal{H}$. Entonces $\|V\| = \|B\| \leq 1$, y como para todo $\eta \in \mathcal{H}$ es

$$\langle V\eta,\eta\rangle = B(\eta,\eta) \geq 0 \quad \text{y} \quad \langle (Id - V)\eta, \eta\rangle = \langle \eta,\eta\rangle - B(\eta,\eta) \geq 0,$$

se tiene V, $Id - V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$. Si $\eta = \pi(a)\xi$, $\zeta = \pi(b)\xi$, entonces $B(\eta,\zeta) = \langle V\pi(a)\xi, \pi(b)\xi\rangle = \psi(b^*a)$. En particular

$$\psi(a) = \lim_\lambda \psi(au_\lambda) = \lim_\lambda \langle V\pi(u_\lambda)\xi, \pi(a^*)\xi\rangle$$

Continuación.

Luego, si también se puede escribir $\eta = \pi(a')\xi$, $\zeta = \pi(b')\xi$:

$$|\psi(b^*a) - \psi(b'^*a')| \leq |\psi(b^*(a-a'))| + |\psi((b^* - b'^*)a')|$$
$$\leq \|\zeta\|\,\|\eta - \eta\| + \|\zeta - \zeta\|\,\|\eta\| = 0.$$

Por lo tanto está definido el mapa $B : \pi(A)\mathcal{H} \times \pi(A)\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que

$$B(\pi(a)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^*a),$$

que es sesquilineal y verifica que $|B(\eta,\zeta)| \leq \|\eta\|\,\|\zeta\|$. Como $\|B\| \leq 1$, B se extiende por continuidad a una forma sesquilineal $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que $\|B\| \leq 1$. Sea $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ el único operador tal que $B(\eta,\zeta) = \langle V\eta, \zeta\rangle$, $\forall \eta, \zeta \in \mathcal{H}$. Entonces $\|V\| = \|B\| \leq 1$, y como para todo $\eta \in \mathcal{H}$ es

$$\langle V\eta, \eta\rangle = B(\eta,\eta) \geq 0 \quad \text{ y } \quad \langle (Id - V)\eta, \eta\rangle = \langle \eta, \eta\rangle - B(\eta,\eta) \geq 0,$$

se tiene V, $Id - V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$. Si $\eta = \pi(a)\xi$, $\zeta = \pi(b)\xi$, entonces $B(\eta,\zeta) = \langle V\pi(a)\xi, \pi(b)\xi\rangle = \psi(b^*a)$. En particular

$$\psi(a) = \lim_\lambda \psi(au_\lambda) = \lim_\lambda \langle V\pi(u_\lambda)\xi, \pi(a^*)\xi\rangle$$
$$= \langle V\xi, \pi(a^*)\xi\rangle$$

Continuación.

Luego, si también se puede escribir $\eta = \pi(a')\xi$, $\zeta = \pi(b')\xi$:

$$\begin{aligned} |\psi(b^*a) - \psi(b'^*a')| &\leq |\psi(b^*(a-a'))| + |\psi((b^* - b'^*)a')| \\ &\leq \|\zeta\| \, \|\eta - \eta\| + \|\zeta - \zeta\| \, \|\eta\| = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto está definido el mapa $B : \pi(A)\mathcal{H} \times \pi(A)\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que

$$B(\pi(a)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^*a),$$

que es sesquilineal y verifica que $|B(\eta, \zeta)| \leq \|\eta\| \, \|\zeta\|$. Como $\|B\| \leq 1$, B se extiende por continuidad a una forma sesquilineal $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que $\|B\| \leq 1$. Sea $V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ el único operador tal que $B(\eta, \zeta) = \langle V\eta, \zeta \rangle$, $\forall \eta, \zeta \in \mathcal{H}$. Entonces $\|V\| = \|B\| \leq 1$, y como para todo $\eta \in \mathcal{H}$ es

$$\langle V\eta, \eta \rangle = B(\eta, \eta) \geq 0 \quad \text{ y } \quad \langle (Id - V)\eta, \eta \rangle = \langle \eta, \eta \rangle - B(\eta, \eta) \geq 0,$$

se tiene V, $Id - V \in \mathrm{B}(\mathcal{H})_+$. Si $\eta = \pi(a)\xi$, $\zeta = \pi(b)\xi$, entonces $B(\eta, \zeta) = \langle V\pi(a)\xi, \pi(b)\xi \rangle = \psi(b^*a)$. En particular

$$\begin{aligned} \psi(a) &= \text{lím}_\lambda \, \psi(au_\lambda) = \text{lím}_\lambda \langle V\pi(u_\lambda)\xi, \pi(a^*)\xi \rangle \\ &= \langle V\xi, \pi(a^*)\xi \rangle = \langle \pi(a)V\xi, \xi \rangle \end{aligned} \quad .$$

Continuación.

Resta ver que $V \in \pi(A)'$.

Continuación.

Resta ver que $V \in \pi(A)'$.

Continuación.

Resta ver que $V \in \pi(A)'$. Sean $c \in A$,

Continuación.

Resta ver que $V \in \pi(A)'$. Sean $c \in A$, $\eta = \pi(a)\xi$ y $\zeta = \pi(b)\xi$.

Continuación.

Resta ver que $V \in \pi(A)'$. Sean $c \in A$, $\eta = \pi(a)\xi$ y $\zeta = \pi(b)\xi$. Entonces

Continuación.

Resta ver que $V \in \pi(A)'$. Sean $c \in A$, $\eta = \pi(a)\xi$ y $\zeta = \pi(b)\xi$. Entonces

$\langle V\pi(c)\eta, \zeta\rangle$

Continuación.

Resta ver que $V \in \pi(A)'$. Sean $c \in A$, $\eta = \pi(a)\xi$ y $\zeta = \pi(b)\xi$. Entonces

$\langle V\pi(c)\eta, \zeta\rangle = B(\pi(c)\eta, \zeta)$

Continuación.

Resta ver que $V \in \pi(A)'$. Sean $c \in A$, $\eta = \pi(a)\xi$ y $\zeta = \pi(b)\xi$. Entonces

$$\langle V\pi(c)\eta, \zeta\rangle = B(\pi(c)\eta, \zeta) = B(\pi(ca)\xi, \pi(b)\xi)$$

Continuación.

Resta ver que $V \in \pi(A)'$. Sean $c \in A$, $\eta = \pi(a)\xi$ y $\zeta = \pi(b)\xi$. Entonces

$$\langle V\pi(c)\eta, \zeta\rangle = B(\pi(c)\eta, \zeta) = B(\pi(ca)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^*ca)$$

Continuación.

Resta ver que $V \in \pi(A)'$. Sean $c \in A$, $\eta = \pi(a)\xi$ y $\zeta = \pi(b)\xi$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle V\pi(c)\eta, \zeta\rangle &= B(\pi(c)\eta, \zeta) = B(\pi(ca)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^*ca)\\ &= \psi((c^*b)^*a)\end{aligned}$$

Continuación.

Resta ver que $V \in \pi(A)'$. Sean $c \in A$, $\eta = \pi(a)\xi$ y $\zeta = \pi(b)\xi$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle V\pi(c)\eta, \zeta\rangle &= B(\pi(c)\eta, \zeta) = B(\pi(ca)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^*ca)\\ &= \psi((c^*b)^*a) = B(\pi(a)\xi, \pi(c^*b)\xi)\end{aligned}$$

Continuación.

Resta ver que $V \in \pi(A)'$. Sean $c \in A$, $\eta = \pi(a)\xi$ y $\zeta = \pi(b)\xi$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle V\pi(c)\eta, \zeta\rangle &= B(\pi(c)\eta, \zeta) = B(\pi(ca)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^*ca)\\ &= \psi((c^*b)^*a) = B(\pi(a)\xi, \pi(c^*b)\xi) = B(\pi(a)\xi, \pi(c^*)\pi(b)\xi)\end{aligned}$$

Continuación.

Resta ver que $V \in \pi(A)'$. Sean $c \in A$, $\eta = \pi(a)\xi$ y $\zeta = \pi(b)\xi$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle V\pi(c)\eta, \zeta\rangle &= B(\pi(c)\eta, \zeta) = B(\pi(ca)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^*ca)\\ &= \psi((c^*b)^*a) = B(\pi(a)\xi, \pi(c^*b)\xi) = B(\pi(a)\xi, \pi(c^*)\pi(b)\xi)\\ &= \langle V\pi(a)\xi, \pi(c)^*\pi(b)\xi\rangle\end{aligned}$$

Continuación.

Resta ver que $V \in \pi(A)'$. Sean $c \in A$, $\eta = \pi(a)\xi$ y $\zeta = \pi(b)\xi$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle V\pi(c)\eta, \zeta\rangle &= B(\pi(c)\eta, \zeta) = B(\pi(ca)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^*ca) \\ &= \psi((c^*b)^*a) = B(\pi(a)\xi, \pi(c^*b)\xi) = B(\pi(a)\xi, \pi(c^*)\pi(b)\xi) \\ &= \langle V\pi(a)\xi, \pi(c)^*\pi(b)\xi\rangle = \langle V\eta, \pi(c)^*\zeta\rangle\end{aligned}$$

Continuación.

Resta ver que $V \in \pi(A)'$. Sean $c \in A$, $\eta = \pi(a)\xi$ y $\zeta = \pi(b)\xi$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle V\pi(c)\eta, \zeta\rangle &= B(\pi(c)\eta, \zeta) = B(\pi(ca)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^*ca)\\ &= \psi((c^*b)^*a) = B(\pi(a)\xi, \pi(c^*b)\xi) = B(\pi(a)\xi, \pi(c^*)\pi(b)\xi)\\ &= \langle V\pi(a)\xi, \pi(c)^*\pi(b)\xi\rangle = \langle V\eta, \pi(c)^*\zeta\rangle = \langle \pi(c)V\eta, \zeta\rangle.\end{aligned}$$

Continuación.

Resta ver que $V \in \pi(A)'$. Sean $c \in A$, $\eta = \pi(a)\xi$ y $\zeta = \pi(b)\xi$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle V\pi(c)\eta, \zeta\rangle &= B(\pi(c)\eta, \zeta) = B(\pi(ca)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^*ca)\\ &= \psi((c^*b)^*a) = B(\pi(a)\xi, \pi(c^*b)\xi) = B(\pi(a)\xi, \pi(c^*)\pi(b)\xi)\\ &= \langle V\pi(a)\xi, \pi(c)^*\pi(b)\xi\rangle = \langle V\eta, \pi(c)^*\zeta\rangle = \langle \pi(c)V\eta, \zeta\rangle.\end{aligned}$$

Entonces $V\pi(c) = \pi(c)V$, para todo $c \in A$.

Continuación.

Resta ver que $V \in \pi(A)'$. Sean $c \in A$, $\eta = \pi(a)\xi$ y $\zeta = \pi(b)\xi$. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle V\pi(c)\eta, \zeta\rangle &= B(\pi(c)\eta, \zeta) = B(\pi(ca)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^*ca) \\
&= \psi((c^*b)^*a) = B(\pi(a)\xi, \pi(c^*b)\xi) = B(\pi(a)\xi, \pi(c^*)\pi(b)\xi) \\
&= \langle V\pi(a)\xi, \pi(c)^*\pi(b)\xi\rangle = \langle V\eta, \pi(c)^*\zeta\rangle = \langle \pi(c)V\eta, \zeta\rangle.
\end{aligned}$$

Entonces $V\pi(c) = \pi(c)V$, para todo $c \in A$. Luego es $V \in \pi(A)'$.

Definición

*Se dice que una funcional positiva $\varphi : A \to \mathbb{C}$ es **pura** si safisface la propiedad siguiente:*

Continuación.

Resta ver que $V \in \pi(A)'$. Sean $c \in A$, $\eta = \pi(a)\xi$ y $\zeta = \pi(b)\xi$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle V\pi(c)\eta, \zeta\rangle &= B(\pi(c)\eta, \zeta) = B(\pi(ca)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^*ca) \\ &= \psi((c^*b)^*a) = B(\pi(a)\xi, \pi(c^*b)\xi) = B(\pi(a)\xi, \pi(c^*)\pi(b)\xi) \\ &= \langle V\pi(a)\xi, \pi(c)^*\pi(b)\xi\rangle = \langle V\eta, \pi(c)^*\zeta\rangle = \langle \pi(c)V\eta, \zeta\rangle.\end{aligned}$$

Entonces $V\pi(c) = \pi(c)V$, para todo $c \in A$. Luego es $V \in \pi(A)'$.

Definición

Se dice que una funcional positiva $\varphi : A \to \mathbb{C}$ es ***pura*** *si safisface la propiedad siguiente:*

Continuación.

Resta ver que $V \in \pi(A)'$. Sean $c \in A$, $\eta = \pi(a)\xi$ y $\zeta = \pi(b)\xi$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle V\pi(c)\eta, \zeta\rangle &= B(\pi(c)\eta, \zeta) = B(\pi(ca)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^* ca)\\ &= \psi((c^* b)^* a) = B(\pi(a)\xi, \pi(c^* b)\xi) = B(\pi(a)\xi, \pi(c^*)\pi(b)\xi)\\ &= \langle V\pi(a)\xi, \pi(c)^*\pi(b)\xi\rangle = \langle V\eta, \pi(c)^*\zeta\rangle = \langle \pi(c)V\eta, \zeta\rangle.\end{aligned}$$

Entonces $V\pi(c) = \pi(c)V$, para todo $c \in A$. Luego es $V \in \pi(A)'$.

Definición

*Se dice que una funcional positiva $\varphi : A \to \mathbb{C}$ es **pura** si safisface la propiedad siguiente: si* $0 \leq \psi \leq \varphi$

Continuación.

Resta ver que $V \in \pi(A)'$. Sean $c \in A$, $\eta = \pi(a)\xi$ y $\zeta = \pi(b)\xi$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle V\pi(c)\eta, \zeta\rangle &= B(\pi(c)\eta, \zeta) = B(\pi(ca)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^*ca)\\ &= \psi((c^*b)^*a) = B(\pi(a)\xi, \pi(c^*b)\xi) = B(\pi(a)\xi, \pi(c^*)\pi(b)\xi)\\ &= \langle V\pi(a)\xi, \pi(c)^*\pi(b)\xi\rangle = \langle V\eta, \pi(c)^*\zeta\rangle = \langle \pi(c)V\eta, \zeta\rangle.\end{aligned}$$

Entonces $V\pi(c) = \pi(c)V$, para todo $c \in A$. Luego es $V \in \pi(A)'$.

Definición

Se dice que una funcional positiva $\varphi : A \to \mathbb{C}$ es **pura** *si safisface la propiedad siguiente: si $0 \leq \psi \leq \varphi$ entonces existe $\lambda \in [0, 1]$ tal que $\psi = \lambda\varphi$.*

Continuación.

Resta ver que $V \in \pi(A)'$. Sean $c \in A$, $\eta = \pi(a)\xi$ y $\zeta = \pi(b)\xi$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle V\pi(c)\eta, \zeta\rangle &= B(\pi(c)\eta, \zeta) = B(\pi(ca)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^*ca) \\ &= \psi((c^*b)^*a) = B(\pi(a)\xi, \pi(c^*b)\xi) = B(\pi(a)\xi, \pi(c^*)\pi(b)\xi) \\ &= \langle V\pi(a)\xi, \pi(c)^*\pi(b)\xi\rangle = \langle V\eta, \pi(c)^*\zeta\rangle = \langle \pi(c)V\eta, \zeta\rangle.\end{aligned}$$

Entonces $V\pi(c) = \pi(c)V$, para todo $c \in A$. Luego es $V \in \pi(A)'$.

Definición

Se dice que una funcional positiva $\varphi : A \to \mathbb{C}$ es **pura** *si safisface la propiedad siguiente: si $0 \leq \psi \leq \varphi$ entonces existe $\lambda \in [0, 1]$ tal que $\psi = \lambda\varphi$. Si además φ es un estado, se dice que φ es un* **estado puro**.

Continuación.

Resta ver que $V \in \pi(A)'$. Sean $c \in A$, $\eta = \pi(a)\xi$ y $\zeta = \pi(b)\xi$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle V\pi(c)\eta, \zeta\rangle &= B(\pi(c)\eta, \zeta) = B(\pi(ca)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^*ca) \\ &= \psi((c^*b)^*a) = B(\pi(a)\xi, \pi(c^*b)\xi) = B(\pi(a)\xi, \pi(c^*)\pi(b)\xi) \\ &= \langle V\pi(a)\xi, \pi(c)^*\pi(b)\xi\rangle = \langle V\eta, \pi(c)^*\zeta\rangle = \langle \pi(c)V\eta, \zeta\rangle.\end{aligned}$$

Entonces $V\pi(c) = \pi(c)V$, para todo $c \in A$. Luego es $V \in \pi(A)'$.

Definición

Se dice que una funcional positiva $\varphi : A \to \mathbb{C}$ es ***pura*** *si safisface la propiedad siguiente: si $0 \leq \psi \leq \varphi$ entonces existe $\lambda \in [0, 1]$ tal que $\psi = \lambda\varphi$. Si además φ es un estado, se dice que φ es un* ***estado puro****.*
Notación: $\mathrm{PS}(A) = \{\varphi : A \to \mathbb{C} : \varphi$ *es un estado puro*$\}$.

Continuación.

Resta ver que $V \in \pi(A)'$. Sean $c \in A$, $\eta = \pi(a)\xi$ y $\zeta = \pi(b)\xi$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle V\pi(c)\eta, \zeta\rangle &= B(\pi(c)\eta, \zeta) = B(\pi(ca)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^*ca)\\ &= \psi((c^*b)^*a) = B(\pi(a)\xi, \pi(c^*b)\xi) = B(\pi(a)\xi, \pi(c^*)\pi(b)\xi)\\ &= \langle V\pi(a)\xi, \pi(c)^*\pi(b)\xi\rangle = \langle V\eta, \pi(c)^*\zeta\rangle = \langle \pi(c)V\eta, \zeta\rangle.\end{aligned}$$

Entonces $V\pi(c) = \pi(c)V$, para todo $c \in A$. Luego es $V \in \pi(A)'$.

Definición

Se dice que una funcional positiva $\varphi : A \to \mathbb{C}$ es ***pura*** *si safisface la propiedad siguiente: si $0 \leq \psi \leq \varphi$ entonces existe $\lambda \in [0, 1]$ tal que $\psi = \lambda\varphi$. Si además φ es un estado, se dice que φ es un* ***estado puro****.*
Notación: $\mathrm{PS}(A) = \{\varphi : A \to \mathbb{C} : \varphi$ *es un estado puro*$\}$.

Teorema

Sea $\varphi : A \to \mathbb{C}$ un estado, y sea $(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ su GNS. Entonces π es irreducible si y sólo si φ es un estado puro.

Demostración.

Demostración.

Demostración.

$(\Rightarrow)$ Como π es irreducible, aplicando el Lema de Schur tenemos que $\pi(A)' = \mathbb{C}\mathrm{Id}$.

Demostración.

($\Rightarrow$) Como π es irreducible, aplicando el Lema de Schur tenemos que $\pi(A)' = \mathbb{C}\mathrm{Id}$. Si $0 \leq \psi \leq \varphi$,

Demostración.

($\Rightarrow$) Como π es irreducible, aplicando el Lema de Schur tenemos que $\pi(A)' = \mathbb{C}\mathrm{Id}$. Si $0 \leq \psi \leq \varphi$, sea $V \in \pi(A)'$ el operador dado por el lema previo para ψ,

Demostración.

$(\Rightarrow)$ Como π es irreducible, aplicando el Lema de Schur tenemos que $\pi(A)' = \mathbb{C}\mathrm{Id}$. Si $0 \leq \psi \leq \varphi$, sea $V \in \pi(A)'$ el operador dado por el lema previo para ψ, de modo que $\psi(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi\rangle$ para todo $a \in A$.

Demostración.

($\Rightarrow$) Como π es irreducible, aplicando el Lema de Schur tenemos que $\pi(A)' = \mathbb{C}\mathrm{Id}$. Si $0 \leq \psi \leq \varphi$, sea $V \in \pi(A)'$ el operador dado por el lema previo para ψ, de modo que $\psi(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi\rangle$ para todo $a \in A$. Entonces debe ser $V = \lambda\mathrm{Id}$,

Demostración.

