

## 1 Estados puros y representaciones irreducibles

- Comparación de funcionales positivas.
- Estados puros y representaciones irreducibles.
- Repaso sobre puntos extremales y el teorema de Krein-Milman.
- Quasi-estados y sus puntos extremales.
- Representación universal atómica.

# Estados puros y representaciones irreducibles

A continuación veremos cómo son los estados de  $A$  cuya GNS es una representación irreducible.

Supongamos que  $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$ , con  $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ . Si  $\pi$  es reducible, existe  $\mathcal{K} \leq \mathcal{H}$ ,  $0 \neq \mathcal{K} \neq \mathcal{H}$ , tal que  $\pi(a)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$  para todo  $a \in A$ . Sea  $\rho := \pi^{(\mathcal{K})}$  la subrepresentación de  $\pi$  correspondiente a  $\mathcal{K}$ . Sea  $\eta = P\xi$ . Entonces  $\psi : A \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $\psi(a) = \langle \rho(a)\eta, \eta \rangle$  es una funcional positiva, que satisface  $\psi \leq \varphi$ .

## Proposición

$T \in B(\mathcal{H})_+$  si y sólo si  $\langle T\xi, \xi \rangle \geq 0$  para todo  $\xi \in \mathcal{H}$  ( $\mathcal{H}$  complejo).

## Demostración.

( $\Rightarrow$ ) Como  $T = S^*S$  para algún  $S \in B(\mathcal{H})_+$ , si  $\xi \in \mathcal{H}$  se tiene:

$$\langle T\xi, \xi \rangle = \langle S^*S\xi, \xi \rangle = \langle S\xi, S\xi \rangle = \|S\xi\|^2 \geq 0$$

## Continuación.

( $\Leftarrow$ ) Sea  $T \in B(\mathcal{H})$  tal que  $\langle T\xi, \xi \rangle \geq 0$  para todo  $\xi \in \mathcal{H}$ . Entonces de la identidad de polarización:

$$\langle T\xi, \eta \rangle = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 i^j \langle T(\xi + i^j \eta), \xi + i^j \eta \rangle$$

se deduce que  $T = T^*$ . Entonces  $T = T_+ - T_-$ , con  $T_+, T_- \in B(\mathcal{H})_+$  tales que  $T_+ T_- = 0 = T_- T_+$ , y por lo tanto  $T_+(\mathcal{H}) \perp T_-(\mathcal{H})$ :

$\langle T_+(\xi), T_-(\eta) \rangle = \langle \xi, T_+ T_-(\eta) \rangle = 0$ . Entonces si  $\eta = T_-(\xi) \in T_-(\mathcal{H})$ , y teniendo en cuenta que  $T_-^3 \geq 0$ , se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle T\eta, \eta \rangle = \langle T_+(\eta) - T_-(\eta), T_-(\xi) \rangle = \langle T_+ T_-(\xi) - T_-^2(\xi), T_-(\xi) \rangle \\ &= \langle -T_-^2(\xi), T_-(\xi) \rangle = -\langle T_-^3(\xi), \xi \rangle = -\|T_-^{3/2}\xi\|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Entonces  $T_-^2\xi = T_-^{1/2} T_-^3(\xi) = 0$ , lo que implica

$$\|T_-(\xi)\|^2 = \langle T_-(\xi), T_-(\xi) \rangle = \langle T_-^2(\xi), \xi \rangle = 0,$$

y por lo tanto  $T_-(\xi) = 0$ . Luego  $T_- = 0$ , y por lo tanto  $T = T_+ \in B(\mathcal{H})_+$ .

## Lema

Sean  $\varphi$  y  $\psi$  funcionales positivas sobre la  $C^*$ -álgebra  $A$ , con  $\psi \leq \varphi$ , y sea  $(\mathcal{H}, \pi, \xi)$  la GNS de  $\varphi$ . Entonces existe un único  $V \in B(\mathcal{H})$  tal que:

- (a)  $V \in \pi(A)'$ .
- (b)  $\psi(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi \rangle$  para todo  $a \in A$ .
- (c)  $0 \leq V \leq \text{Id}$ .