($\Rightarrow$) Como π es irreducible, aplicando el Lema de Schur tenemos que $\pi(A)' = \mathbb{C}\mathrm{Id}$. Si $0 \leq \psi \leq \varphi$, sea $V \in \pi(A)'$ el operador dado por el lema previo para ψ, de modo que $\psi(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi \rangle$ para todo $a \in A$. Entonces debe ser $V = \lambda \mathrm{Id}$, para algún $\lambda \in \mathbb{C}$,

Demostración.

($\Rightarrow$) Como π es irreducible, aplicando el Lema de Schur tenemos que $\pi(A)' = \mathbb{C}\mathrm{Id}$. Si $0 \leq \psi \leq \varphi$, sea $V \in \pi(A)'$ el operador dado por el lema previo para ψ, de modo que $\psi(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi \rangle$ para todo $a \in A$. Entonces debe ser $V = \lambda \mathrm{Id}$, para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, y como además $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$,

Demostración.

($\Rightarrow$) Como π es irreducible, aplicando el Lema de Schur tenemos que $\pi(A)' = \mathbb{C}\mathrm{Id}$. Si $0 \leq \psi \leq \varphi$, sea $V \in \pi(A)'$ el operador dado por el lema previo para ψ, de modo que $\psi(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi\rangle$ para todo $a \in A$. Entonces debe ser $V = \lambda\mathrm{Id}$, para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, y como además $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$, entonces $0 \leq \lambda \leq 1$.

Demostración.

($\Rightarrow$) Como π es irreducible, aplicando el Lema de Schur tenemos que $\pi(A)' = \mathbb{C}\mathrm{Id}$. Si $0 \leq \psi \leq \varphi$, sea $V \in \pi(A)'$ el operador dado por el lema previo para ψ, de modo que $\psi(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi \rangle$ para todo $a \in A$. Entonces debe ser $V = \lambda\mathrm{Id}$, para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, y como además $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$, entonces $0 \leq \lambda \leq 1$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que para todo ψ tal que $0 \leq \psi \leq \varphi$ existe $\lambda \in [0, 1]$ tal que $\psi = \lambda\varphi$.

Demostración.

($\Rightarrow$) Como π es irreducible, aplicando el Lema de Schur tenemos que $\pi(A)' = \mathbb{C}\mathrm{Id}$. Si $0 \le \psi \le \varphi$, sea $V \in \pi(A)'$ el operador dado por el lema previo para ψ, de modo que $\psi(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi \rangle$ para todo $a \in A$. Entonces debe ser $V = \lambda\mathrm{Id}$, para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, y como además $0 \le V \le \mathrm{Id}$, entonces $0 \le \lambda \le 1$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que para todo ψ tal que $0 \le \psi \le \varphi$ existe $\lambda \in [0, 1]$ tal que $\psi = \lambda\varphi$. Sea $V \in \pi(A)'$ tal que $0 \le V \le \mathrm{Id}$,

Demostración.

($\Rightarrow$) Como π es irreducible, aplicando el Lema de Schur tenemos que $\pi(A)' = \mathbb{C}\mathrm{Id}$. Si $0 \leq \psi \leq \varphi$, sea $V \in \pi(A)'$ el operador dado por el lema previo para ψ, de modo que $\psi(a) = \langle \pi(a) V \xi, \xi \rangle$ para todo $a \in A$. Entonces debe ser $V = \lambda \mathrm{Id}$, para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, y como además $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$, entonces $0 \leq \lambda \leq 1$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que para todo ψ tal que $0 \leq \psi \leq \varphi$ existe $\lambda \in [0,1]$ tal que $\psi = \lambda\varphi$. Sea $V \in \pi(A)'$ tal que $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$, y sea $\psi_V : A \to \mathbb{C}$ dada por $\psi_V(a) = \langle \pi(a) V \xi, \xi \rangle = \langle \pi(a) \sqrt{V} \xi, \sqrt{V} \xi \rangle$ para todo $a \in A$.

Demostración.

($\Rightarrow$) Como π es irreducible, aplicando el Lema de Schur tenemos que $\pi(A)' = \mathbb{C}\mathrm{Id}$. Si $0 \leq \psi \leq \varphi$, sea $V \in \pi(A)'$ el operador dado por el lema previo para ψ, de modo que $\psi(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi \rangle$ para todo $a \in A$. Entonces debe ser $V = \lambda \mathrm{Id}$, para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, y como además $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$, entonces $0 \leq \lambda \leq 1$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que para todo ψ tal que $0 \leq \psi \leq \varphi$ existe $\lambda \in [0, 1]$ tal que $\psi = \lambda\varphi$. Sea $V \in \pi(A)'$ tal que $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$, y sea $\psi_V : A \to \mathbb{C}$ dada por $\psi_V(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi \rangle = \langle \pi(a)\sqrt{V}\xi, \sqrt{V}\xi \rangle$ para todo $a \in A$. Entonces $\psi_V \geq 0$.

Demostración.

($\Rightarrow$) Como π es irreducible, aplicando el Lema de Schur tenemos que $\pi(A)' = \mathbb{C}\mathrm{Id}$. Si $0 \leq \psi \leq \varphi$, sea $V \in \pi(A)'$ el operador dado por el lema previo para ψ, de modo que $\psi(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi \rangle$ para todo $a \in A$. Entonces debe ser $V = \lambda \mathrm{Id}$, para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, y como además $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$, entonces $0 \leq \lambda \leq 1$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que para todo ψ tal que $0 \leq \psi \leq \varphi$ existe $\lambda \in [0, 1]$ tal que $\psi = \lambda\varphi$. Sea $V \in \pi(A)'$ tal que $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$, y sea $\psi_V : A \to \mathbb{C}$ dada por $\psi_V(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi \rangle = \langle \pi(a)\sqrt{V}\xi, \sqrt{V}\xi \rangle$ para todo $a \in A$. Entonces $\psi_V \geq 0$. Además $\psi_V \leq \varphi$, porque si $a \in A_+$:

Demostración.

($\Rightarrow$) Como π es irreducible, aplicando el Lema de Schur tenemos que $\pi(A)' = \mathbb{C}\mathrm{Id}$. Si $0 \leq \psi \leq \varphi$, sea $V \in \pi(A)'$ el operador dado por el lema previo para ψ, de modo que $\psi(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi\rangle$ para todo $a \in A$. Entonces debe ser $V = \lambda\mathrm{Id}$, para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, y como además $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$, entonces $0 \leq \lambda \leq 1$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que para todo ψ tal que $0 \leq \psi \leq \varphi$ existe $\lambda \in [0,1]$ tal que $\psi = \lambda\varphi$. Sea $V \in \pi(A)'$ tal que $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$, y sea $\psi_V : A \to \mathbb{C}$ dada por $\psi_V(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi\rangle = \langle \pi(a)\sqrt{V}\xi, \sqrt{V}\xi\rangle$ para todo $a \in A$. Entonces $\psi_V \geq 0$. Además $\psi_V \leq \varphi$, porque si $a \in A_+$:

$\varphi(a) - \psi_V(a)$

Demostración.

($\Rightarrow$) Como π es irreducible, aplicando el Lema de Schur tenemos que $\pi(A)' = \mathbb{C}\mathrm{Id}$. Si $0 \leq \psi \leq \varphi$, sea $V \in \pi(A)'$ el operador dado por el lema previo para ψ, de modo que $\psi(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi\rangle$ para todo $a \in A$. Entonces debe ser $V = \lambda\mathrm{Id}$, para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, y como además $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$, entonces $0 \leq \lambda \leq 1$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que para todo ψ tal que $0 \leq \psi \leq \varphi$ existe $\lambda \in [0, 1]$ tal que $\psi = \lambda\varphi$. Sea $V \in \pi(A)'$ tal que $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$, y sea $\psi_V : A \to \mathbb{C}$ dada por $\psi_V(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi\rangle = \langle \pi(a)\sqrt{V}\xi, \sqrt{V}\xi\rangle$ para todo $a \in A$. Entonces $\psi_V \geq 0$. Además $\psi_V \leq \varphi$, porque si $a \in A_+$:

$$\varphi(a) - \psi_V(a) = \langle \pi(a)(Id - V)\xi, \xi\rangle$$

Demostración.

($\Rightarrow$) Como π es irreducible, aplicando el Lema de Schur tenemos que $\pi(A)' = \mathbb{C}\mathrm{Id}$. Si $0 \leq \psi \leq \varphi$, sea $V \in \pi(A)'$ el operador dado por el lema previo para ψ, de modo que $\psi(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi\rangle$ para todo $a \in A$. Entonces debe ser $V = \lambda \mathrm{Id}$, para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, y como además $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$, entonces $0 \leq \lambda \leq 1$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que para todo ψ tal que $0 \leq \psi \leq \varphi$ existe $\lambda \in [0, 1]$ tal que $\psi = \lambda\varphi$. Sea $V \in \pi(A)'$ tal que $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$, y sea $\psi_V : A \to \mathbb{C}$ dada por $\psi_V(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi\rangle = \langle \pi(a)\sqrt{V}\xi, \sqrt{V}\xi\rangle$ para todo $a \in A$. Entonces $\psi_V \geq 0$. Además $\psi_V \leq \varphi$, porque si $a \in A_+$:

$$\varphi(a) - \psi_V(a) = \langle \pi(a)(Id - V)\xi, \xi\rangle = \langle \pi(a)(Id - V)^{1/2}\xi, (Id - V)^{1/2}\xi\rangle$$

Demostración.

($\Rightarrow$) Como π es irreducible, aplicando el Lema de Schur tenemos que $\pi(A)' = \mathbb{C}\mathrm{Id}$. Si $0 \leq \psi \leq \varphi$, sea $V \in \pi(A)'$ el operador dado por el lema previo para ψ, de modo que $\psi(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi\rangle$ para todo $a \in A$. Entonces debe ser $V = \lambda\mathrm{Id}$, para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, y como además $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$, entonces $0 \leq \lambda \leq 1$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que para todo ψ tal que $0 \leq \psi \leq \varphi$ existe $\lambda \in [0,1]$ tal que $\psi = \lambda\varphi$. Sea $V \in \pi(A)'$ tal que $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$, y sea $\psi_V : A \to \mathbb{C}$ dada por $\psi_V(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi\rangle = \langle \pi(a)\sqrt{V}\xi, \sqrt{V}\xi\rangle$ para todo $a \in A$. Entonces $\psi_V \geq 0$. Además $\psi_V \leq \varphi$, porque si $a \in A_+$:

$$\varphi(a) - \psi_V(a) = \langle \pi(a)(Id - V)\xi, \xi\rangle = \langle \pi(a)(Id - V)^{1/2}\xi, (Id - V)^{1/2}\xi\rangle \geq 0.$$

Demostración.

($\Rightarrow$) Como π es irreducible, aplicando el Lema de Schur tenemos que $\pi(A)' = \mathbb{C}\mathrm{Id}$. Si $0 \leq \psi \leq \varphi$, sea $V \in \pi(A)'$ el operador dado por el lema previo para ψ, de modo que $\psi(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi\rangle$ para todo $a \in A$. Entonces debe ser $V = \lambda\mathrm{Id}$, para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, y como además $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$, entonces $0 \leq \lambda \leq 1$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que para todo ψ tal que $0 \leq \psi \leq \varphi$ existe $\lambda \in [0,1]$ tal que $\psi = \lambda\varphi$. Sea $V \in \pi(A)'$ tal que $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$, y sea $\psi_V : A \to \mathbb{C}$ dada por $\psi_V(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi\rangle = \langle \pi(a)\sqrt{V}\xi, \sqrt{V}\xi\rangle$ para todo $a \in A$. Entonces $\psi_V \geq 0$. Además $\psi_V \leq \varphi$, porque si $a \in A_+$:

$$\varphi(a) - \psi_V(a) = \langle \pi(a)(Id - V)\xi, \xi\rangle = \langle \pi(a)(Id - V)^{1/2}\xi, (Id - V)^{1/2}\xi\rangle \geq 0.$$

Luego existe $\lambda \in [0,1]$ tal que $\psi_V = \lambda\varphi$,

Demostración.

($\Rightarrow$) Como π es irreducible, aplicando el Lema de Schur tenemos que $\pi(A)' = \mathbb{C}\mathrm{Id}$. Si $0 \le \psi \le \varphi$, sea $V \in \pi(A)'$ el operador dado por el lema previo para ψ, de modo que $\psi(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi\rangle$ para todo $a \in A$. Entonces debe ser $V = \lambda\mathrm{Id}$, para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, y como además $0 \le V \le \mathrm{Id}$, entonces $0 \le \lambda \le 1$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que para todo ψ tal que $0 \le \psi \le \varphi$ existe $\lambda \in [0,1]$ tal que $\psi = \lambda\varphi$. Sea $V \in \pi(A)'$ tal que $0 \le V \le \mathrm{Id}$, y sea $\psi_V : A \to \mathbb{C}$ dada por $\psi_V(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi\rangle = \langle \pi(a)\sqrt{V}\xi, \sqrt{V}\xi\rangle$ para todo $a \in A$. Entonces $\psi_V \ge 0$. Además $\psi_V \le \varphi$, porque si $a \in A_+$:

$$\varphi(a) - \psi_V(a) = \langle \pi(a)(Id - V)\xi, \xi\rangle = \langle \pi(a)(Id - V)^{1/2}\xi, (Id - V)^{1/2}\xi\rangle \ge 0.$$

Luego existe $\lambda \in [0,1]$ tal que $\psi_V = \lambda\varphi$, es decir $\psi_V(a) = \langle \pi(a)\lambda Id\xi, \xi\rangle$ para todo $a \in A$,

Demostración.

($\Rightarrow$) Como π es irreducible, aplicando el Lema de Schur tenemos que $\pi(A)' = \mathbb{C}\mathrm{Id}$. Si $0 \leq \psi \leq \varphi$, sea $V \in \pi(A)'$ el operador dado por el lema previo para ψ, de modo que $\psi(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi\rangle$ para todo $a \in A$. Entonces debe ser $V = \lambda\mathrm{Id}$, para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, y como además $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$, entonces $0 \leq \lambda \leq 1$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que para todo ψ tal que $0 \leq \psi \leq \varphi$ existe $\lambda \in [0, 1]$ tal que $\psi = \lambda\varphi$. Sea $V \in \pi(A)'$ tal que $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$, y sea $\psi_V : A \to \mathbb{C}$ dada por $\psi_V(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi\rangle = \langle \pi(a)\sqrt{V}\xi, \sqrt{V}\xi\rangle$ para todo $a \in A$. Entonces $\psi_V \geq 0$. Además $\psi_V \leq \varphi$, porque si $a \in A_+$:

$$\varphi(a) - \psi_V(a) = \langle \pi(a)(Id - V)\xi, \xi\rangle = \langle \pi(a)(Id - V)^{1/2}\xi, (Id - V)^{1/2}\xi\rangle \geq 0.$$

Luego existe $\lambda \in [0, 1]$ tal que $\psi_V = \lambda\varphi$, es decir $\psi_V(a) = \langle \pi(a)\lambda Id\xi, \xi\rangle$ para todo $a \in A$, y por lo tanto $V = \lambda Id$ por la unicidad de V probada en el lema previo.

Demostración.

($\Rightarrow$) Como π es irreducible, aplicando el Lema de Schur tenemos que $\pi(A)' = \mathbb{C}\mathrm{Id}$. Si $0 \leq \psi \leq \varphi$, sea $V \in \pi(A)'$ el operador dado por el lema previo para ψ, de modo que $\psi(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi\rangle$ para todo $a \in A$. Entonces debe ser $V = \lambda\mathrm{Id}$, para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, y como además $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$, entonces $0 \leq \lambda \leq 1$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que para todo ψ tal que $0 \leq \psi \leq \varphi$ existe $\lambda \in [0,1]$ tal que $\psi = \lambda\varphi$. Sea $V \in \pi(A)'$ tal que $0 \leq V \leq \mathrm{Id}$, y sea $\psi_V : A \to \mathbb{C}$ dada por $\psi_V(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi\rangle = \langle \pi(a)\sqrt{V}\xi, \sqrt{V}\xi\rangle$ para todo $a \in A$. Entonces $\psi_V \geq 0$. Además $\psi_V \leq \varphi$, porque si $a \in A_+$:

$$\varphi(a) - \psi_V(a) = \langle \pi(a)(Id - V)\xi, \xi\rangle = \langle \pi(a)(Id - V)^{1/2}\xi, (Id - V)^{1/2}\xi\rangle \geq 0.$$

Luego existe $\lambda \in [0,1]$ tal que $\psi_V = \lambda\varphi$, es decir $\psi_V(a) = \langle \pi(a)\lambda Id\xi, \xi\rangle$ para todo $a \in A$, y por lo tanto $V = \lambda Id$ por la unicidad de V probada en el lema previo. Luego $\pi(A)' = \mathbb{C}Id$.

Demostración.

($\Rightarrow$) Como π es irreducible, aplicando el Lema de Schur tenemos que $\pi(A)' = \mathbb{C}\mathrm{Id}$. Si $0 \le \psi \le \varphi$, sea $V \in \pi(A)'$ el operador dado por el lema previo para ψ, de modo que $\psi(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi\rangle$ para todo $a \in A$. Entonces debe ser $V = \lambda\mathrm{Id}$, para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, y como además $0 \le V \le \mathrm{Id}$, entonces $0 \le \lambda \le 1$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que para todo ψ tal que $0 \le \psi \le \varphi$ existe $\lambda \in [0,1]$ tal que $\psi = \lambda\varphi$. Sea $V \in \pi(A)'$ tal que $0 \le V \le \mathrm{Id}$, y sea $\psi_V : A \to \mathbb{C}$ dada por $\psi_V(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi\rangle = \langle \pi(a)\sqrt{V}\xi, \sqrt{V}\xi\rangle$ para todo $a \in A$. Entonces $\psi_V \ge 0$. Además $\psi_V \le \varphi$, porque si $a \in A_+$:

$$\varphi(a) - \psi_V(a) = \langle \pi(a)(Id - V)\xi, \xi\rangle = \langle \pi(a)(Id - V)^{1/2}\xi, (Id - V)^{1/2}\xi\rangle \ge 0.$$

Luego existe $\lambda \in [0,1]$ tal que $\psi_V = \lambda\varphi$, es decir $\psi_V(a) = \langle \pi(a)\lambda Id\xi, \xi\rangle$ para todo $a \in A$, y por lo tanto $V = \lambda Id$ por la unicidad de V probada en el lema previo. Luego $\pi(A)' = \mathbb{C}Id$. El lema de Schur implica entonces que π es irreducible. $\square$

Observación

Si $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$ *y* $0 \leq \psi \leq \varphi$. *Entonces* $\psi = \|\psi\|\varphi$.

Observación

Si $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$ *y* $0 \leq \psi \leq \varphi$. *Entonces* $\psi = \|\psi\|\varphi$.

Observación

Si $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$ *y* $0 \leq \psi \leq \varphi$*. Entonces* $\psi = \|\psi\|\varphi$*. En efecto, como* $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$,

Observación

Si $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$ *y* $0 \leq \psi \leq \varphi$. *Entonces* $\psi = \|\psi\|\varphi$. *En efecto, como* $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, *se tiene que* $\psi = \lambda\varphi$ *para algún* $\lambda \in [0, 1]$.

Observación

Si $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$ *y* $0 \leq \psi \leq \varphi$. *Entonces* $\psi = \|\psi\|\varphi$. *En efecto, como* $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, *se tiene que* $\psi = \lambda\varphi$ *para algún* $\lambda \in [0, 1]$. *Entonces* $\|\psi\| = |\lambda|\|\varphi\| = |\lambda| = \lambda$. *Luego* $\psi = \|\psi\|\varphi$.

Observación

Si $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$ *y* $0 \leq \psi \leq \varphi$*. Entonces* $\psi = \|\psi\|\varphi$*. En efecto, como* $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$*, se tiene que* $\psi = \lambda\varphi$ *para algún* $\lambda \in [0, 1]$*. Entonces* $\|\psi\| = |\lambda|\|\varphi\| = |\lambda| = \lambda$*. Luego* $\psi = \|\psi\|\varphi$*.*

Ejemplos

Observación

Si $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$ *y* $0 \leq \psi \leq \varphi$. *Entonces* $\psi = \|\psi\|\varphi$. *En efecto, como* $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, *se tiene que* $\psi = \lambda\varphi$ *para algún* $\lambda \in [0, 1]$. *Entonces* $\|\psi\| = |\lambda|\|\varphi\| = |\lambda| = \lambda$. *Luego* $\psi = \|\psi\|\varphi$.

Ejemplos

(1) *Si* A *es conmutativa, entonces* $\mathrm{PS}(A) = \hat{A}$ *:*

Observación

Si $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$ *y* $0 \leq \psi \leq \varphi$. *Entonces* $\psi = \|\psi\|\varphi$. *En efecto, como* $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, *se tiene que* $\psi = \lambda\varphi$ *para algún* $\lambda \in [0, 1]$. *Entonces* $\|\psi\| = |\lambda|\|\varphi\| = |\lambda| = \lambda$. *Luego* $\psi = \|\psi\|\varphi$.

Ejemplos

(1) *Si* A *es conmutativa, entonces* $\mathrm{PS}(A) = \hat{A}$ *:*

Observación

Si $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$ *y* $0 \leq \psi \leq \varphi$. *Entonces* $\psi = \|\psi\|\varphi$. *En efecto, como* $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, *se tiene que* $\psi = \lambda\varphi$ *para algún* $\lambda \in [0,1]$. *Entonces* $\|\psi\| = |\lambda|\|\varphi\| = |\lambda| = \lambda$. *Luego* $\psi = \|\psi\|\varphi$.

Ejemplos

(1) *Si A es conmutativa, entonces* $\mathrm{PS}(A) = \hat{A}$ *: un estado es una medida de probabilidad,*

Observación

Si $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$ *y* $0 \leq \psi \leq \varphi$. *Entonces* $\psi = \|\psi\|\varphi$. *En efecto, como* $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, *se tiene que* $\psi = \lambda\varphi$ *para algún* $\lambda \in [0, 1]$. *Entonces* $\|\psi\| = |\lambda|\|\varphi\| = |\lambda| = \lambda$. *Luego* $\psi = \|\psi\|\varphi$.

Ejemplos

(1) *Si* A *es conmutativa, entonces* $\mathrm{PS}(A) = \hat{A}$ *: un estado es una medida de probabilidad, y esta probabilidad es pura si y sólo si su soporte tiene un único punto.*

Observación

Si $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$ *y* $0 \leq \psi \leq \varphi$. *Entonces* $\psi = \|\psi\|\varphi$. *En efecto, como* $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, *se tiene que* $\psi = \lambda\varphi$ *para algún* $\lambda \in [0,1]$. *Entonces* $\|\psi\| = |\lambda|\|\varphi\| = |\lambda| = \lambda$. *Luego* $\psi = \|\psi\|\varphi$.

Ejemplos

(1) *Si* A *es conmutativa, entonces* $\mathrm{PS}(A) = \hat{A}$ *: un estado es una medida de probabilidad, y esta probabilidad es pura si y sólo si su soporte tiene un único punto. Otra manera de verlo es notar que las representaciones irreducibles de* A *deben ser unidimensionales,*

Observación

Si $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$ *y* $0 \leq \psi \leq \varphi$. *Entonces* $\psi = \|\psi\|\varphi$. *En efecto, como* $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, *se tiene que* $\psi = \lambda\varphi$ *para algún* $\lambda \in [0, 1]$. *Entonces* $\|\psi\| = |\lambda|\|\varphi\| = |\lambda| = \lambda$. *Luego* $\psi = \|\psi\|\varphi$.

Ejemplos

(1) *Si* A *es conmutativa, entonces* $\mathrm{PS}(A) = \hat{A}$ *: un estado es una medida de probabilidad, y esta probabilidad es pura si y sólo si su soporte tiene un único punto. Otra manera de verlo es notar que las representaciones irreducibles de* A *deben ser unidimensionales, lo cual se deduce del Lema de Schur.*

(2) *Sean* $\mathrm{K} = \mathrm{K}(\ell^2(\mathbb{N}))$ *y* $\xi \in \ell^2(\mathbb{N})$ *tal que* $\|\xi\| = 1$.

Observación

Si $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$ *y* $0 \leq \psi \leq \varphi$. *Entonces* $\psi = \|\psi\|\varphi$. *En efecto, como* $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, *se tiene que* $\psi = \lambda\varphi$ *para algún* $\lambda \in [0,1]$. *Entonces* $\|\psi\| = |\lambda|\|\varphi\| = |\lambda| = \lambda$. *Luego* $\psi = \|\psi\|\varphi$.

Ejemplos

(1) *Si* A *es conmutativa, entonces* $\mathrm{PS}(A) = \hat{A}$ *: un estado es una medida de probabilidad, y esta probabilidad es pura si y sólo si su soporte tiene un único punto. Otra manera de verlo es notar que las representaciones irreducibles de* A *deben ser unidimensionales, lo cual se deduce del Lema de Schur.*

(2) *Sean* $\mathrm{K} = \mathrm{K}(\ell^2(\mathbb{N}))$ *y* $\xi \in \ell^2(\mathbb{N})$ *tal que* $\|\xi\| = 1$.

Observación

Si $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$ *y* $0 \leq \psi \leq \varphi$. *Entonces* $\psi = \|\psi\|\varphi$. *En efecto, como* $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, *se tiene que* $\psi = \lambda\varphi$ *para algún* $\lambda \in [0,1]$. *Entonces* $\|\psi\| = |\lambda|\|\varphi\| = |\lambda| = \lambda$. *Luego* $\psi = \|\psi\|\varphi$.

Ejemplos

(1) *Si* A *es conmutativa, entonces* $\mathrm{PS}(A) = \hat{A}$ *: un estado es una medida de probabilidad, y esta probabilidad es pura si y sólo si su soporte tiene un único punto. Otra manera de verlo es notar que las representaciones irreducibles de* A *deben ser unidimensionales, lo cual se deduce del Lema de Schur.*

(2) *Sean* $\mathrm{K} = \mathrm{K}(\ell^2(\mathbb{N}))$ *y* $\xi \in \ell^2(\mathbb{N})$ *tal que* $\|\xi\| = 1$. *La funcional* $w_\xi : \mathrm{K} \to \mathbb{C}$ *tal que* $w_\xi(a) = \langle a\xi, \xi \rangle$ *es un estado puro.*

Observación

Si $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$ *y* $0 \leq \psi \leq \varphi$. *Entonces* $\psi = \|\psi\|\varphi$. *En efecto, como* $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, *se tiene que* $\psi = \lambda\varphi$ *para algún* $\lambda \in [0,1]$. *Entonces* $\|\psi\| = |\lambda|\|\varphi\| = |\lambda| = \lambda$. *Luego* $\psi = \|\psi\|\varphi$.

Ejemplos

(1) *Si A es conmutativa, entonces* $\mathrm{PS}(A) = \hat{A}$ *: un estado es una medida de probabilidad, y esta probabilidad es pura si y sólo si su soporte tiene un único punto. Otra manera de verlo es notar que las representaciones irreducibles de A deben ser unidimensionales, lo cual se deduce del Lema de Schur.*

(2) *Sean* $\mathrm{K} = \mathrm{K}(\ell^2(\mathbb{N}))$ *y* $\xi \in \ell^2(\mathbb{N})$ *tal que* $\|\xi\| = 1$. *La funcional* $w_\xi : \mathrm{K} \to \mathbb{C}$ *tal que* $w_\xi(a) = \langle a\xi, \xi\rangle$ *es un estado puro. Basta usar la unicidad de la GNS y notar que la inclusión* $\iota : \mathrm{K} \hookrightarrow \mathrm{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ *es una representación irreducible de* K

Observación

Si $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$ *y* $0 \leq \psi \leq \varphi$. *Entonces* $\psi = \|\psi\|\varphi$. *En efecto, como* $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, *se tiene que* $\psi = \lambda\varphi$ *para algún* $\lambda \in [0,1]$. *Entonces* $\|\psi\| = |\lambda|\|\varphi\| = |\lambda| = \lambda$. *Luego* $\psi = \|\psi\|\varphi$.

Ejemplos

(1) *Si* A *es conmutativa, entonces* $\mathrm{PS}(A) = \hat{A}$ *: un estado es una medida de probabilidad, y esta probabilidad es pura si y sólo si su soporte tiene un único punto. Otra manera de verlo es notar que las representaciones irreducibles de* A *deben ser unidimensionales, lo cual se deduce del Lema de Schur.*

(2) *Sean* $\mathrm{K} = \mathrm{K}(\ell^2(\mathbb{N}))$ *y* $\xi \in \ell^2(\mathbb{N})$ *tal que* $\|\xi\| = 1$. *La funcional* $w_\xi : \mathrm{K} \to \mathbb{C}$ *tal que* $w_\xi(a) = \langle a\xi, \xi\rangle$ *es un estado puro. Basta usar la unicidad de la GNS y notar que la inclusión* $\iota : \mathrm{K} \hookrightarrow \mathrm{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ *es una representación irreducible de* K *(dados* $\eta \neq 0 \neq \zeta \in \ell^2(\mathbb{N})$*, se tiene* $\frac{1}{\|\eta\|^2}\theta_{\zeta,\eta}(\eta) = \zeta$*).*

Observación

Si $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$ *y* $0 \leq \psi \leq \varphi$. *Entonces* $\psi = \|\psi\|\varphi$. *En efecto, como* $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, *se tiene que* $\psi = \lambda\varphi$ *para algún* $\lambda \in [0,1]$. *Entonces* $\|\psi\| = |\lambda|\|\varphi\| = |\lambda| = \lambda$. *Luego* $\psi = \|\psi\|\varphi$.

Ejemplos

(1) *Si* A *es conmutativa, entonces* $\mathrm{PS}(A) = \hat{A}$ *: un estado es una medida de probabilidad, y esta probabilidad es pura si y sólo si su soporte tiene un único punto. Otra manera de verlo es notar que las representaciones irreducibles de* A *deben ser unidimensionales, lo cual se deduce del Lema de Schur.*

(2) *Sean* $\mathrm{K} = \mathrm{K}(\ell^2(\mathbb{N}))$ *y* $\xi \in \ell^2(\mathbb{N})$ *tal que* $\|\xi\| = 1$. *La funcional* $w_\xi : \mathrm{K} \to \mathbb{C}$ *tal que* $w_\xi(a) = \langle a\xi, \xi\rangle$ *es un estado puro. Basta usar la unicidad de la GNS y notar que la inclusión* $\iota : \mathrm{K} \hookrightarrow \mathrm{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ *es una representación irreducible de* K *(dados* $\eta \neq 0 \neq \zeta \in \ell^2(\mathbb{N})$, *se tiene* $\frac{1}{\|\eta\|^2}\theta_{\zeta,\eta}(\eta) = \zeta$*). Se puede ver que la única representación irreducible de* $\mathcal{K}$ *es, a menos de equivalencia unitaria, la inclusión* $\mathrm{K} \hookrightarrow \mathrm{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$.

Observación

Si $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$ *y* $0 \leq \psi \leq \varphi$*. Entonces* $\psi = \|\psi\|\varphi$*. En efecto, como* $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$*, se tiene que* $\psi = \lambda\varphi$ *para algún* $\lambda \in [0,1]$*. Entonces* $\|\psi\| = |\lambda|\|\varphi\| = |\lambda| = \lambda$*. Luego* $\psi = \|\psi\|\varphi$*.*

Ejemplos

(1) *Si* A *es conmutativa, entonces* $\mathrm{PS}(A) = \hat{A}$ *: un estado es una medida de probabilidad, y esta probabilidad es pura si y sólo si su soporte tiene un único punto. Otra manera de verlo es notar que las representaciones irreducibles de* A *deben ser unidimensionales, lo cual se deduce del Lema de Schur.*

(2) *Sean* $\mathrm{K} = \mathrm{K}(\ell^2(\mathbb{N}))$ *y* $\xi \in \ell^2(\mathbb{N})$ *tal que* $\|\xi\| = 1$*. La funcional* $w_\xi : \mathrm{K} \to \mathbb{C}$ *tal que* $w_\xi(a) = \langle a\xi, \xi\rangle$ *es un estado puro. Basta usar la unicidad de la GNS y notar que la inclusión* $\iota : \mathrm{K} \hookrightarrow \mathrm{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ *es una representación irreducible de* K *(dados* $\eta \neq 0 \neq \zeta \in \ell^2(\mathbb{N})$*, se tiene* $\frac{1}{\|\eta\|^2}\theta_{\zeta,\eta}(\eta) = \zeta$*). Se puede ver que la única representación irreducible de* $\mathcal{K}$ *es, a menos de equivalencia unitaria, la inclusión* $\mathrm{K} \hookrightarrow \mathrm{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$*. Por lo tanto* $\mathrm{PS}(\mathrm{A}) = \{w_\xi : \xi \in \mathcal{H}, \|\xi\| = 1\} \sim S_{\mathcal{H}}(0,1)$*.*

Sea V un espacio vectorial.

Repaso sobre el teorema de Krein-Milman.

Sea V un espacio vectorial. Si $x, y \in V$ el *segmento* de extremos x e y es el conjunto

Repaso sobre el teorema de Krein-Milman.

Sea V un espacio vectorial. Si $x, y \in V$ el *segmento* de extremos x e y es el conjunto

$$[x, y] := \{x + t(y - x) : \ t \in [0, 1]\}.$$

Repaso sobre el teorema de Krein-Milman.

Sea V un espacio vectorial. Si $x, y \in V$ el *segmento* de extremos x e y es el conjunto

$$[x, y] := \{x + t(y - x) : \ t \in [0, 1]\}.$$

Indicaremos por $(x, y) := \{x + t(y - x) : \ t \in (0, 1)\}$.

Sea V un espacio vectorial. Si $x, y \in$ V el *segmento* de extremos x e y es el conjunto

$$[x, y] := \{x + t(y - x) : \ t \in [0, 1]\}.$$

Indicaremos por $(x, y) := \{x + t(y - x) : \ t \in (0, 1)\}$. Un subconjunto C de V es *convexo* si se tiene

Repaso sobre el teorema de Krein-Milman.

Sea V un espacio vectorial. Si $x, y \in V$ el *segmento* de extremos x e y es el conjunto

$$[x, y] := \{x + t(y - x) : \ t \in [0, 1]\}.$$

Indicaremos por $(x, y) := \{x + t(y - x) : \ t \in (0, 1)\}$. Un subconjunto C de V es *convexo* si se tiene $[x, y] \subseteq C$ siempre que $x, y \in C$.

Sea V un espacio vectorial. Si $x, y \in$ V el *segmento* de extremos x e y es el conjunto

$$[x, y] := \{x + t(y - x) : \ t \in [0, 1]\}.$$

Indicaremos por $(x, y) := \{x + t(y - x) : \ t \in (0, 1)\}$. Un subconjunto C de V es *convexo* si se tiene $[x, y] \subseteq C$ siempre que $x, y \in C$.

Una combinación convexa de elementos de $X \subseteq$ V es un elemento de la forma

Repaso sobre el teorema de Krein-Milman.

Sea V un espacio vectorial. Si $x, y \in V$ el *segmento* de extremos x e y es el conjunto

$$[x, y] := \{x + t(y - x) : \; t \in [0, 1]\}.$$

Indicaremos por $(x, y) := \{x + t(y - x) : \; t \in (0, 1)\}$. Un subconjunto C de V es *convexo* si se tiene $[x, y] \subseteq C$ siempre que $x, y \in C$.

Una combinación convexa de elementos de $X \subseteq V$ es un elemento de la forma

$$t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n,$$

Repaso sobre el teorema de Krein-Milman.

Sea V un espacio vectorial. Si $x, y \in$ V el *segmento* de extremos x e y es el conjunto

$$[x, y] := \{x + t(y - x) : \ t \in [0, 1]\}.$$

Indicaremos por $(x, y) := \{x + t(y - x) : \ t \in (0, 1)\}$. Un subconjunto C de V es *convexo* si se tiene $[x, y] \subseteq C$ siempre que $x, y \in C$.

Una combinación convexa de elementos de $X \subseteq$ V es un elemento de la forma

$$t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n,$$

con $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $t_1, \ldots, t_n \geq 0$ tales que $\sum_{j=1}^{n} t_j = 1$.

Repaso sobre el teorema de Krein-Milman.

Sea V un espacio vectorial. Si $x, y \in$ V el *segmento* de extremos x e y es el conjunto

$$[x, y] := \{x + t(y - x) : \ t \in [0, 1]\}.$$

Indicaremos por $(x, y) := \{x + t(y - x) : \ t \in (0, 1)\}$. Un subconjunto C de V es *convexo* si se tiene $[x, y] \subseteq C$ siempre que $x, y \in C$.

Una combinación convexa de elementos de $X \subseteq$ V es un elemento de la forma

$$t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n,$$

con $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $t_1, \ldots, t_n \geq 0$ tales que $\sum_{j=1}^{n} t_j = 1$.

El conjunto $\mathrm{Conv}(X)$ de las combinaciones convexas de elementos de X se llama *cápsula convexa* de X,

Repaso sobre el teorema de Krein-Milman.

Sea V un espacio vectorial. Si $x, y \in \mathrm{V}$ el *segmento* de extremos x e y es el conjunto

$$[x, y] := \{x + t(y - x) : \ t \in [0, 1]\}.$$

Indicaremos por $(x, y) := \{x + t(y - x) : \ t \in (0, 1)\}$. Un subconjunto C de V es *convexo* si se tiene $[x, y] \subseteq C$ siempre que $x, y \in C$.

Una combinación convexa de elementos de $X \subseteq \mathrm{V}$ es un elemento de la forma

$$t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n,$$

con $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $t_1, \ldots, t_n \geq 0$ tales que $\sum_{j=1}^{n} t_j = 1$.

El conjunto $\mathrm{Conv}(X)$ de las combinaciones convexas de elementos de X se llama *cápsula convexa* de X, y es el conjunto convexo más chico que contiene a X.

Repaso sobre el teorema de Krein-Milman.

Sea V un espacio vectorial. Si $x, y \in V$ el *segmento* de extremos x e y es el conjunto

$$[x, y] := \{x + t(y - x) : \ t \in [0, 1]\}.$$

Indicaremos por $(x, y) := \{x + t(y - x) : \ t \in (0, 1)\}$. Un subconjunto C de V es *convexo* si se tiene $[x, y] \subseteq C$ siempre que $x, y \in C$.

Una combinación convexa de elementos de $X \subseteq V$ es un elemento de la forma

$$t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n,$$

con $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $t_1, \ldots, t_n \geq 0$ tales que $\sum_{j=1}^{n} t_j = 1$.

El conjunto $\mathrm{Conv}(X)$ de las combinaciones convexas de elementos de X se llama *cápsula convexa* de X, y es el conjunto convexo más chico que contiene a X.

Se dice que un subconjunto E de X es *extremal* en X si, siempre que $(x, y) \cap E \neq \emptyset$ con $x, y \in X$, entonces $x, y \in E$.

Un punto $p \in C$ es extremal en C si el conjunto $\{p\}$ es extremal en C, es decir, Un punto $p \in C$ es extremal en C si el conjunto $\{p\}$ es extremal en C, es decir, si $p \in (x, y)$ con $x, y \in C$ implica que $p \in C$.

Un punto $p \in C$ es extremal en C si el conjunto $\{p\}$ es extremal en C, es decir, si $p \in (x, y)$ con $x, y \in C$ implica que $p \in C$. El conjunto de puntos extremales de C será denotado $\mathrm{ext}(C)$.

Un punto $p \in C$ es extremal en C si el conjunto $\{p\}$ es extremal en C, es decir, si $p \in (x, y)$ con $x, y \in C$ implica que $p \in C$. El conjunto de puntos extremales de C será denotado $\mathrm{ext}(C)$. Es fácil verificar que la relación de ser un subconjunto extremal es transitiva, Un punto $p \in C$ es extremal en C si el conjunto $\{p\}$ es extremal en C, es decir, si $p \in (x, y)$ con $x, y \in C$ implica que $p \in C$. El conjunto de puntos extremales de C será denotado $\mathrm{ext}(C)$. Es fácil verificar que la relación de ser un subconjunto extremal es transitiva, de donde se deduce que si E es un subconjunto extremal en C, Un punto $p \in C$ es extremal en C si el conjunto $\{p\}$ es extremal en C, es decir, si $p \in (x, y)$ con $x, y \in C$ implica que $p \in C$. El conjunto de puntos extremales de C será denotado $\operatorname{ext}(C)$. Es fácil verificar que la relación de ser un subconjunto extremal es transitiva, de donde se deduce que si E es un subconjunto extremal en C, entonces $\operatorname{ext}(E) = E \cap \operatorname{ext}(C)$.