## Demostración.

Si  $V$  y  $W$  satisfacen (a) y (b), entonces para todos  $a, b \in A$  es

$$0 = \psi(b^*a) - \psi(b^*a) = \langle \pi(b^*)(V - W)\pi(a)\xi, \xi \rangle = \langle (V - W)\pi(a)\xi, \pi(b)\xi \rangle,$$

y por lo tanto  $V = W$ , pues  $\pi(A)\xi$  es denso en  $\mathcal{H}$ . Para definir  $V$ , consideremos primero  $\eta = \pi(a)\xi$ ,  $\zeta = \pi(b)\xi$ , para ciertos  $a, b \in A$ . Entonces

$$\begin{aligned} |\psi(b^*a)| &\leq \psi(b^*b)^{\frac{1}{2}} \psi(a^*a)^{\frac{1}{2}} \leq \langle \pi(b^*b)\xi, \xi \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \pi(a^*a)\xi, \xi \rangle^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\pi(b)\xi\| \|\pi(a)\xi\| = \|\eta\| \|\zeta\| \end{aligned}$$

Luego, si también se puede escribir  $\eta = \pi(a')\xi$ ,  $\zeta = \pi(b')\xi$ :

$$\begin{aligned} |\psi(b^*a) - \psi(b'^*a')| &\leq |\psi(b^*(a - a'))| + |\psi((b^* - b'^*)a')| \\ &\leq \|\zeta\| \|\eta - \eta\| + \|\zeta - \zeta\| \|\eta\| = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto está definido el mapa  $B : \pi(A)\mathcal{H} \times \pi(A)\mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

$$B(\pi(a)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^*a),$$

que es sesquilineal y verifica que  $|B(\eta, \zeta)| \leq \|\eta\| \|\zeta\|$ . Como  $\|B\| \leq 1$ ,  $B$  se extiende por continuidad a una forma sesquilineal  $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\|B\| \leq 1$ . Sea  $V \in B(\mathcal{H})$  el único operador tal que  $B(\eta, \zeta) = \langle V\eta, \zeta \rangle$ ,  $\forall \eta, \zeta \in \mathcal{H}$ . Entonces  $\|V\| = \|B\| \leq 1$ , y como para todo  $\eta \in \mathcal{H}$  es

$$\langle V\eta, \eta \rangle = B(\eta, \eta) \geq 0 \quad \text{y} \quad \langle (Id - V)\eta, \eta \rangle = \langle \eta, \eta \rangle - B(\eta, \eta) \geq 0,$$

se tiene  $V, Id - V \in B(\mathcal{H})_+$ . Si  $\eta = \pi(a)\xi$ ,  $\zeta = \pi(b)\xi$ , entonces  $B(\eta, \zeta) = \langle V\pi(a)\xi, \pi(b)\xi \rangle = \psi(b^*a)$ . En particular

$$\begin{aligned} \psi(a) &= \lim_{\lambda} \psi(au_{\lambda}) = \lim_{\lambda} \langle V\pi(u_{\lambda})\xi, \pi(a^*)\xi \rangle \\ &= \langle V\xi, \pi(a^*)\xi \rangle = \langle \pi(a)V\xi, \xi \rangle \end{aligned}$$

## Continuación.

Resta ver que  $V \in \pi(A)'$ . Sean  $c \in A$ ,  $\eta = \pi(a)\xi$  y  $\zeta = \pi(b)\xi$ . Entonces

$$\begin{aligned}\langle V\pi(c)\eta, \zeta \rangle &= B(\pi(c)\eta, \zeta) = B(\pi(ca)\xi, \pi(b)\xi) = \psi(b^*ca) \\ &= \psi((c^*b)^*a) = B(\pi(a)\xi, \pi(c^*b)\xi) = B(\pi(a)\xi, \pi(c^*)\pi(b)\xi) \\ &= \langle V\pi(a)\xi, \pi(c)^*\pi(b)\xi \rangle = \langle V\eta, \pi(c)^*\zeta \rangle = \langle \pi(c)V\eta, \zeta \rangle.\end{aligned}$$

Entonces  $V\pi(c) = \pi(c)V$ , para todo  $c \in A$ . Luego es  $V \in \pi(A)'$ .

## Definición

*Se dice que una funcional positiva  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$  es pura si satisface la propiedad siguiente: si  $0 \leq \psi \leq \varphi$  entonces existe  $\lambda \in [0, 1]$  tal que  $\psi = \lambda\varphi$ . Si además  $\varphi$  es un estado, se dice que  $\varphi$  es un estado puro. Notación:  $\text{PS}(A) = \{\varphi : A \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ es un estado puro}\}$ .*

## Teorema

*Sea  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$  un estado, y sea  $(\pi, \mathcal{H}, \xi)$  su GNS. Entonces  $\pi$  es irreducible si y sólo si  $\varphi$  es un estado puro.*

## Demostración.

( $\Rightarrow$ ) Como  $\pi$  es irreducible, aplicando el Lema de Schur tenemos que  $\pi(A)' = \mathbb{C}Id$ . Si  $0 \leq \psi \leq \varphi$ , sea  $V \in \pi(A)'$  el operador dado por el lema previo para  $\psi$ , de modo que  $\psi(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi \rangle$  para todo  $a \in A$ . Entonces debe ser  $V = \lambda Id$ , para algún  $\lambda \in \mathbb{C}$ , y como además  $0 \leq V \leq Id$ , entonces  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