Un punto $p \in C$ es extremal en C si el conjunto $\{p\}$ es extremal en C, es decir, si $p \in (x, y)$ con $x, y \in C$ implica que $p \in C$. El conjunto de puntos extremales de C será denotado $\mathrm{ext}(C)$. Es fácil verificar que la relación de ser un subconjunto extremal es transitiva, de donde se deduce que si E es un subconjunto extremal en C, entonces $\mathrm{ext}(E) = E \cap \mathrm{ext}(C)$.

El resultado básico sobre puntos extremales es el siguiente:

Un punto $p \in C$ es extremal en C si el conjunto $\{p\}$ es extremal en C, es decir, si $p \in (x, y)$ con $x, y \in C$ implica que $p \in C$. El conjunto de puntos extremales de C será denotado $\text{ext}(C)$. Es fácil verificar que la relación de ser un subconjunto extremal es transitiva, de donde se deduce que si E es un subconjunto extremal en C, entonces $\text{ext}(E) = E \cap \text{ext}(C)$.

El resultado básico sobre puntos extremales es el siguiente:

Teorema (Krein-Milman)

Sean E un espacio localmente convexo y de Hausdorff, y supongamos que $K \subseteq E$ es un subconjunto compacto y convexo.

Un punto $p \in C$ es extremal en C si el conjunto $\{p\}$ es extremal en C, es decir, si $p \in (x, y)$ con $x, y \in C$ implica que $p \in C$. El conjunto de puntos extremales de C será denotado $\mathrm{ext}(C)$. Es fácil verificar que la relación de ser un subconjunto extremal es transitiva, de donde se deduce que si E es un subconjunto extremal en C, entonces $\mathrm{ext}(E) = E \cap \mathrm{ext}(C)$.

El resultado básico sobre puntos extremales es el siguiente:

Teorema (Krein-Milman)

Sean E un espacio localmente convexo y de Hausdorff, y supongamos que $K \subseteq E$ es un subconjunto compacto y convexo.

Un punto $p \in C$ es extremal en C si el conjunto $\{p\}$ es extremal en C, es decir, si $p \in (x, y)$ con $x, y \in C$ implica que $p \in C$. El conjunto de puntos extremales de C será denotado $\mathrm{ext}(C)$. Es fácil verificar que la relación de ser un subconjunto extremal es transitiva, de donde se deduce que si E es un subconjunto extremal en C, entonces $\mathrm{ext}(E) = E \cap \mathrm{ext}(C)$.

El resultado básico sobre puntos extremales es el siguiente:

Teorema (Krein-Milman)

Sean E un espacio localmente convexo y de Hausdorff, y supongamos que $K \subseteq E$ es un subconjunto compacto y convexo. Entonces $\mathrm{ext}(K) \neq \emptyset$, y $K = \overline{Conv(K)}$.

Un punto $p \in C$ es extremal en C si el conjunto $\{p\}$ es extremal en C, es decir, si $p \in (x, y)$ con $x, y \in C$ implica que $p \in C$. El conjunto de puntos extremales de C será denotado $\operatorname{ext}(C)$. Es fácil verificar que la relación de ser un subconjunto extremal es transitiva, de donde se deduce que si E es un subconjunto extremal en C, entonces $\operatorname{ext}(E) = E \cap \operatorname{ext}(C)$.

El resultado básico sobre puntos extremales es el siguiente:

Teorema (Krein-Milman)

Sean E un espacio localmente convexo y de Hausdorff, y supongamos que $K \subseteq E$ es un subconjunto compacto y convexo. Entonces $\operatorname{ext}(K) \neq \emptyset$, y $K = \overline{Conv(K)}$.

Es frecuente utilizar el Teorema de Krein-Milman en combinación con el siguiente:

Un punto $p \in C$ es extremal en C si el conjunto $\{p\}$ es extremal en C, es decir, si $p \in (x, y)$ con $x, y \in C$ implica que $p \in C$. El conjunto de puntos extremales de C será denotado $\mathrm{ext}(C)$. Es fácil verificar que la relación de ser un subconjunto extremal es transitiva, de donde se deduce que si E es un subconjunto extremal en C, entonces $\mathrm{ext}(E) = E \cap \mathrm{ext}(C)$.

El resultado básico sobre puntos extremales es el siguiente:

Teorema (Krein-Milman)

Sean E un espacio localmente convexo y de Hausdorff, y supongamos que $K \subseteq E$ es un subconjunto compacto y convexo. Entonces $\mathrm{ext}(K) \neq \emptyset$, y $K = \overline{Conv(K)}$.

Es frecuente utilizar el Teorema de Krein-Milman en combinación con el siguiente:

Teorema (Banach-Alaoglu)

Si $E^\star$ es el espacio dual de un espacio normado E, entonces $\bar{B}_{E^\star}(0, 1)$ es w^*-compacto.

Teorema

Sean A una C^*-álgebra y $\mathrm{QS}(A) := \{\varphi : A \to \mathbb{C} : \varphi \geq 0 \text{ y } \|\varphi\| \leq 1\}$.

Teorema

Sean A una C^*-álgebra y $\mathrm{QS}(A) := \{\varphi : A \to \mathbb{C} : \varphi \geq 0 \text{ y } \|\varphi\| \leq 1\}$.

Teorema

Sean A una C^*-álgebra y $\mathrm{QS}(A) := \{\varphi : A \to \mathbb{C} : \varphi \geq 0 \text{ y } \|\varphi\| \leq 1\}$.
Entonces $\mathrm{QS}(A)$ *es convexo y w^*-compacto,*

Teorema

Sean A una C^*-álgebra y $\mathrm{QS}(A) := \{\varphi : A \to \mathbb{C} : \varphi \geq 0$ *y* $\|\varphi\| \leq 1\}$*.*
Entonces $\mathrm{QS}(A)$ *es convexo y w^*-compacto, y* $\mathrm{ext}(\mathrm{QS}(A)) = \mathrm{PS}(A) \cup \{0\}$*.*

Demostración.

Teorema

Sean A *una* C^**-álgebra y* $\mathrm{QS}(A) := \{\varphi : A \to \mathbb{C} : \varphi \geq 0 \text{ y } \|\varphi\| \leq 1\}$.
Entonces $\mathrm{QS}(A)$ *es convexo y* w^**-compacto, y* $\mathrm{ext}(\mathrm{QS}(A)) = \mathrm{PS}(A) \cup \{0\}$.

Demostración.

Teorema

Sean A una C^*-álgebra y $\mathrm{QS}(A) := \{\varphi : A \to \mathbb{C} : \varphi \geq 0 \text{ y } \|\varphi\| \leq 1\}$. *Entonces* $\mathrm{QS}(A)$ *es convexo y w^*-compacto, y* $\mathrm{ext}(\mathrm{QS}(A)) = \mathrm{PS}(A) \cup \{0\}$.

Demostración.

Como $\overline{B(0,1)} = \{\varphi \in A^\star : \|\varphi\| \leq 1\}$ es convexo y w^*-compacto,

Teorema

Sean A una C^*-álgebra y $\mathrm{QS}(A) := \{\varphi : A \to \mathbb{C} : \varphi \geq 0$ *y* $\|\varphi\| \leq 1\}$. *Entonces* $\mathrm{QS}(A)$ *es convexo y w^*-compacto, y* $\mathrm{ext}(\mathrm{QS}(A)) = \mathrm{PS}(A) \cup \{0\}$.

Demostración.

Como $\overline{B(0,1)} = \{\varphi \in A^\star : \|\varphi\| \leq 1\}$ es convexo y w^*-compacto, y $\{\varphi \geq 0\}$ es claramente convexo,

Teorema

Sean A una C^*-álgebra y $\mathrm{QS}(A) := \{\varphi : A \to \mathbb{C} : \varphi \geq 0 \text{ y } \|\varphi\| \leq 1\}$. *Entonces* $\mathrm{QS}(A)$ *es convexo y w^*-compacto, y* $\mathrm{ext}(\mathrm{QS}(A)) = \mathrm{PS}(A) \cup \{0\}$.

Demostración.

Como $\overline{B(0,1)} = \{\varphi \in A^\star : \|\varphi\| \leq 1\}$ es convexo y w^*-compacto, y $\{\varphi \geq 0\}$ es claramente convexo, basta mostrar que este último es w^*-cerrado para concluir que $\mathrm{QS}(A)$ es w^*-compacto.

Teorema

Sean A una C^*-álgebra y $\mathrm{QS}(A) := \{\varphi : A \to \mathbb{C} : \varphi \geq 0 \text{ y } \|\varphi\| \leq 1\}$. *Entonces* $\mathrm{QS}(A)$ *es convexo y* w^**-compacto, y* $\mathrm{ext}(\mathrm{QS}(A)) = \mathrm{PS}(A) \cup \{0\}$.

Demostración.

Como $\overline{B(0,1)} = \{\varphi \in A^\star : \|\varphi\| \leq 1\}$ es convexo y w^*-compacto, y $\{\varphi \geq 0\}$ es claramente convexo, basta mostrar que este último es w^*-cerrado para concluir que $\mathrm{QS}(A)$ es w^*-compacto. Ahora, si $(\varphi_i) \subseteq \{\varphi \geq 0\}$ es tal que $\varphi_i \xrightarrow{w^*}_i \varphi$,

Teorema

Sean A una C^*-álgebra y $\mathrm{QS}(A) := \{\varphi : A \to \mathbb{C} : \varphi \geq 0$ *y* $\|\varphi\| \leq 1\}$*.*
Entonces $\mathrm{QS}(A)$ *es convexo y w^*-compacto, y* $\mathrm{ext}(\mathrm{QS}(A)) = \mathrm{PS}(A) \cup \{0\}$*.*

Demostración.

Como $\overline{B(0,1)} = \{\varphi \in A^\star : \|\varphi\| \leq 1\}$ es convexo y w^*-compacto, y $\{\varphi \geq 0\}$ es claramente convexo, basta mostrar que este último es w^*-cerrado para concluir que $\mathrm{QS}(A)$ es w^*-compacto. Ahora, si $(\varphi_i) \subseteq \{\varphi \geq 0\}$ es tal que $\varphi_i \xrightarrow{w^*}_i \varphi$, entonces $\varphi_i(a) \to \varphi(a)$ para todo $a \in A_+$,

Teorema

Sean A una C^*-álgebra y $\mathrm{QS}(A) := \{\varphi : A \to \mathbb{C} : \varphi \geq 0$ *y* $\|\varphi\| \leq 1\}$. *Entonces* $\mathrm{QS}(A)$ *es convexo y* w^**-compacto, y* $\mathrm{ext}(\mathrm{QS}(A)) = \mathrm{PS}(A) \cup \{0\}$.

Demostración.

Como $\overline{B(0,1)} = \{\varphi \in A^\star : \|\varphi\| \leq 1\}$ es convexo y w^*-compacto, y $\{\varphi \geq 0\}$ es claramente convexo, basta mostrar que este último es w^*-cerrado para concluir que $\mathrm{QS}(A)$ es w^*-compacto. Ahora, si $(\varphi_i) \subseteq \{\varphi \geq 0\}$ es tal que $\varphi_i \overset{w^*}{\to}_i \varphi$, entonces $\varphi_i(a) \to \varphi(a)$ para todo $a \in A_+$, de modo que $\varphi(a) \geq 0$ porque $\varphi_i(a) \geq 0\ \forall i$.

Teorema

Sean A una C^*-álgebra y $\mathrm{QS}(A) := \{\varphi : A \to \mathbb{C} : \varphi \geq 0 \text{ y } \|\varphi\| \leq 1\}$. *Entonces* $\mathrm{QS}(A)$ *es convexo y w^*-compacto, y* $\mathrm{ext}(\mathrm{QS}(A)) = \mathrm{PS}(A) \cup \{0\}$.

Demostración.

Como $\overline{B(0,1)} = \{\varphi \in A^\star : \|\varphi\| \leq 1\}$ es convexo y w^*-compacto, y $\{\varphi \geq 0\}$ es claramente convexo, basta mostrar que este último es w^*-cerrado para concluir que $\mathrm{QS}(A)$ es w^*-compacto. Ahora, si $(\varphi_i) \subseteq \{\varphi \geq 0\}$ es tal que $\varphi_i \overset{w^*}{\to}_i \varphi$, entonces $\varphi_i(a) \to \varphi(a)$ para todo $a \in A_+$, de modo que $\varphi(a) \geq 0$ porque $\varphi_i(a) \geq 0\ \forall i$. Luego $\varphi \geq 0$.

Teorema

Sean A una C^*-álgebra y $\mathrm{QS}(A) := \{\varphi : A \to \mathbb{C} : \varphi \geq 0$ *y* $\|\varphi\| \leq 1\}$. *Entonces* $\mathrm{QS}(A)$ *es convexo y* w^**-compacto, y* $\mathrm{ext}(\mathrm{QS}(A)) = \mathrm{PS}(A) \cup \{0\}$.

Demostración.

Como $\overline{B(0,1)} = \{\varphi \in A^\star : \|\varphi\| \leq 1\}$ es convexo y w^*-compacto, y $\{\varphi \geq 0\}$ es claramente convexo, basta mostrar que este último es w^*-cerrado para concluir que $\mathrm{QS}(A)$ es w^*-compacto. Ahora, si $(\varphi_i) \subseteq \{\varphi \geq 0\}$ es tal que $\varphi_i \overset{w^*}{\to}_i \varphi$, entonces $\varphi_i(a) \to \varphi(a)$ para todo $a \in A_+$, de modo que $\varphi(a) \geq 0$ porque $\varphi_i(a) \geq 0\ \forall i$. Luego $\varphi \geq 0$.

Para abreviar pongamos $\mathcal{E}$ en lugar de $\mathrm{ext}(\mathrm{QS}(A))$.

Teorema

Sean A una C^*-álgebra y $\mathrm{QS}(A) := \{\varphi : A \to \mathbb{C} : \varphi \geq 0$ *y* $\|\varphi\| \leq 1\}$. *Entonces* $\mathrm{QS}(A)$ *es convexo y w^*-compacto, y* $\mathrm{ext}(\mathrm{QS}(A)) = \mathrm{PS}(A) \cup \{0\}$.

Demostración.

Como $\overline{B(0,1)} = \{\varphi \in A^\star : \|\varphi\| \leq 1\}$ es convexo y w^*-compacto, y $\{\varphi \geq 0\}$ es claramente convexo, basta mostrar que este último es w^*-cerrado para concluir que $\mathrm{QS}(A)$ es w^*-compacto. Ahora, si $(\varphi_i) \subseteq \{\varphi \geq 0\}$ es tal que $\varphi_i \overset{w^*}{\to}_i \varphi$, entonces $\varphi_i(a) \to \varphi(a)$ para todo $a \in A_+$, de modo que $\varphi(a) \geq 0$ porque $\varphi_i(a) \geq 0\ \forall i$. Luego $\varphi \geq 0$.

Para abreviar pongamos $\mathcal{E}$ en lugar de $\mathrm{ext}(\mathrm{QS}(A))$. Veamos primero que $0 \in \mathcal{E}$.

Teorema

Sean A una C^*-álgebra y $\mathrm{QS}(A) := \{\varphi : A \to \mathbb{C} : \varphi \geq 0$ *y* $\|\varphi\| \leq 1\}$. *Entonces* $\mathrm{QS}(A)$ *es convexo y w^*-compacto, y* $\mathrm{ext}(\mathrm{QS}(A)) = \mathrm{PS}(A) \cup \{0\}$.

Demostración.

Como $\overline{B(0,1)} = \{\varphi \in A^\star : \|\varphi\| \leq 1\}$ es convexo y w^*-compacto, y $\{\varphi \geq 0\}$ es claramente convexo, basta mostrar que este último es w^*-cerrado para concluir que $\mathrm{QS}(A)$ es w^*-compacto. Ahora, si $(\varphi_i) \subseteq \{\varphi \geq 0\}$ es tal que $\varphi_i \xrightarrow{w^*}_i \varphi$, entonces $\varphi_i(a) \to \varphi(a)$ para todo $a \in A_+$, de modo que $\varphi(a) \geq 0$ porque $\varphi_i(a) \geq 0\ \forall i$. Luego $\varphi \geq 0$.

Para abreviar pongamos $\mathcal{E}$ en lugar de $\mathrm{ext}(\mathrm{QS}(A))$. Veamos primero que $0 \in \mathcal{E}$. Si $0 = (1-t)\psi + t\varphi$, con $t \in (0,1)$, $\varphi, \psi \in \mathrm{QS}(A)$,

Teorema

Sean A una C^*-álgebra y $\mathrm{QS}(A) := \{\varphi : A \to \mathbb{C} : \varphi \geq 0$ *y* $\|\varphi\| \leq 1\}$*.* *Entonces* $\mathrm{QS}(A)$ *es convexo y w^*-compacto, y* $\mathrm{ext}(\mathrm{QS}(A)) = \mathrm{PS}(A) \cup \{0\}$*.*

Demostración.

Como $\overline{B(0,1)} = \{\varphi \in A^\star : \|\varphi\| \leq 1\}$ es convexo y w^*-compacto, y $\{\varphi \geq 0\}$ es claramente convexo, basta mostrar que este último es w^*-cerrado para concluir que $\mathrm{QS}(A)$ es w^*-compacto. Ahora, si $(\varphi_i) \subseteq \{\varphi \geq 0\}$ es tal que $\varphi_i \stackrel{w^*}{\to}_i \varphi$, entonces $\varphi_i(a) \to \varphi(a)$ para todo $a \in A_+$, de modo que $\varphi(a) \geq 0$ porque $\varphi_i(a) \geq 0\ \forall i$. Luego $\varphi \geq 0$.

Para abreviar pongamos $\mathcal{E}$ en lugar de $\mathrm{ext}(\mathrm{QS}(A))$. Veamos primero que $0 \in \mathcal{E}$. Si $0 = (1-t)\psi + t\varphi$, con $t \in (0,1)$, $\varphi, \psi \in \mathrm{QS}(A)$, entonces

Teorema

Sean A una C^*-álgebra y $\mathrm{QS}(A) := \{\varphi : A \to \mathbb{C} : \varphi \geq 0$ *y* $\|\varphi\| \leq 1\}$. *Entonces* $\mathrm{QS}(A)$ *es convexo y w^*-compacto, y* $\mathrm{ext}(\mathrm{QS}(A)) = \mathrm{PS}(A) \cup \{0\}$.

Demostración.

Como $\overline{B(0,1)} = \{\varphi \in A^\star : \|\varphi\| \leq 1\}$ es convexo y w^*-compacto, y $\{\varphi \geq 0\}$ es claramente convexo, basta mostrar que este último es w^*-cerrado para concluir que $\mathrm{QS}(A)$ es w^*-compacto. Ahora, si $(\varphi_i) \subseteq \{\varphi \geq 0\}$ es tal que $\varphi_i \overset{w^*}{\to}_i \varphi$, entonces $\varphi_i(a) \to \varphi(a)$ para todo $a \in A_+$, de modo que $\varphi(a) \geq 0$ porque $\varphi_i(a) \geq 0$ $\forall i$. Luego $\varphi \geq 0$.

Para abreviar pongamos $\mathcal{E}$ en lugar de $\mathrm{ext}(\mathrm{QS}(A))$. Veamos primero que $0 \in \mathcal{E}$. Si $0 = (1-t)\psi + t\varphi$, con $t \in (0,1)$, $\varphi, \psi \in \mathrm{QS}(A)$, entonces

$$0 = \|(1-t)\psi + t\varphi\|$$

Teorema

Sean A una C^*-álgebra y $\mathrm{QS}(A) := \{\varphi : A \to \mathbb{C} : \varphi \geq 0 \text{ y } \|\varphi\| \leq 1\}$. *Entonces* $\mathrm{QS}(A)$ *es convexo y w^*-compacto, y* $\mathrm{ext}(\mathrm{QS}(A)) = \mathrm{PS}(A) \cup \{0\}$.

Demostración.

Como $\overline{B(0,1)} = \{\varphi \in A^\star : \|\varphi\| \leq 1\}$ es convexo y w^*-compacto, y $\{\varphi \geq 0\}$ es claramente convexo, basta mostrar que este último es w^*-cerrado para concluir que $\mathrm{QS}(A)$ es w^*-compacto. Ahora, si $(\varphi_i) \subseteq \{\varphi \geq 0\}$ es tal que $\varphi_i \overset{w^*}{\to}_i \varphi$, entonces $\varphi_i(a) \to \varphi(a)$ para todo $a \in A_+$, de modo que $\varphi(a) \geq 0$ porque $\varphi_i(a) \geq 0$ $\forall i$. Luego $\varphi \geq 0$.

Para abreviar pongamos $\mathcal{E}$ en lugar de $\mathrm{ext}(\mathrm{QS}(A))$. Veamos primero que $0 \in \mathcal{E}$. Si $0 = (1-t)\psi + t\varphi$, con $t \in (0,1)$, $\varphi, \psi \in \mathrm{QS}(A)$, entonces

$$0 = \|(1-t)\psi + t\varphi\| = (1-t)\|\psi\| + t\|\varphi\|,$$

Teorema

Sean A una C^*-álgebra y $\mathrm{QS}(A) := \{\varphi : A \to \mathbb{C} : \varphi \geq 0$ *y* $\|\varphi\| \leq 1\}$*.* *Entonces* $\mathrm{QS}(A)$ *es convexo y w^*-compacto, y* $\mathrm{ext}(\mathrm{QS}(A)) = \mathrm{PS}(A) \cup \{0\}$*.*

Demostración.

Como $\overline{B(0,1)} = \{\varphi \in A^\star : \|\varphi\| \leq 1\}$ es convexo y w^*-compacto, y $\{\varphi \geq 0\}$ es claramente convexo, basta mostrar que este último es w^*-cerrado para concluir que $\mathrm{QS}(A)$ es w^*-compacto. Ahora, si $(\varphi_i) \subseteq \{\varphi \geq 0\}$ es tal que $\varphi_i \xrightarrow{w^*}_i \varphi$, entonces $\varphi_i(a) \to \varphi(a)$ para todo $a \in A_+$, de modo que $\varphi(a) \geq 0$ porque $\varphi_i(a) \geq 0$ $\forall i$. Luego $\varphi \geq 0$.

Para abreviar pongamos $\mathcal{E}$ en lugar de $\mathrm{ext}(\mathrm{QS}(A))$. Veamos primero que $0 \in \mathcal{E}$. Si $0 = (1-t)\psi + t\varphi$, con $t \in (0,1)$, $\varphi, \psi \in \mathrm{QS}(A)$, entonces

$$0 = \|(1-t)\psi + t\varphi\| = (1-t)\|\psi\| + t\|\varphi\|,$$

lo que implica $\|\varphi\| = \|\psi\| = 0$.

Teorema

Sean A una C^*-álgebra y $\mathrm{QS}(A) := \{\varphi : A \to \mathbb{C} : \varphi \geq 0$ *y* $\|\varphi\| \leq 1\}$. *Entonces* $\mathrm{QS}(A)$ *es convexo y* w^**-compacto, y* $\mathrm{ext}(\mathrm{QS}(A)) = \mathrm{PS}(A) \cup \{0\}$.

Demostración.

Como $\overline{B(0,1)} = \{\varphi \in A^\star : \|\varphi\| \leq 1\}$ es convexo y w^*-compacto, y $\{\varphi \geq 0\}$ es claramente convexo, basta mostrar que este último es w^*-cerrado para concluir que $\mathrm{QS}(A)$ es w^*-compacto. Ahora, si $(\varphi_i) \subseteq \{\varphi \geq 0\}$ es tal que $\varphi_i \overset{w^*}{\to}_i \varphi$, entonces $\varphi_i(a) \to \varphi(a)$ para todo $a \in A_+$, de modo que $\varphi(a) \geq 0$ porque $\varphi_i(a) \geq 0$ $\forall i$. Luego $\varphi \geq 0$.

Para abreviar pongamos $\mathcal{E}$ en lugar de $\mathrm{ext}(\mathrm{QS}(A))$. Veamos primero que $0 \in \mathcal{E}$. Si $0 = (1-t)\psi + t\varphi$, con $t \in (0,1)$, $\varphi, \psi \in \mathrm{QS}(A)$, entonces

$$0 = \|(1-t)\psi + t\varphi\| = (1-t)\|\psi\| + t\|\varphi\|,$$

lo que implica $\|\varphi\| = \|\psi\| = 0$. Por lo tanto $0 \in \mathcal{E}$.

continuación de la prueba.

Veamos ahora que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$.

continuación de la prueba.

Veamos ahora que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$.

continuación de la prueba.

Veamos ahora que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, y supongamos que $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$ son tales que $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, para algún $t \in (0,1)$.

continuación de la prueba.

Veamos ahora que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, y supongamos que $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$ son tales que $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, para algún $t \in (0,1)$. Entonces $\varphi \geq (1-t)\psi_1$ y $\varphi \geq t\psi_2$.

continuación de la prueba.

Veamos ahora que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, y supongamos que $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$ son tales que $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, para algún $t \in (0,1)$. Entonces $\varphi \geq (1-t)\psi_1$ y $\varphi \geq t\psi_2$. Luego es $(1-t)\psi_1 = (1-t)\|\psi_1\|\varphi$

continuación de la prueba.

Veamos ahora que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, y supongamos que $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$ son tales que $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, para algún $t \in (0,1)$. Entonces $\varphi \geq (1-t)\psi_1$ y $\varphi \geq t\psi_2$. Luego es $(1-t)\psi_1 = (1-t)\|\psi_1\|\varphi$ y $t\psi_2 = t\|\psi_2\|\varphi$.

continuación de la prueba.

Veamos ahora que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, y supongamos que $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$ son tales que $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, para algún $t \in (0,1)$. Entonces $\varphi \geq (1-t)\psi_1$ y $\varphi \geq t\psi_2$. Luego es $(1-t)\psi_1 = (1-t)\|\psi_1\|\varphi$ y $t\psi_2 = t\|\psi_2\|\varphi$. Es decir $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$

continuación de la prueba.

Veamos ahora que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, y supongamos que $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$ son tales que $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, para algún $t \in (0,1)$. Entonces $\varphi \geq (1-t)\psi_1$ y $\varphi \geq t\psi_2$. Luego es $(1-t)\psi_1 = (1-t)\|\psi_1\|\varphi$ y $t\psi_2 = t\|\psi_2\|\varphi$. Es decir $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$.

continuación de la prueba.

Veamos ahora que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, y supongamos que $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$ son tales que $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, para algún $t \in (0,1)$. Entonces $\varphi \geq (1-t)\psi_1$ y $\varphi \geq t\psi_2$. Luego es $(1-t)\psi_1 = (1-t)\|\psi_1\|\varphi$ y $t\psi_2 = t\|\psi_2\|\varphi$. Es decir $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$. Por otro lado:

continuación de la prueba.

Veamos ahora que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, y supongamos que $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$ son tales que $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, para algún $t \in (0,1)$. Entonces $\varphi \geq (1-t)\psi_1$ y $\varphi \geq t\psi_2$. Luego es $(1-t)\psi_1 = (1-t)\|\psi_1\|\varphi$ y $t\psi_2 = t\|\psi_2\|\varphi$. Es decir $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$. Por otro lado:

$$1 = \|\varphi\|$$

continuación de la prueba.

Veamos ahora que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, y supongamos que $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$ son tales que $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, para algún $t \in (0,1)$. Entonces $\varphi \geq (1-t)\psi_1$ y $\varphi \geq t\psi_2$. Luego es $(1-t)\psi_1 = (1-t)\|\psi_1\|\varphi$ y $t\psi_2 = t\|\psi_2\|\varphi$. Es decir $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$. Por otro lado:

$$1 = \|\varphi\| = \|(1-t)\psi_1 + t\psi_2\|$$

continuación de la prueba.

Veamos ahora que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, y supongamos que $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$ son tales que $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, para algún $t \in (0,1)$. Entonces $\varphi \geq (1-t)\psi_1$ y $\varphi \geq t\psi_2$. Luego es $(1-t)\psi_1 = (1-t)\|\psi_1\|\varphi$ y $t\psi_2 = t\|\psi_2\|\varphi$. Es decir $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$. Por otro lado:

$$1 = \|\varphi\| = \|(1-t)\psi_1 + t\psi_2\| = (1-t)\|\psi_1\| + t\|\psi_2\|$$

continuación de la prueba.

Veamos ahora que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, y supongamos que $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$ son tales que $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, para algún $t \in (0,1)$. Entonces $\varphi \geq (1-t)\psi_1$ y $\varphi \geq t\psi_2$. Luego es $(1-t)\psi_1 = (1-t)\|\psi_1\|\varphi$ y $t\psi_2 = t\|\psi_2\|\varphi$. Es decir $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$. Por otro lado:

$$1 = \|\varphi\| = \|(1-t)\psi_1 + t\psi_2\| = (1-t)\|\psi_1\| + t\|\psi_2\| \leq 1.$$

continuación de la prueba.

Veamos ahora que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, y supongamos que $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$ son tales que $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, para algún $t \in (0,1)$. Entonces $\varphi \geq (1-t)\psi_1$ y $\varphi \geq t\psi_2$. Luego es $(1-t)\psi_1 = (1-t)\|\psi_1\|\varphi$ y $t\psi_2 = t\|\psi_2\|\varphi$. Es decir $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$. Por otro lado:

$$1 = \|\varphi\| = \|(1-t)\psi_1 + t\psi_2\| = (1-t)\|\psi_1\| + t\|\psi_2\| \leq 1.$$

Entonces $\|\psi_1\| = \|\psi_2\| = 1$,

continuación de la prueba.

Veamos ahora que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, y supongamos que $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$ son tales que $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, para algún $t \in (0,1)$. Entonces $\varphi \geq (1-t)\psi_1$ y $\varphi \geq t\psi_2$. Luego es $(1-t)\psi_1 = (1-t)\|\psi_1\|\varphi$ y $t\psi_2 = t\|\psi_2\|\varphi$. Es decir $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$. Por otro lado:

$$1 = \|\varphi\| = \|(1-t)\psi_1 + t\psi_2\| = (1-t)\|\psi_1\| + t\|\psi_2\| \leq 1.$$

Entonces $\|\psi_1\| = \|\psi_2\| = 1$, que junto con las igualdades $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$ anteriormente vistas,

continuación de la prueba.

Veamos ahora que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, y supongamos que $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$ son tales que $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, para algún $t \in (0,1)$. Entonces $\varphi \geq (1-t)\psi_1$ y $\varphi \geq t\psi_2$. Luego es $(1-t)\psi_1 = (1-t)\|\psi_1\|\varphi$ y $t\psi_2 = t\|\psi_2\|\varphi$. Es decir $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$. Por otro lado:

$$1 = \|\varphi\| = \|(1-t)\psi_1 + t\psi_2\| = (1-t)\|\psi_1\| + t\|\psi_2\| \leq 1.$$

Entonces $\|\psi_1\| = \|\psi_2\| = 1$, que junto con las igualdades $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$ anteriormente vistas, implica $\psi_1 = \psi_2 = \varphi$. Entonces $\varphi \in \mathcal{E}$,

continuación de la prueba.

Veamos ahora que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, y supongamos que $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$ son tales que $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, para algún $t \in (0,1)$. Entonces $\varphi \geq (1-t)\psi_1$ y $\varphi \geq t\psi_2$. Luego es $(1-t)\psi_1 = (1-t)\|\psi_1\|\varphi$ y $t\psi_2 = t\|\psi_2\|\varphi$. Es decir $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$. Por otro lado:

$$1 = \|\varphi\| = \|(1-t)\psi_1 + t\psi_2\| = (1-t)\|\psi_1\| + t\|\psi_2\| \leq 1.$$

Entonces $\|\psi_1\| = \|\psi_2\| = 1$, que junto con las igualdades $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$ anteriormente vistas, implica $\psi_1 = \psi_2 = \varphi$. Entonces $\varphi \in \mathcal{E}$, y esto concluye la prueba de que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$.

continuación de la prueba.

Veamos ahora que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, y supongamos que $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$ son tales que $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, para algún $t \in (0,1)$. Entonces $\varphi \geq (1-t)\psi_1$ y $\varphi \geq t\psi_2$. Luego es $(1-t)\psi_1 = (1-t)\|\psi_1\|\varphi$ y $t\psi_2 = t\|\psi_2\|\varphi$. Es decir $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$. Por otro lado:

$$1 = \|\varphi\| = \|(1-t)\psi_1 + t\psi_2\| = (1-t)\|\psi_1\| + t\|\psi_2\| \leq 1.$$

Entonces $\|\psi_1\| = \|\psi_2\| = 1$, que junto con las igualdades $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$ anteriormente vistas, implica $\psi_1 = \psi_2 = \varphi$. Entonces $\varphi \in \mathcal{E}$, y esto concluye la prueba de que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$.

Finalmente, mostremos que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \supseteq \mathcal{E}$.

continuación de la prueba.

Veamos ahora que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, y supongamos que $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$ son tales que $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, para algún $t \in (0,1)$. Entonces $\varphi \geq (1-t)\psi_1$ y $\varphi \geq t\psi_2$. Luego es $(1-t)\psi_1 = (1-t)\|\psi_1\|\varphi$ y $t\psi_2 = t\|\psi_2\|\varphi$. Es decir $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$. Por otro lado:

$$1 = \|\varphi\| = \|(1-t)\psi_1 + t\psi_2\| = (1-t)\|\psi_1\| + t\|\psi_2\| \leq 1.$$

Entonces $\|\psi_1\| = \|\psi_2\| = 1$, que junto con las igualdades $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$ anteriormente vistas, implica $\psi_1 = \psi_2 = \varphi$. Entonces $\varphi \in \mathcal{E}$, y esto concluye la prueba de que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$.

Finalmente, mostremos que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \supseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathcal{E}$, $\varphi \neq 0$,

continuación de la prueba.

Veamos ahora que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, y supongamos que $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$ son tales que $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, para algún $t \in (0,1)$. Entonces $\varphi \geq (1-t)\psi_1$ y $\varphi \geq t\psi_2$. Luego es $(1-t)\psi_1 = (1-t)\|\psi_1\|\varphi$ y $t\psi_2 = t\|\psi_2\|\varphi$. Es decir $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$. Por otro lado:

$$1 = \|\varphi\| = \|(1-t)\psi_1 + t\psi_2\| = (1-t)\|\psi_1\| + t\|\psi_2\| \leq 1.$$

Entonces $\|\psi_1\| = \|\psi_2\| = 1$, que junto con las igualdades $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$ anteriormente vistas, implica $\psi_1 = \psi_2 = \varphi$. Entonces $\varphi \in \mathcal{E}$, y esto concluye la prueba de que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$.

Finalmente, mostremos que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \supseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathcal{E}$, $\varphi \neq 0$, y sea $0 \leq \psi \leq \varphi$, con $0 \neq \psi \neq \varphi$

continuación de la prueba.

Veamos ahora que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, y supongamos que $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$ son tales que $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, para algún $t \in (0,1)$. Entonces $\varphi \geq (1-t)\psi_1$ y $\varphi \geq t\psi_2$. Luego es $(1-t)\psi_1 = (1-t)\|\psi_1\|\varphi$ y $t\psi_2 = t\|\psi_2\|\varphi$. Es decir $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$. Por otro lado:

$$1 = \|\varphi\| = \|(1-t)\psi_1 + t\psi_2\| = (1-t)\|\psi_1\| + t\|\psi_2\| \leq 1.$$

Entonces $\|\psi_1\| = \|\psi_2\| = 1$, que junto con las igualdades $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$ anteriormente vistas, implica $\psi_1 = \psi_2 = \varphi$. Entonces $\varphi \in \mathcal{E}$, y esto concluye la prueba de que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$.

Finalmente, mostremos que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \supseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathcal{E}$, $\varphi \neq 0$, y sea $0 \leq \psi \leq \varphi$, con $0 \neq \psi \neq \varphi$.

continuación de la prueba.

Veamos ahora que $\mathrm{PS}(A)\cup\{0\}\subseteq\mathcal{E}$. Sea $\varphi\in\mathrm{PS}(A)$, y supongamos que $\psi_1,\psi_2\in\mathrm{QS}(A)$ son tales que $\varphi=(1-t)\psi_1+t\psi_2$, para algún $t\in(0,1)$. Entonces $\varphi\geq(1-t)\psi_1$ y $\varphi\geq t\psi_2$. Luego es $(1-t)\psi_1=(1-t)\|\psi_1\|\varphi$ y $t\psi_2=t\|\psi_2\|\varphi$. Es decir $\psi_1=\|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2=\|\psi_2\|\varphi$. Por otro lado:

$$1=\|\varphi\|=\|(1-t)\psi_1+t\psi_2\|=(1-t)\|\psi_1\|+t\|\psi_2\|\leq 1.$$

Entonces $\|\psi_1\|=\|\psi_2\|=1$, que junto con las igualdades $\psi_1=\|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2=\|\psi_2\|\varphi$ anteriormente vistas, implica $\psi_1=\psi_2=\varphi$. Entonces $\varphi\in\mathcal{E}$, y esto concluye la prueba de que $\mathrm{PS}(A)\cup\{0\}\subseteq\mathcal{E}$.

Finalmente, mostremos que $\mathrm{PS}(A)\cup\{0\}\supseteq\mathcal{E}$. Sea $\varphi\in\mathcal{E}$, $\varphi\neq 0$, y sea $0\leq\psi\leq\varphi$, con $0\neq\psi\neq\varphi$. Como $\frac{\psi}{\|\psi\|}$, $\frac{\varphi-\psi}{\|\varphi-\psi\|}\in\mathrm{S}(A)$,

continuación de la prueba.

Veamos ahora que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, y supongamos que $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$ son tales que $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, para algún $t \in (0,1)$. Entonces $\varphi \geq (1-t)\psi_1$ y $\varphi \geq t\psi_2$. Luego es $(1-t)\psi_1 = (1-t)\|\psi_1\|\varphi$ y $t\psi_2 = t\|\psi_2\|\varphi$. Es decir $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$. Por otro lado:

$$1 = \|\varphi\| = \|(1-t)\psi_1 + t\psi_2\| = (1-t)\|\psi_1\| + t\|\psi_2\| \leq 1.$$

Entonces $\|\psi_1\| = \|\psi_2\| = 1$, que junto con las igualdades $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$ anteriormente vistas, implica $\psi_1 = \psi_2 = \varphi$. Entonces $\varphi \in \mathcal{E}$, y esto concluye la prueba de que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$.

Finalmente, mostremos que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \supseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathcal{E}$, $\varphi \neq 0$, y sea $0 \leq \psi \leq \varphi$, con $0 \neq \psi \neq \varphi$. Como $\frac{\psi}{\|\psi\|}, \frac{\varphi-\psi}{\|\varphi-\psi\|} \in \mathrm{S}(A)$, y se tiene $\|\psi\| + \|\varphi - \psi\| = \|\psi + \varphi - \psi\| = \|\varphi\| = 1$,

continuación de la prueba.

Veamos ahora que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, y supongamos que $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$ son tales que $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, para algún $t \in (0,1)$. Entonces $\varphi \geq (1-t)\psi_1$ y $\varphi \geq t\psi_2$. Luego es $(1-t)\psi_1 = (1-t)\|\psi_1\|\varphi$ y $t\psi_2 = t\|\psi_2\|\varphi$. Es decir $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$. Por otro lado:

$$1 = \|\varphi\| = \|(1-t)\psi_1 + t\psi_2\| = (1-t)\|\psi_1\| + t\|\psi_2\| \leq 1.$$

Entonces $\|\psi_1\| = \|\psi_2\| = 1$, que junto con las igualdades $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$ anteriormente vistas, implica $\psi_1 = \psi_2 = \varphi$. Entonces $\varphi \in \mathcal{E}$, y esto concluye la prueba de que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$.

Finalmente, mostremos que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \supseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathcal{E}$, $\varphi \neq 0$, y sea $0 \leq \psi \leq \varphi$, con $0 \neq \psi \neq \varphi$. Como $\frac{\psi}{\|\psi\|}, \frac{\varphi-\psi}{\|\varphi-\psi\|} \in \mathrm{S}(A)$, y se tiene $\|\psi\| + \|\varphi - \psi\| = \|\psi + \varphi - \psi\| = \|\varphi\| = 1$, y además

continuación de la prueba.

Veamos ahora que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, y supongamos que $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$ son tales que $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, para algún $t \in (0,1)$. Entonces $\varphi \geq (1-t)\psi_1$ y $\varphi \geq t\psi_2$. Luego es $(1-t)\psi_1 = (1-t)\|\psi_1\|\varphi$ y $t\psi_2 = t\|\psi_2\|\varphi$. Es decir $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$. Por otro lado:

$$1 = \|\varphi\| = \|(1-t)\psi_1 + t\psi_2\| = (1-t)\|\psi_1\| + t\|\psi_2\| \leq 1.$$

Entonces $\|\psi_1\| = \|\psi_2\| = 1$, que junto con las igualdades $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$ anteriormente vistas, implica $\psi_1 = \psi_2 = \varphi$. Entonces $\varphi \in \mathcal{E}$, y esto concluye la prueba de que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$.

Finalmente, mostremos que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \supseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathcal{E}$, $\varphi \neq 0$, y sea $0 \leq \psi \leq \varphi$, con $0 \neq \psi \neq \varphi$. Como $\frac{\psi}{\|\psi\|}, \frac{\varphi-\psi}{\|\varphi-\psi\|} \in \mathrm{S}(A)$, y se tiene $\|\psi\| + \|\varphi - \psi\| = \|\psi + \varphi - \psi\| = \|\varphi\| = 1$, y además

continuación de la prueba.

Veamos ahora que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, y supongamos que $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$ son tales que $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, para algún $t \in (0,1)$. Entonces $\varphi \geq (1-t)\psi_1$ y $\varphi \geq t\psi_2$. Luego es $(1-t)\psi_1 = (1-t)\|\psi_1\|\varphi$ y $t\psi_2 = t\|\psi_2\|\varphi$. Es decir $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$. Por otro lado:

$$1 = \|\varphi\| = \|(1-t)\psi_1 + t\psi_2\| = (1-t)\|\psi_1\| + t\|\psi_2\| \leq 1.$$

Entonces $\|\psi_1\| = \|\psi_2\| = 1$, que junto con las igualdades $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$ anteriormente vistas, implica $\psi_1 = \psi_2 = \varphi$. Entonces $\varphi \in \mathcal{E}$, y esto concluye la prueba de que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$.

Finalmente, mostremos que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \supseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathcal{E}$, $\varphi \neq 0$, y sea $0 \leq \psi \leq \varphi$, con $0 \neq \psi \neq \varphi$. Como $\frac{\psi}{\|\psi\|}, \frac{\varphi-\psi}{\|\varphi-\psi\|} \in \mathrm{S}(A)$, y se tiene $\|\psi\| + \|\varphi - \psi\| = \|\psi + \varphi - \psi\| = \|\varphi\| = 1$, y además

$$\varphi = \psi + (\varphi - \psi)$$

continuación de la prueba.

Veamos ahora que $\mathrm{PS}(A)\cup\{0\}\subseteq\mathcal{E}$. Sea $\varphi\in\mathrm{PS}(A)$, y supongamos que $\psi_1,\psi_2\in\mathrm{QS}(A)$ son tales que $\varphi=(1-t)\psi_1+t\psi_2$, para algún $t\in(0,1)$. Entonces $\varphi\geq(1-t)\psi_1$ y $\varphi\geq t\psi_2$. Luego es $(1-t)\psi_1=(1-t)\|\psi_1\|\varphi$ y $t\psi_2=t\|\psi_2\|\varphi$. Es decir $\psi_1=\|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2=\|\psi_2\|\varphi$. Por otro lado:

$$1=\|\varphi\|=\|(1-t)\psi_1+t\psi_2\|=(1-t)\|\psi_1\|+t\|\psi_2\|\leq 1.$$

Entonces $\|\psi_1\|=\|\psi_2\|=1$, que junto con las igualdades $\psi_1=\|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2=\|\psi_2\|\varphi$ anteriormente vistas, implica $\psi_1=\psi_2=\varphi$. Entonces $\varphi\in\mathcal{E}$, y esto concluye la prueba de que $\mathrm{PS}(A)\cup\{0\}\subseteq\mathcal{E}$.

Finalmente, mostremos que $\mathrm{PS}(A)\cup\{0\}\supseteq\mathcal{E}$. Sea $\varphi\in\mathcal{E}$, $\varphi\neq 0$, y sea $0\leq\psi\leq\varphi$, con $0\neq\psi\neq\varphi$. Como $\frac{\psi}{\|\psi\|}$, $\frac{\varphi-\psi}{\|\varphi-\psi\|}\in\mathrm{S}(A)$, y se tiene $\|\psi\|+\|\varphi-\psi\|=\|\psi+\varphi-\psi\|=\|\varphi\|=1$, y además

$$\varphi=\psi+(\varphi-\psi)=\|\psi\|\frac{\psi}{\|\psi\|}+\|\varphi-\psi\|\frac{\varphi-\psi}{\|\varphi-\psi\|},$$

continuación de la prueba.

Veamos ahora que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, y supongamos que $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$ son tales que $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, para algún $t \in (0,1)$. Entonces $\varphi \geq (1-t)\psi_1$ y $\varphi \geq t\psi_2$. Luego es $(1-t)\psi_1 = (1-t)\|\psi_1\|\varphi$ y $t\psi_2 = t\|\psi_2\|\varphi$. Es decir $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$. Por otro lado:

$$1 = \|\varphi\| = \|(1-t)\psi_1 + t\psi_2\| = (1-t)\|\psi_1\| + t\|\psi_2\| \leq 1.$$

Entonces $\|\psi_1\| = \|\psi_2\| = 1$, que junto con las igualdades $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$ anteriormente vistas, implica $\psi_1 = \psi_2 = \varphi$. Entonces $\varphi \in \mathcal{E}$, y esto concluye la prueba de que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$.

Finalmente, mostremos que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \supseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathcal{E}$, $\varphi \neq 0$, y sea $0 \leq \psi \leq \varphi$, con $0 \neq \psi \neq \varphi$. Como $\frac{\psi}{\|\psi\|}$, $\frac{\varphi-\psi}{\|\varphi-\psi\|} \in \mathrm{S}(A)$, y se tiene $\|\psi\| + \|\varphi - \psi\| = \|\psi + \varphi - \psi\| = \|\varphi\| = 1$, y además

$$\varphi = \psi + (\varphi - \psi) = \|\psi\|\frac{\psi}{\|\psi\|} + \|\varphi - \psi\|\frac{\varphi-\psi}{\|\varphi-\psi\|},$$

entonces $\varphi = \frac{\psi}{\|\psi\|} = \frac{\varphi-\psi}{\|\varphi-\psi\|}$,

continuación de la prueba.

Veamos ahora que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, y supongamos que $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$ son tales que $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, para algún $t \in (0,1)$. Entonces $\varphi \geq (1-t)\psi_1$ y $\varphi \geq t\psi_2$. Luego es $(1-t)\psi_1 = (1-t)\|\psi_1\|\varphi$ y $t\psi_2 = t\|\psi_2\|\varphi$. Es decir $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$. Por otro lado:

$$1 = \|\varphi\| = \|(1-t)\psi_1 + t\psi_2\| = (1-t)\|\psi_1\| + t\|\psi_2\| \leq 1.$$

Entonces $\|\psi_1\| = \|\psi_2\| = 1$, que junto con las igualdades $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$ anteriormente vistas, implica $\psi_1 = \psi_2 = \varphi$. Entonces $\varphi \in \mathcal{E}$, y esto concluye la prueba de que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$.

Finalmente, mostremos que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \supseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathcal{E}$, $\varphi \neq 0$, y sea $0 \leq \psi \leq \varphi$, con $0 \neq \psi \neq \varphi$. Como $\frac{\psi}{\|\psi\|}, \frac{\varphi-\psi}{\|\varphi-\psi\|} \in \mathrm{S}(A)$, y se tiene $\|\psi\| + \|\varphi - \psi\| = \|\psi + \varphi - \psi\| = \|\varphi\| = 1$, y además

$$\varphi = \psi + (\varphi - \psi) = \|\psi\|\frac{\psi}{\|\psi\|} + \|\varphi - \psi\|\frac{\varphi-\psi}{\|\varphi-\psi\|},$$

entonces $\varphi = \frac{\psi}{\|\psi\|} = \frac{\varphi-\psi}{\|\varphi-\psi\|}$, porque $\varphi \in \mathcal{E}$.

continuación de la prueba.

Veamos ahora que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, y supongamos que $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$ son tales que $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, para algún $t \in (0,1)$. Entonces $\varphi \geq (1-t)\psi_1$ y $\varphi \geq t\psi_2$. Luego es $(1-t)\psi_1 = (1-t)\|\psi_1\|\varphi$ y $t\psi_2 = t\|\psi_2\|\varphi$. Es decir $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$. Por otro lado:

$$1 = \|\varphi\| = \|(1-t)\psi_1 + t\psi_2\| = (1-t)\|\psi_1\| + t\|\psi_2\| \leq 1.$$

Entonces $\|\psi_1\| = \|\psi_2\| = 1$, que junto con las igualdades $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$ anteriormente vistas, implica $\psi_1 = \psi_2 = \varphi$. Entonces $\varphi \in \mathcal{E}$, y esto concluye la prueba de que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$.

Finalmente, mostremos que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \supseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathcal{E}$, $\varphi \neq 0$, y sea $0 \leq \psi \leq \varphi$, con $0 \neq \psi \neq \varphi$. Como $\frac{\psi}{\|\psi\|}, \frac{\varphi-\psi}{\|\varphi-\psi\|} \in \mathrm{S}(A)$, y se tiene $\|\psi\| + \|\varphi - \psi\| = \|\psi + \varphi - \psi\| = \|\varphi\| = 1$, y además

$$\varphi = \psi + (\varphi - \psi) = \|\psi\|\frac{\psi}{\|\psi\|} + \|\varphi - \psi\|\frac{\varphi-\psi}{\|\varphi-\psi\|},$$

entonces $\varphi = \frac{\psi}{\|\psi\|} = \frac{\varphi-\psi}{\|\varphi-\psi\|}$, porque $\varphi \in \mathcal{E}$. Entonces $\psi = \|\psi\|\varphi$,

continuación de la prueba.

Veamos ahora que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, y supongamos que $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$ son tales que $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, para algún $t \in (0,1)$. Entonces $\varphi \geq (1-t)\psi_1$ y $\varphi \geq t\psi_2$. Luego es $(1-t)\psi_1 = (1-t)\|\psi_1\|\varphi$ y $t\psi_2 = t\|\psi_2\|\varphi$. Es decir $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$. Por otro lado:

$$1 = \|\varphi\| = \|(1-t)\psi_1 + t\psi_2\| = (1-t)\|\psi_1\| + t\|\psi_2\| \leq 1.$$

Entonces $\|\psi_1\| = \|\psi_2\| = 1$, que junto con las igualdades $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$ y $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$ anteriormente vistas, implica $\psi_1 = \psi_2 = \varphi$. Entonces $\varphi \in \mathcal{E}$, y esto concluye la prueba de que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$.

Finalmente, mostremos que $\mathrm{PS}(A) \cup \{0\} \supseteq \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathcal{E}$, $\varphi \neq 0$, y sea $0 \leq \psi \leq \varphi$, con $0 \neq \psi \neq \varphi$. Como $\frac{\psi}{\|\psi\|}, \frac{\varphi-\psi}{\|\varphi-\psi\|} \in \mathrm{S}(A)$, y se tiene $\|\psi\| + \|\varphi - \psi\| = \|\psi + \varphi - \psi\| = \|\varphi\| = 1$, y además

$$\varphi = \psi + (\varphi - \psi) = \|\psi\|\frac{\psi}{\|\psi\|} + \|\varphi - \psi\|\frac{\varphi-\psi}{\|\varphi-\psi\|},$$

entonces $\varphi = \frac{\psi}{\|\psi\|} = \frac{\varphi-\psi}{\|\varphi-\psi\|}$, porque $\varphi \in \mathcal{E}$. Entonces $\psi = \|\psi\|\varphi$, y se concluye que $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$.

Corolario

Si $\varphi \in \mathrm{QS}(A)$*, entonces existe una red* $(\varphi_i)_{i\in I}$ *de combinaciones convexas de estados puros y la funcional nula tal que* $\varphi_i \xrightarrow{w^*} \varphi$*.*

Corolario

Si $\varphi \in \mathrm{QS}(A)$*, entonces existe una red* $(\varphi_i)_{i\in I}$ *de combinaciones convexas de estados puros y la funcional nula tal que* $\varphi_i \overset{w^*}{\to} \varphi$*.*

Demostración.

Se deduce inmediatamente del teorema de Krein-Milman. $\square$

Corolario

Si $\varphi \in \mathrm{QS}(A)$*, entonces existe una red* $(\varphi_i)_{i\in I}$ *de combinaciones convexas de estados puros y la funcional nula tal que* $\varphi_i \xrightarrow{w^*} \varphi$*.*

Demostración.

Se deduce inmediatamente del teorema de Krein-Milman. $\square$

Corolario

Si A *es una* C^**-álgebra con unidad, entonces*

Corolario

Si $\varphi \in \mathrm{QS}(A)$*, entonces existe una red* $(\varphi_i)_{i\in I}$ *de combinaciones convexas de estados puros y la funcional nula tal que* $\varphi_i \xrightarrow{w^*} \varphi$.

Demostración.

Se deduce inmediatamente del teorema de Krein-Milman. □

Corolario

Si A *es una* C^**-álgebra con unidad, entonces*

(a) $\mathrm{S}(A)$ *es convexo y* w^**-compacto.*

Corolario

Si $\varphi \in \mathrm{QS}(A)$, *entonces existe una red* $(\varphi_i)_{i\in I}$ *de combinaciones convexas de estados puros y la funcional nula tal que* $\varphi_i \xrightarrow{w^*} \varphi$.

Demostración.

Se deduce inmediatamente del teorema de Krein-Milman. $\square$

Corolario

Si A *es una* C^**-álgebra con unidad, entonces*

(a) $\mathrm{S}(A)$ *es convexo y* w^**-compacto.*

(b) $\mathrm{ext}(\mathrm{S}(A)) = \mathrm{PS}(A)$.

Corolario

Si $\varphi \in \mathrm{QS}(A)$, entonces existe una red $(\varphi_i)_{i\in I}$ de combinaciones convexas de estados puros y la funcional nula tal que $\varphi_i \xrightarrow{w^*} \varphi$.

Demostración.

Se deduce inmediatamente del teorema de Krein-Milman. $\square$

Corolario

Si A es una C^*-álgebra con unidad, entonces

(a) $\mathrm{S}(A)$ *es convexo y w^*-compacto.*

(b) $\mathrm{ext}(\mathrm{S}(A)) = \mathrm{PS}(A)$.

(c) $\mathrm{S}(A) = \overline{\mathrm{Conv}\mathrm{PS}(A)}^{w^*}$.

Demostración.

Demostración.

(a) Si $(\varphi_i) \subseteq \mathrm{S}(A)$ es tal que $\varphi_i \xrightarrow{w^*} \varphi$,

Demostración.

(a) Si $(\varphi_i) \subseteq \mathrm{S}(A)$ es tal que $\varphi_i \xrightarrow{w^*} \varphi$,

Demostración.

(a) Si $(\varphi_i) \subseteq \mathsf{S}(A)$ es tal que $\varphi_i \xrightarrow{w^*} \varphi$, entonces $\varphi(1) = \lim_i \varphi_i(1) = 1$

Demostración.

(a) Si $(\varphi_i) \subseteq \mathrm{S}(A)$ es tal que $\varphi_i \xrightarrow{w^*} \varphi$, entonces $\varphi(1) = \lim_i \varphi_i(1) = 1$ y $\varphi \geq 0$.

Demostración.

(a) Si $(\varphi_i) \subseteq \mathsf{S}(A)$ es tal que $\varphi_i \xrightarrow{w^*} \varphi$, entonces $\varphi(1) = \lim_i \varphi_i(1) = 1$ y $\varphi \geq 0$. Luego $\varphi \in \mathsf{S}(A)$.

Demostración.

(a) Si $(\varphi_i) \subseteq \mathrm{S}(A)$ es tal que $\varphi_i \xrightarrow{w^*} \varphi$, entonces $\varphi(1) = \lim_i \varphi_i(1) = 1$ y $\varphi \geq 0$. Luego $\varphi \in \mathrm{S}(A)$. Entonces $\mathrm{S}(A)$ es un subconjunto cerrado del espacio w^*-compacto $\mathrm{QS}(A)$,

Demostración.

(a) Si $(\varphi_i) \subseteq \mathrm{S}(A)$ es tal que $\varphi_i \xrightarrow{w^*} \varphi$, entonces $\varphi(1) = \lim_i \varphi_i(1) = 1$ y $\varphi \geq 0$. Luego $\varphi \in \mathrm{S}(A)$. Entonces $\mathrm{S}(A)$ es un subconjunto cerrado del espacio w^*-compacto $\mathrm{QS}(A)$, y por lo tanto es w^*-compacto.

Demostración.

(a) Si $(\varphi_i) \subseteq \mathrm{S}(A)$ es tal que $\varphi_i \xrightarrow{w^*} \varphi$, entonces $\varphi(1) = \lim_i \varphi_i(1) = 1$ y $\varphi \geq 0$. Luego $\varphi \in \mathrm{S}(A)$. Entonces $\mathrm{S}(A)$ es un subconjunto cerrado del espacio w^*-compacto $\mathrm{QS}(A)$, y por lo tanto es w^*-compacto. Además $\mathrm{S}(A)$ es convexo:

Demostración.

(a) Si $(\varphi_i) \subseteq \mathrm{S}(A)$ es tal que $\varphi_i \xrightarrow{w^*} \varphi$, entonces $\varphi(1) = \lim_i \varphi_i(1) = 1$ y $\varphi \geq 0$. Luego $\varphi \in \mathrm{S}(A)$. Entonces $\mathrm{S}(A)$ es un subconjunto cerrado del espacio w^*-compacto $\mathrm{QS}(A)$, y por lo tanto es w^*-compacto. Además $\mathrm{S}(A)$ es convexo: si $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, con $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{S}(A)$,

Demostración.

(a) Si $(\varphi_i) \subseteq \mathsf{S}(A)$ es tal que $\varphi_i \xrightarrow{w^*} \varphi$, entonces $\varphi(1) = \lim_i \varphi_i(1) = 1$ y $\varphi \geq 0$. Luego $\varphi \in \mathsf{S}(A)$. Entonces $\mathsf{S}(A)$ es un subconjunto cerrado del espacio w^*-compacto $\mathsf{QS}(A)$, y por lo tanto es w^*-compacto. Además $\mathsf{S}(A)$ es convexo: si $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, con $\psi_1, \psi_2 \in \mathsf{S}(A)$, entonces $\varphi \geq 0$ y $\varphi(1) = 1$. Luego $\varphi \in \mathsf{S}(A)$.

Demostración.

(a) Si $(\varphi_i) \subseteq \mathrm{S}(A)$ es tal que $\varphi_i \xrightarrow{w^*} \varphi$, entonces $\varphi(1) = \lim_i \varphi_i(1) = 1$ y $\varphi \geq 0$. Luego $\varphi \in \mathrm{S}(A)$. Entonces $\mathrm{S}(A)$ es un subconjunto cerrado del espacio w^*-compacto $\mathrm{QS}(A)$, y por lo tanto es w^*-compacto. Además $\mathrm{S}(A)$ es convexo: si $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, con $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{S}(A)$, entonces $\varphi \geq 0$ y $\varphi(1) = 1$. Luego $\varphi \in \mathrm{S}(A)$.

(b) $\mathrm{S}(A)$ es un subconjunto extremal de $\mathrm{QS}(A)$, es decir,

Demostración.

(a) Si $(\varphi_i) \subseteq \mathrm{S}(A)$ es tal que $\varphi_i \xrightarrow{w^*} \varphi$, entonces $\varphi(1) = \lim_i \varphi_i(1) = 1$ y $\varphi \geq 0$. Luego $\varphi \in \mathrm{S}(A)$. Entonces $\mathrm{S}(A)$ es un subconjunto cerrado del espacio w^*-compacto $\mathrm{QS}(A)$, y por lo tanto es w^*-compacto. Además $\mathrm{S}(A)$ es convexo: si $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, con $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{S}(A)$, entonces $\varphi \geq 0$ y $\varphi(1) = 1$. Luego $\varphi \in \mathrm{S}(A)$.

(b) $\mathrm{S}(A)$ es un subconjunto extremal de $\mathrm{QS}(A)$, es decir,

Demostración.

(a) Si $(\varphi_i) \subseteq \mathsf{S}(A)$ es tal que $\varphi_i \xrightarrow{w^*} \varphi$, entonces $\varphi(1) = \text{lím}_i \varphi_i(1) = 1$ y $\varphi \geq 0$. Luego $\varphi \in \mathsf{S}(A)$. Entonces $\mathsf{S}(A)$ es un subconjunto cerrado del espacio w^*-compacto $\mathsf{QS}(A)$, y por lo tanto es w^*-compacto. Además $\mathsf{S}(A)$ es convexo: si $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, con $\psi_1, \psi_2 \in \mathsf{S}(A)$, entonces $\varphi \geq 0$ y $\varphi(1) = 1$. Luego $\varphi \in \mathsf{S}(A)$.

(b) $\mathsf{S}(A)$ es un subconjunto extremal de $\mathsf{QS}(A)$, es decir, si $\varphi \in \mathsf{S}(A)$ y $\psi_1, \psi_2 \in \mathsf{QS}(A)$ son tales que $\varphi \in (\psi_1, \psi_2)$

Demostración.

(a) Si $(\varphi_i) \subseteq \mathrm{S}(A)$ es tal que $\varphi_i \xrightarrow{w^*} \varphi$, entonces $\varphi(1) = \lim_i \varphi_i(1) = 1$ y $\varphi \geq 0$. Luego $\varphi \in \mathrm{S}(A)$. Entonces $\mathrm{S}(A)$ es un subconjunto cerrado del espacio w^*-compacto $\mathrm{QS}(A)$, y por lo tanto es w^*-compacto. Además $\mathrm{S}(A)$ es convexo: si $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, con $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{S}(A)$, entonces $\varphi \geq 0$ y $\varphi(1) = 1$. Luego $\varphi \in \mathrm{S}(A)$.

(b) $\mathrm{S}(A)$ es un subconjunto extremal de $\mathrm{QS}(A)$, es decir, si $\varphi \in \mathrm{S}(A)$ y $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$ son tales que $\varphi \in (\psi_1, \psi_2)$ entonces $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{S}(A)$.

Demostración.

(a) Si $(\varphi_i) \subseteq \mathsf{S}(A)$ es tal que $\varphi_i \stackrel{w^*}{\to} \varphi$, entonces $\varphi(1) = \text{lím}_i\, \varphi_i(1) = 1$ y $\varphi \geq 0$. Luego $\varphi \in \mathsf{S}(A)$. Entonces $\mathsf{S}(A)$ es un subconjunto cerrado del espacio w^*-compacto $\mathsf{QS}(A)$, y por lo tanto es w^*-compacto. Además $\mathsf{S}(A)$ es convexo: si $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, con $\psi_1, \psi_2 \in \mathsf{S}(A)$, entonces $\varphi \geq 0$ y $\varphi(1) = 1$. Luego $\varphi \in \mathsf{S}(A)$.

(b) $\mathsf{S}(A)$ es un subconjunto extremal de $\mathsf{QS}(A)$, es decir, si $\varphi \in \mathsf{S}(A)$ y $\psi_1, \psi_2 \in \mathsf{QS}(A)$ son tales que $\varphi \in (\psi_1, \psi_2)$ entonces $\psi_1, \psi_2 \in \mathsf{S}(A)$. En efecto, si $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$,

Demostración.

(a) Si $(\varphi_i) \subseteq \mathsf{S}(A)$ es tal que $\varphi_i \xrightarrow{w^*} \varphi$, entonces $\varphi(1) = \text{lím}_i\, \varphi_i(1) = 1$ y $\varphi \geq 0$. Luego $\varphi \in \mathsf{S}(A)$. Entonces $\mathsf{S}(A)$ es un subconjunto cerrado del espacio w^*-compacto $\mathsf{QS}(A)$, y por lo tanto es w^*-compacto. Además $\mathsf{S}(A)$ es convexo: si $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, con $\psi_1, \psi_2 \in \mathsf{S}(A)$, entonces $\varphi \geq 0$ y $\varphi(1) = 1$. Luego $\varphi \in \mathsf{S}(A)$.

(b) $\mathsf{S}(A)$ es un subconjunto extremal de $\mathsf{QS}(A)$, es decir, si $\varphi \in \mathsf{S}(A)$ y $\psi_1, \psi_2 \in \mathsf{QS}(A)$ son tales que $\varphi \in (\psi_1, \psi_2)$ entonces $\psi_1, \psi_2 \in \mathsf{S}(A)$. En efecto, si $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, entonces $\psi_1(1) = 1 = \psi_2(1)$ porque:

Demostración.

(a) Si $(\varphi_i) \subseteq \mathrm{S}(A)$ es tal que $\varphi_i \xrightarrow{w^*} \varphi$, entonces $\varphi(1) = \lim_i \varphi_i(1) = 1$ y $\varphi \geq 0$. Luego $\varphi \in \mathrm{S}(A)$. Entonces $\mathrm{S}(A)$ es un subconjunto cerrado del espacio w^*-compacto $\mathrm{QS}(A)$, y por lo tanto es w^*-compacto. Además $\mathrm{S}(A)$ es convexo: si $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, con $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{S}(A)$, entonces $\varphi \geq 0$ y $\varphi(1) = 1$. Luego $\varphi \in \mathrm{S}(A)$.

(b) $\mathrm{S}(A)$ es un subconjunto extremal de $\mathrm{QS}(A)$, es decir, si $\varphi \in \mathrm{S}(A)$ y $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$ son tales que $\varphi \in (\psi_1, \psi_2)$ entonces $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{S}(A)$. En efecto, si $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, entonces $\psi_1(1) = 1 = \psi_2(1)$ porque:

$$1 = \varphi(1)$$

Demostración.

(a) Si $(\varphi_i) \subseteq \mathsf{S}(A)$ es tal que $\varphi_i \xrightarrow{w^*} \varphi$, entonces $\varphi(1) = \lim_i \varphi_i(1) = 1$ y $\varphi \geq 0$. Luego $\varphi \in \mathsf{S}(A)$. Entonces $\mathsf{S}(A)$ es un subconjunto cerrado del espacio w^*-compacto $\mathsf{QS}(A)$, y por lo tanto es w^*-compacto. Además $\mathsf{S}(A)$ es convexo: si $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, con $\psi_1, \psi_2 \in \mathsf{S}(A)$, entonces $\varphi \geq 0$ y $\varphi(1) = 1$. Luego $\varphi \in \mathsf{S}(A)$.

(b) $\mathsf{S}(A)$ es un subconjunto extremal de $\mathsf{QS}(A)$, es decir, si $\varphi \in \mathsf{S}(A)$ y $\psi_1, \psi_2 \in \mathsf{QS}(A)$ son tales que $\varphi \in (\psi_1, \psi_2)$ entonces $\psi_1, \psi_2 \in \mathsf{S}(A)$. En efecto, si $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, entonces $\psi_1(1) = 1 = \psi_2(1)$ porque:

$$1 = \varphi(1) = (1-t)\psi_1(1) + t\psi_2(1)$$

Demostración.

(a) Si $(\varphi_i) \subseteq \mathsf{S}(A)$ es tal que $\varphi_i \xrightarrow{w^*} \varphi$, entonces $\varphi(1) = \lim_i \varphi_i(1) = 1$ y $\varphi \geq 0$. Luego $\varphi \in \mathsf{S}(A)$. Entonces $\mathsf{S}(A)$ es un subconjunto cerrado del espacio w^*-compacto $\mathsf{QS}(A)$, y por lo tanto es w^*-compacto. Además $\mathsf{S}(A)$ es convexo: si $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, con $\psi_1, \psi_2 \in \mathsf{S}(A)$, entonces $\varphi \geq 0$ y $\varphi(1) = 1$. Luego $\varphi \in \mathsf{S}(A)$.

(b) $\mathsf{S}(A)$ es un subconjunto extremal de $\mathsf{QS}(A)$, es decir, si $\varphi \in \mathsf{S}(A)$ y $\psi_1, \psi_2 \in \mathsf{QS}(A)$ son tales que $\varphi \in (\psi_1, \psi_2)$ entonces $\psi_1, \psi_2 \in \mathsf{S}(A)$. En efecto, si $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, entonces $\psi_1(1) = 1 = \psi_2(1)$ porque:

$$1 = \varphi(1) = (1-t)\psi_1(1) + t\psi_2(1) \leq 1.$$

Demostración.

(a) Si $(\varphi_i) \subseteq \mathrm{S}(A)$ es tal que $\varphi_i \xrightarrow{w^*} \varphi$, entonces $\varphi(1) = \lim_i \varphi_i(1) = 1$ y $\varphi \geq 0$. Luego $\varphi \in \mathrm{S}(A)$. Entonces $\mathrm{S}(A)$ es un subconjunto cerrado del espacio w^*-compacto $\mathrm{QS}(A)$, y por lo tanto es w^*-compacto. Además $\mathrm{S}(A)$ es convexo: si $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, con $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{S}(A)$, entonces $\varphi \geq 0$ y $\varphi(1) = 1$. Luego $\varphi \in \mathrm{S}(A)$.

(b) $\mathrm{S}(A)$ es un subconjunto extremal de $\mathrm{QS}(A)$, es decir, si $\varphi \in \mathrm{S}(A)$ y $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$ son tales que $\varphi \in (\psi_1, \psi_2)$ entonces $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{S}(A)$. En efecto, si $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, entonces $\psi_1(1) = 1 = \psi_2(1)$ porque:

$$1 = \varphi(1) = (1-t)\psi_1(1) + t\psi_2(1) \leq 1.$$

Entonces $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{S}(A)$.

Demostración.

(a) Si $(\varphi_i) \subseteq \mathsf{S}(A)$ es tal que $\varphi_i \xrightarrow{w^*} \varphi$, entonces $\varphi(1) = \lim_i \varphi_i(1) = 1$ y $\varphi \geq 0$. Luego $\varphi \in \mathsf{S}(A)$. Entonces $\mathsf{S}(A)$ es un subconjunto cerrado del espacio w^*-compacto $\mathsf{QS}(A)$, y por lo tanto es w^*-compacto. Además $\mathsf{S}(A)$ es convexo: si $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, con $\psi_1, \psi_2 \in \mathsf{S}(A)$, entonces $\varphi \geq 0$ y $\varphi(1) = 1$. Luego $\varphi \in \mathsf{S}(A)$.

(b) $\mathsf{S}(A)$ es un subconjunto extremal de $\mathsf{QS}(A)$, es decir, si $\varphi \in \mathsf{S}(A)$ y $\psi_1, \psi_2 \in \mathsf{QS}(A)$ son tales que $\varphi \in (\psi_1, \psi_2)$ entonces $\psi_1, \psi_2 \in \mathsf{S}(A)$. En efecto, si $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, entonces $\psi_1(1) = 1 = \psi_2(1)$ porque:

$$1 = \varphi(1) = (1-t)\psi_1(1) + t\psi_2(1) \leq 1.$$

Entonces $\psi_1, \psi_2 \in \mathsf{S}(A)$. Por lo tanto

Demostración.

(a) Si $(\varphi_i) \subseteq \mathrm{S}(A)$ es tal que $\varphi_i \xrightarrow{w^*} \varphi$, entonces $\varphi(1) = \lim_i \varphi_i(1) = 1$ y $\varphi \geq 0$. Luego $\varphi \in \mathrm{S}(A)$. Entonces $\mathrm{S}(A)$ es un subconjunto cerrado del espacio w^*-compacto $\mathrm{QS}(A)$, y por lo tanto es w^*-compacto. Además $\mathrm{S}(A)$ es convexo: si $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, con $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{S}(A)$, entonces $\varphi \geq 0$ y $\varphi(1) = 1$. Luego $\varphi \in \mathrm{S}(A)$.

(b) $\mathrm{S}(A)$ es un subconjunto extremal de $\mathrm{QS}(A)$, es decir, si $\varphi \in \mathrm{S}(A)$ y $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$ son tales que $\varphi \in (\psi_1, \psi_2)$ entonces $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{S}(A)$. En efecto, si $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, entonces $\psi_1(1) = 1 = \psi_2(1)$ porque:

$$1 = \varphi(1) = (1-t)\psi_1(1) + t\psi_2(1) \leq 1.$$

Entonces $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{S}(A)$. Por lo tanto

$$\mathrm{ext}(\mathrm{S}(A)) = \mathrm{S}(A) \cap \mathrm{ext}(\mathrm{QS}(A))$$

Demostración.

(a) Si $(\varphi_i) \subseteq \mathrm{S}(A)$ es tal que $\varphi_i \xrightarrow{w^*} \varphi$, entonces $\varphi(1) = \lim_i \varphi_i(1) = 1$ y $\varphi \geq 0$. Luego $\varphi \in \mathrm{S}(A)$. Entonces $\mathrm{S}(A)$ es un subconjunto cerrado del espacio w^*-compacto $\mathrm{QS}(A)$, y por lo tanto es w^*-compacto. Además $\mathrm{S}(A)$ es convexo: si $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, con $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{S}(A)$, entonces $\varphi \geq 0$ y $\varphi(1) = 1$. Luego $\varphi \in \mathrm{S}(A)$.

(b) $\mathrm{S}(A)$ es un subconjunto extremal de $\mathrm{QS}(A)$, es decir, si $\varphi \in \mathrm{S}(A)$ y $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$ son tales que $\varphi \in (\psi_1, \psi_2)$ entonces $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{S}(A)$. En efecto, si $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, entonces $\psi_1(1) = 1 = \psi_2(1)$ porque:

$$1 = \varphi(1) = (1-t)\psi_1(1) + t\psi_2(1) \leq 1.$$

Entonces $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{S}(A)$. Por lo tanto

$$\mathrm{ext}(\mathrm{S}(A)) = \mathrm{S}(A) \cap \mathrm{ext}(\mathrm{QS}(A)) = \mathrm{S}(A) \cap (\mathrm{PS}(A) \cup \{0\})$$

Demostración.

(a) Si $(\varphi_i) \subseteq \mathrm{S}(A)$ es tal que $\varphi_i \xrightarrow{w^*} \varphi$, entonces $\varphi(1) = \lim_i \varphi_i(1) = 1$ y $\varphi \geq 0$. Luego $\varphi \in \mathrm{S}(A)$. Entonces $\mathrm{S}(A)$ es un subconjunto cerrado del espacio w^*-compacto $\mathrm{QS}(A)$, y por lo tanto es w^*-compacto. Además $\mathrm{S}(A)$ es convexo: si $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, con $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{S}(A)$, entonces $\varphi \geq 0$ y $\varphi(1) = 1$. Luego $\varphi \in \mathrm{S}(A)$.

(b) $\mathrm{S}(A)$ es un subconjunto extremal de $\mathrm{QS}(A)$, es decir, si $\varphi \in \mathrm{S}(A)$ y $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$ son tales que $\varphi \in (\psi_1, \psi_2)$ entonces $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{S}(A)$. En efecto, si $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, entonces $\psi_1(1) = 1 = \psi_2(1)$ porque:

$$1 = \varphi(1) = (1-t)\psi_1(1) + t\psi_2(1) \leq 1.$$

Entonces $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{S}(A)$. Por lo tanto

$$\mathrm{ext}(\mathrm{S}(A)) = \mathrm{S}(A) \cap \mathrm{ext}(\mathrm{QS}(A)) = \mathrm{S}(A) \cap (\mathrm{PS}(A) \cup \{0\}) = \mathrm{PS}(A).$$

Demostración.

(a) Si $(\varphi_i) \subseteq \mathrm{S}(A)$ es tal que $\varphi_i \xrightarrow{w^*} \varphi$, entonces $\varphi(1) = \lim_i \varphi_i(1) = 1$ y $\varphi \geq 0$. Luego $\varphi \in \mathrm{S}(A)$. Entonces $\mathrm{S}(A)$ es un subconjunto cerrado del espacio w^*-compacto $\mathrm{QS}(A)$, y por lo tanto es w^*-compacto. Además $\mathrm{S}(A)$ es convexo: si $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, con $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{S}(A)$, entonces $\varphi \geq 0$ y $\varphi(1) = 1$. Luego $\varphi \in \mathrm{S}(A)$.

(b) $\mathrm{S}(A)$ es un subconjunto extremal de $\mathrm{QS}(A)$, es decir, si $\varphi \in \mathrm{S}(A)$ y $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$ son tales que $\varphi \in (\psi_1, \psi_2)$ entonces $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{S}(A)$. En efecto, si $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, entonces $\psi_1(1) = 1 = \psi_2(1)$ porque:

$$1 = \varphi(1) = (1-t)\psi_1(1) + t\psi_2(1) \leq 1.$$

Entonces $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{S}(A)$. Por lo tanto

$$\mathrm{ext}(\mathrm{S}(A)) = \mathrm{S}(A) \cap \mathrm{ext}(\mathrm{QS}(A)) = \mathrm{S}(A) \cap (\mathrm{PS}(A) \cup \{0\}) = \mathrm{PS}(A).$$

(c) Es consecuencia de las partes anteriores y del teorema de Krein-Milman.

$\square$

Corolario

Si $P(X) = \{\mu$ *medidas de probabilidad sobre* $X\}$, *siendo* X *un espacio topológico de Hausdorff y compacto. Entonces existe una red* $\{\mu_i\}$ *de medidas de probabilidad de soporte finito tales que*

$$\int_X f\, d\mu_i \to \int_X f\, d\mu$$

para toda $f \in C(X)$.

Corolario

Si $P(X) = \{\mu$ medidas de probabilidad sobre $X\}$, siendo X un espacio topológico de Hausdorff y compacto. Entonces existe una red $\{\mu_i\}$ de medidas de probabilidad de soporte finito tales que

$$\int_X f\, d\mu_i \to \int_X f\, d\mu$$

para toda $f \in C(X)$.

Demostración.

Basta tomar $A = C(X)$. □

Corolario

Si $P(X) = \{\mu$ *medidas de probabilidad sobre* $X\}$, *siendo* X *un espacio topológico de Hausdorff y compacto. Entonces existe una red* $\{\mu_i\}$ *de medidas de probabilidad de soporte finito tales que*

$$\int_X f\, d\mu_i \to \int_X f\, d\mu$$

para toda $f \in C(X)$.

Demostración.

Basta tomar $A = C(X)$. $\square$

Teorema

Si $a \in A_+$, *entonces existe* $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$ *tal que* $\varphi(a) = \|a\|$.

Demostración.

Podemos suponer que $a \neq 0$. Consideremos $\varepsilon_a : \mathrm{QS}(A) \to [0, \infty)$ tal que $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a)$. Entonces

Demostración.

Podemos suponer que $a \neq 0$. Consideremos $\varepsilon_a : \mathrm{QS}(A) \to [0, \infty)$ tal que $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a)$. Entonces

- $0 \in \mathrm{Im}(\varepsilon_a)$, porque $0 \in \mathrm{QS}(A)$.

Demostración.

Podemos suponer que $a \neq 0$. Consideremos $\varepsilon_a : \mathrm{QS}(A) \to [0, \infty)$ tal que $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a)$. Entonces

- $0 \in \mathrm{Im}(\varepsilon_a)$, porque $0 \in \mathrm{QS}(A)$.
- $\mathrm{Im}(\varepsilon_a)$ es convexo, porque $\mathrm{QS}(A)$ es convexo.

Demostración.

Podemos suponer que $a \neq 0$. Consideremos $\varepsilon_a : \mathrm{QS}(A) \to [0, \infty)$ tal que $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a)$. Entonces

- $0 \in \mathrm{Im}(\varepsilon_a)$, porque $0 \in \mathrm{QS}(A)$.
- $\mathrm{Im}(\varepsilon_a)$ es convexo, porque $\mathrm{QS}(A)$ es convexo.
- $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a) \leq \|\psi\| \, \|a\| \leq \|a\|$, así que $\mathrm{Im}(\varepsilon_a) \subseteq [0, \|a\|]$.

Demostración.

Podemos suponer que $a \neq 0$. Consideremos $\varepsilon_a : \mathrm{QS}(A) \to [0, \infty)$ tal que $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a)$. Entonces

- $0 \in \mathrm{Im}(\varepsilon_a)$, porque $0 \in \mathrm{QS}(A)$.
- $\mathrm{Im}(\varepsilon_a)$ es convexo, porque $\mathrm{QS}(A)$ es convexo.
- $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a) \leq \|\psi\| \, \|a\| \leq \|a\|$, así que $\mathrm{Im}(\varepsilon_a) \subseteq [0, \|a\|]$.
- Como existe $\psi \in \mathrm{S}(A)$ tal que $\psi(a) = \|a\|$, entonces $\mathrm{Im}(\varepsilon_a) = [0, \|a\|]$.

Demostración.

Podemos suponer que $a \neq 0$. Consideremos $\varepsilon_a : \mathrm{QS}(A) \to [0, \infty)$ tal que $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a)$. Entonces

- $0 \in \mathrm{Im}(\varepsilon_a)$, porque $0 \in \mathrm{QS}(A)$.
- $\mathrm{Im}(\varepsilon_a)$ es convexo, porque $\mathrm{QS}(A)$ es convexo.
- $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a) \leq \|\psi\| \, \|a\| \leq \|a\|$, así que $\mathrm{Im}(\varepsilon_a) \subseteq [0, \|a\|]$.
- Como existe $\psi \in \mathrm{S}(A)$ tal que $\psi(a) = \|a\|$, entonces $\mathrm{Im}(\varepsilon_a) = [0, \|a\|]$.

Demostración.

Podemos suponer que $a \neq 0$. Consideremos $\varepsilon_a : \mathrm{QS}(A) \to [0, \infty)$ tal que $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a)$. Entonces

- $0 \in \mathrm{Im}(\varepsilon_a)$, porque $0 \in \mathrm{QS}(A)$.
- $\mathrm{Im}(\varepsilon_a)$ es convexo, porque $\mathrm{QS}(A)$ es convexo.
- $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a) \leq \|\psi\| \, \|a\| \leq \|a\|$, así que $\mathrm{Im}(\varepsilon_a) \subseteq [0, \|a\|]$.
- Como existe $\psi \in \mathrm{S}(A)$ tal que $\psi(a) = \|a\|$, entonces $\mathrm{Im}(\varepsilon_a) = [0, \|a\|]$.

La última propiedad muestra que $F := \{\psi \in \mathrm{QS}(A) : \psi(a) = \|a\|\} \neq \emptyset$.

Demostración.

Podemos suponer que $a \neq 0$. Consideremos $\varepsilon_a : \mathrm{QS}(A) \to [0, \infty)$ tal que $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a)$. Entonces

- $0 \in \mathrm{Im}(\varepsilon_a)$, porque $0 \in \mathrm{QS}(A)$.
- $\mathrm{Im}(\varepsilon_a)$ es convexo, porque $\mathrm{QS}(A)$ es convexo.
- $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a) \leq \|\psi\| \, \|a\| \leq \|a\|$, así que $\mathrm{Im}(\varepsilon_a) \subseteq [0, \|a\|]$.
- Como existe $\psi \in \mathrm{S}(A)$ tal que $\psi(a) = \|a\|$, entonces $\mathrm{Im}(\varepsilon_a) = [0, \|a\|]$.

La última propiedad muestra que $F := \{\psi \in \mathrm{QS}(A) : \psi(a) = \|a\|\} \neq \emptyset$. Es claro que F es convexo y w^*-cerrado.

Demostración.

Podemos suponer que $a \neq 0$. Consideremos $\varepsilon_a : \mathrm{QS}(A) \to [0, \infty)$ tal que $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a)$. Entonces

- $0 \in \mathrm{Im}(\varepsilon_a)$, porque $0 \in \mathrm{QS}(A)$.
- $\mathrm{Im}(\varepsilon_a)$ es convexo, porque $\mathrm{QS}(A)$ es convexo.
- $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a) \leq \|\psi\| \, \|a\| \leq \|a\|$, así que $\mathrm{Im}(\varepsilon_a) \subseteq [0, \|a\|]$.
- Como existe $\psi \in \mathrm{S}(A)$ tal que $\psi(a) = \|a\|$, entonces $\mathrm{Im}(\varepsilon_a) = [0, \|a\|]$.

La última propiedad muestra que $F := \{\psi \in \mathrm{QS}(A) : \psi(a) = \|a\|\} \neq \emptyset$. Es claro que F es convexo y w^*-cerrado. Además F es un subconjunto extremal de $\mathrm{QS}(A)$:

Demostración.

Podemos suponer que $a \neq 0$. Consideremos $\varepsilon_a : \mathrm{QS}(A) \to [0, \infty)$ tal que $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a)$. Entonces

- $0 \in \mathrm{Im}(\varepsilon_a)$, porque $0 \in \mathrm{QS}(A)$.
- $\mathrm{Im}(\varepsilon_a)$ es convexo, porque $\mathrm{QS}(A)$ es convexo.
- $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a) \leq \|\psi\| \, \|a\| \leq \|a\|$, así que $\mathrm{Im}(\varepsilon_a) \subseteq [0, \|a\|]$.
- Como existe $\psi \in \mathrm{S}(A)$ tal que $\psi(a) = \|a\|$, entonces $\mathrm{Im}(\varepsilon_a) = [0, \|a\|]$.

La última propiedad muestra que $F := \{\psi \in \mathrm{QS}(A) : \psi(a) = \|a\|\} \neq \emptyset$. Es claro que F es convexo y w^*-cerrado. Además F es un subconjunto extremal de $\mathrm{QS}(A)$: si $\psi \in F$ y $\psi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$ con $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$,

Demostración.

Podemos suponer que $a \neq 0$. Consideremos $\varepsilon_a : \mathrm{QS}(A) \to [0, \infty)$ tal que $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a)$. Entonces

- $0 \in \mathrm{Im}(\varepsilon_a)$, porque $0 \in \mathrm{QS}(A)$.
- $\mathrm{Im}(\varepsilon_a)$ es convexo, porque $\mathrm{QS}(A)$ es convexo.
- $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a) \leq \|\psi\| \, \|a\| \leq \|a\|$, así que $\mathrm{Im}(\varepsilon_a) \subseteq [0, \|a\|]$.
- Como existe $\psi \in \mathrm{S}(A)$ tal que $\psi(a) = \|a\|$, entonces $\mathrm{Im}(\varepsilon_a) = [0, \|a\|]$.

La última propiedad muestra que $F := \{\psi \in \mathrm{QS}(A) : \psi(a) = \|a\|\} \neq \emptyset$. Es claro que F es convexo y w^*-cerrado. Además F es un subconjunto extremal de $\mathrm{QS}(A)$: si $\psi \in F$ y $\psi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$ con $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$, entonces

Demostración.

Podemos suponer que $a \neq 0$. Consideremos $\varepsilon_a : \mathrm{QS}(A) \to [0, \infty)$ tal que $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a)$. Entonces

- $0 \in \mathrm{Im}(\varepsilon_a)$, porque $0 \in \mathrm{QS}(A)$.
- $\mathrm{Im}(\varepsilon_a)$ es convexo, porque $\mathrm{QS}(A)$ es convexo.
- $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a) \leq \|\psi\| \, \|a\| \leq \|a\|$, así que $\mathrm{Im}(\varepsilon_a) \subseteq [0, \|a\|]$.
- Como existe $\psi \in \mathrm{S}(A)$ tal que $\psi(a) = \|a\|$, entonces $\mathrm{Im}(\varepsilon_a) = [0, \|a\|]$.

La última propiedad muestra que $F := \{\psi \in \mathrm{QS}(A) : \psi(a) = \|a\|\} \neq \emptyset$. Es claro que F es convexo y w^*-cerrado. Además F es un subconjunto extremal de $\mathrm{QS}(A)$: si $\psi \in F$ y $\psi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$ con $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$, entonces

$$\|a\| = \psi(a)$$

Demostración.

Podemos suponer que $a \neq 0$. Consideremos $\varepsilon_a : \mathrm{QS}(A) \to [0, \infty)$ tal que $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a)$. Entonces

- $0 \in \mathrm{Im}(\varepsilon_a)$, porque $0 \in \mathrm{QS}(A)$.
- $\mathrm{Im}(\varepsilon_a)$ es convexo, porque $\mathrm{QS}(A)$ es convexo.
- $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a) \leq \|\psi\| \, \|a\| \leq \|a\|$, así que $\mathrm{Im}(\varepsilon_a) \subseteq [0, \|a\|]$.
- Como existe $\psi \in \mathrm{S}(A)$ tal que $\psi(a) = \|a\|$, entonces $\mathrm{Im}(\varepsilon_a) = [0, \|a\|]$.

La última propiedad muestra que $F := \{\psi \in \mathrm{QS}(A) : \psi(a) = \|a\|\} \neq \emptyset$. Es claro que F es convexo y w^*-cerrado. Además F es un subconjunto extremal de $\mathrm{QS}(A)$: si $\psi \in F$ y $\psi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$ con $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$, entonces

$$\|a\| = \psi(a) = (1-t)\psi_1(a) + t\psi_2(a)$$

Demostración.

Podemos suponer que $a \neq 0$. Consideremos $\varepsilon_a : \mathrm{QS}(A) \to [0, \infty)$ tal que $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a)$. Entonces

- $0 \in \mathrm{Im}(\varepsilon_a)$, porque $0 \in \mathrm{QS}(A)$.
- $\mathrm{Im}(\varepsilon_a)$ es convexo, porque $\mathrm{QS}(A)$ es convexo.
- $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a) \leq \|\psi\| \, \|a\| \leq \|a\|$, así que $\mathrm{Im}(\varepsilon_a) \subseteq [0, \|a\|]$.
- Como existe $\psi \in \mathrm{S}(A)$ tal que $\psi(a) = \|a\|$, entonces $\mathrm{Im}(\varepsilon_a) = [0, \|a\|]$.

La última propiedad muestra que $F := \{\psi \in \mathrm{QS}(A) : \psi(a) = \|a\|\} \neq \emptyset$. Es claro que F es convexo y w^*-cerrado. Además F es un subconjunto extremal de $\mathrm{QS}(A)$: si $\psi \in F$ y $\psi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$ con $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$, entonces

$$\|a\| = \psi(a) = (1-t)\psi_1(a) + t\psi_2(a) \leq \|a\|,$$

Demostración.

Podemos suponer que $a \neq 0$. Consideremos $\varepsilon_a : \mathrm{QS}(A) \to [0, \infty)$ tal que $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a)$. Entonces

- $0 \in \mathrm{Im}(\varepsilon_a)$, porque $0 \in \mathrm{QS}(A)$.
- $\mathrm{Im}(\varepsilon_a)$ es convexo, porque $\mathrm{QS}(A)$ es convexo.
- $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a) \leq \|\psi\| \, \|a\| \leq \|a\|$, así que $\mathrm{Im}(\varepsilon_a) \subseteq [0, \|a\|]$.
- Como existe $\psi \in \mathrm{S}(A)$ tal que $\psi(a) = \|a\|$, entonces $\mathrm{Im}(\varepsilon_a) = [0, \|a\|]$.

La última propiedad muestra que $F := \{\psi \in \mathrm{QS}(A) : \psi(a) = \|a\|\} \neq \emptyset$. Es claro que F es convexo y w^*-cerrado. Además F es un subconjunto extremal de $\mathrm{QS}(A)$: si $\psi \in F$ y $\psi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$ con $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$, entonces

$$\|a\| = \psi(a) = (1-t)\psi_1(a) + t\psi_2(a) \leq \|a\|,$$

de donde $\psi_1(a) = \|a\| = \psi_2(a)$.

Demostración.

Podemos suponer que $a \neq 0$. Consideremos $\varepsilon_a : \mathrm{QS}(A) \to [0, \infty)$ tal que $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a)$. Entonces

- $0 \in \mathrm{Im}(\varepsilon_a)$, porque $0 \in \mathrm{QS}(A)$.
- $\mathrm{Im}(\varepsilon_a)$ es convexo, porque $\mathrm{QS}(A)$ es convexo.
- $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a) \leq \|\psi\| \, \|a\| \leq \|a\|$, así que $\mathrm{Im}(\varepsilon_a) \subseteq [0, \|a\|]$.
- Como existe $\psi \in \mathrm{S}(A)$ tal que $\psi(a) = \|a\|$, entonces $\mathrm{Im}(\varepsilon_a) = [0, \|a\|]$.

La última propiedad muestra que $F := \{\psi \in \mathrm{QS}(A) : \psi(a) = \|a\|\} \neq \emptyset$. Es claro que F es convexo y w^*-cerrado. Además F es un subconjunto extremal de $\mathrm{QS}(A)$: si $\psi \in F$ y $\psi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$ con $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$, entonces

$$\|a\| = \psi(a) = (1-t)\psi_1(a) + t\psi_2(a) \leq \|a\|,$$

de donde $\psi_1(a) = \|a\| = \psi_2(a)$. Luego $\psi_1, \psi_2 \in F$.

Demostración.

Podemos suponer que $a \neq 0$. Consideremos $\varepsilon_a : \mathrm{QS}(A) \to [0,\infty)$ tal que $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a)$. Entonces

- $0 \in \mathrm{Im}(\varepsilon_a)$, porque $0 \in \mathrm{QS}(A)$.
- $\mathrm{Im}(\varepsilon_a)$ es convexo, porque $\mathrm{QS}(A)$ es convexo.
- $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a) \leq \|\psi\| \, \|a\| \leq \|a\|$, así que $\mathrm{Im}(\varepsilon_a) \subseteq [0, \|a\|]$.
- Como existe $\psi \in \mathrm{S}(A)$ tal que $\psi(a) = \|a\|$, entonces $\mathrm{Im}(\varepsilon_a) = [0, \|a\|]$.

La última propiedad muestra que $F := \{\psi \in \mathrm{QS}(A) : \psi(a) = \|a\|\} \neq \emptyset$. Es claro que F es convexo y w^*-cerrado. Además F es un subconjunto extremal de $\mathrm{QS}(A)$: si $\psi \in F$ y $\psi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$ con $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$, entonces

$$\|a\| = \psi(a) = (1-t)\psi_1(a) + t\psi_2(a) \leq \|a\|,$$

de donde $\psi_1(a) = \|a\| = \psi_2(a)$. Luego $\psi_1, \psi_2 \in F$. En consecuencia existe $\varphi \in \mathrm{ext}(\mathrm{QS}(A))$ tal que $\varphi \in F$.

Demostración.

Podemos suponer que $a \neq 0$. Consideremos $\varepsilon_a : \mathrm{QS}(A) \to [0, \infty)$ tal que $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a)$. Entonces

- $0 \in \mathrm{Im}(\varepsilon_a)$, porque $0 \in \mathrm{QS}(A)$.
- $\mathrm{Im}(\varepsilon_a)$ es convexo, porque $\mathrm{QS}(A)$ es convexo.
- $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a) \leq \|\psi\| \, \|a\| \leq \|a\|$, así que $\mathrm{Im}(\varepsilon_a) \subseteq [0, \|a\|]$.
- Como existe $\psi \in \mathrm{S}(A)$ tal que $\psi(a) = \|a\|$, entonces $\mathrm{Im}(\varepsilon_a) = [0, \|a\|]$.

La última propiedad muestra que $F := \{\psi \in \mathrm{QS}(A) : \psi(a) = \|a\|\} \neq \emptyset$. Es claro que F es convexo y w^*-cerrado. Además F es un subconjunto extremal de $\mathrm{QS}(A)$: si $\psi \in F$ y $\psi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$ con $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$, entonces

$$\|a\| = \psi(a) = (1-t)\psi_1(a) + t\psi_2(a) \leq \|a\|,$$

de donde $\psi_1(a) = \|a\| = \psi_2(a)$. Luego $\psi_1, \psi_2 \in F$. En consecuencia existe $\varphi \in \mathrm{ext}(\mathrm{QS}(A))$ tal que $\varphi \in F$. Como φ es no nula,

Demostración.

Podemos suponer que $a \neq 0$. Consideremos $\varepsilon_a : \mathrm{QS}(A) \to [0, \infty)$ tal que $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a)$. Entonces

- $0 \in \mathrm{Im}(\varepsilon_a)$, porque $0 \in \mathrm{QS}(A)$.
- $\mathrm{Im}(\varepsilon_a)$ es convexo, porque $\mathrm{QS}(A)$ es convexo.
- $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a) \leq \|\psi\| \, \|a\| \leq \|a\|$, así que $\mathrm{Im}(\varepsilon_a) \subseteq [0, \|a\|]$.
- Como existe $\psi \in \mathrm{S}(A)$ tal que $\psi(a) = \|a\|$, entonces $\mathrm{Im}(\varepsilon_a) = [0, \|a\|]$.

La última propiedad muestra que $F := \{\psi \in \mathrm{QS}(A) : \psi(a) = \|a\|\} \neq \emptyset$. Es claro que F es convexo y w^*-cerrado. Además F es un subconjunto extremal de $\mathrm{QS}(A)$: si $\psi \in F$ y $\psi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$ con $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$, entonces

$$\|a\| = \psi(a) = (1-t)\psi_1(a) + t\psi_2(a) \leq \|a\|,$$

de donde $\psi_1(a) = \|a\| = \psi_2(a)$. Luego $\psi_1, \psi_2 \in F$. En consecuencia existe $\varphi \in \mathrm{ext}(\mathrm{QS}(A))$ tal que $\varphi \in F$. Como φ es no nula, entonces $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$,

Demostración.

Podemos suponer que $a \neq 0$. Consideremos $\varepsilon_a : \mathrm{QS}(A) \to [0, \infty)$ tal que $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a)$. Entonces

- $0 \in \mathrm{Im}(\varepsilon_a)$, porque $0 \in \mathrm{QS}(A)$.
- $\mathrm{Im}(\varepsilon_a)$ es convexo, porque $\mathrm{QS}(A)$ es convexo.
- $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a) \leq \|\psi\| \, \|a\| \leq \|a\|$, así que $\mathrm{Im}(\varepsilon_a) \subseteq [0, \|a\|]$.
- Como existe $\psi \in \mathrm{S}(A)$ tal que $\psi(a) = \|a\|$, entonces $\mathrm{Im}(\varepsilon_a) = [0, \|a\|]$.

La última propiedad muestra que $F := \{\psi \in \mathrm{QS}(A) : \psi(a) = \|a\|\} \neq \emptyset$. Es claro que F es convexo y w^*-cerrado. Además F es un subconjunto extremal de $\mathrm{QS}(A)$: si $\psi \in F$ y $\psi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$ con $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{QS}(A)$, entonces

$$\|a\| = \psi(a) = (1-t)\psi_1(a) + t\psi_2(a) \leq \|a\|,$$

de donde $\psi_1(a) = \|a\| = \psi_2(a)$. Luego $\psi_1, \psi_2 \in F$. En consecuencia existe $\varphi \in \mathrm{ext}(\mathrm{QS}(A))$ tal que $\varphi \in F$. Como φ es no nula, entonces $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, y $\varphi(a) = \|a\|$ porque $\varphi \in F$.

Definición

Definimos π_u^a *la representación universal atómica como* $\pi_u^a : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_u^a)$ *dada por* $\pi_u^a = \bigoplus_{\varphi \in \mathrm{PS}(A)} \pi_\varphi$ *donde* $\pi_\varphi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\varphi)$ *es la GNS de* φ*.*

Definición

Definimos π_u^a *la representación universal atómica como* $\pi_u^a : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_u^a)$ *dada por* $\pi_u^a = \bigoplus_{\varphi \in \mathrm{PS}(A)} \pi_\varphi$ *donde* $\pi_\varphi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\varphi)$ *es la GNS de* φ*.*

Teorema

π_u^a *es fiel.*

Definición

Definimos π_u^a *la representación universal atómica como* $\pi_u^a : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_u^a)$ *dada por* $\pi_u^a = \bigoplus_{\varphi \in \mathrm{PS}(A)} \pi_\varphi$ *donde* $\pi_\varphi : A \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_\varphi)$ *es la GNS de* φ*.*

Teorema

π_u^a *es fiel.*

Demostración.

Hay que seguir paso por paso la demostración del Teorema de Gelfand-Naimark, sustituyendo estados por estados puros. $\square$