( $\Leftarrow$ ) Supongamos ahora que para todo  $\psi$  tal que  $0 \leq \psi \leq \varphi$  existe  $\lambda \in [0, 1]$  tal que  $\psi = \lambda\varphi$ . Sea  $V \in \pi(A)'$  tal que  $0 \leq V \leq Id$ , y sea  $\psi_V : A \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $\psi_V(a) = \langle \pi(a)V\xi, \xi \rangle = \langle \pi(a)\sqrt{V}\xi, \sqrt{V}\xi \rangle$  para todo  $a \in A$ . Entonces  $\psi_V \geq 0$ . Además  $\psi_V \leq \varphi$ , porque si  $a \in A_+$ :

$$\varphi(a) - \psi_V(a) = \langle \pi(a)(Id - V)\xi, \xi \rangle = \langle \pi(a)(Id - V)^{1/2}\xi, (Id - V)^{1/2}\xi \rangle \geq 0.$$

Luego existe  $\lambda \in [0, 1]$  tal que  $\psi_V = \lambda\varphi$ , es decir  $\psi_V(a) = \langle \pi(a)\lambda Id\xi, \xi \rangle$  para todo  $a \in A$ , y por lo tanto  $V = \lambda Id$  por la unicidad de  $V$  probada en el lema previo. Luego  $\pi(A)' = \mathbb{C}Id$ . El lema de Schur implica entonces que  $\pi$  es irreducible. □

## Observación

Si  $\varphi \in \text{PS}(A)$  y  $0 \leq \psi \leq \varphi$ . Entonces  $\psi = \|\psi\|\varphi$ . En efecto, como  $\varphi \in \text{PS}(A)$ , se tiene que  $\psi = \lambda\varphi$  para algún  $\lambda \in [0, 1]$ . Entonces  $\|\psi\| = |\lambda|\|\varphi\| = |\lambda| = \lambda$ . Luego  $\psi = \|\psi\|\varphi$ .

## Ejemplos

- (1) Si  $A$  es conmutativa, entonces  $\text{PS}(A) = \hat{A}$ : un estado es una medida de probabilidad, y esta probabilidad es pura si y sólo si su soporte tiene un único punto. Otra manera de verlo es notar que las representaciones irreducibles de  $A$  deben ser unidimensionales, lo cual se deduce del Lema de Schur.
- (2) Sean  $K = K(\ell^2(\mathbb{N}))$  y  $\xi \in \ell^2(\mathbb{N})$  tal que  $\|\xi\| = 1$ . La funcional  $w_\xi : K \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $w_\xi(a) = \langle a\xi, \xi \rangle$  es un estado puro. Basta usar la unicidad de la GNS y notar que la inclusión  $\iota : K \hookrightarrow B(\ell^2(\mathbb{N}))$  es una representación irreducible de  $K$  (dados  $\eta \neq 0 \neq \zeta \in \ell^2(\mathbb{N})$ , se tiene  $\frac{1}{\|\eta\|^2}\theta_{\zeta, \eta}(\eta) = \zeta$ ). Se puede ver que la única representación irreducible de  $K$  es, a menos de equivalencia unitaria, la inclusión  $K \hookrightarrow B(\ell^2(\mathbb{N}))$ . Por lo tanto  $\text{PS}(A) = \{w_\xi : \xi \in \mathcal{H}, \|\xi\| = 1\} \sim S_{\mathcal{H}}(0, 1)$ .

# Repaso sobre el teorema de Krein-Milman.

Sea  $V$  un espacio vectorial. Si  $x, y \in V$  el *segmento* de extremos  $x$  e  $y$  es el conjunto

$$[x, y] := \{x + t(y - x) : t \in [0, 1]\}.$$

Indicaremos por  $(x, y) := \{x + t(y - x) : t \in (0, 1)\}$ . Un subconjunto  $C$  de  $V$  es *convexo* si se tiene  $[x, y] \subseteq C$  siempre que  $x, y \in C$ .

Una combinación convexa de elementos de  $X \subseteq V$  es un elemento de la forma

$$t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n,$$

con  $x_1, \dots, x_n \in X$  y  $t_1, \dots, t_n \geq 0$  tales que  $\sum_{j=1}^n t_j = 1$ .

El conjunto  $\text{Conv}(X)$  de las combinaciones convexas de elementos de  $X$  se llama *cápsula convexa* de  $X$ , y es el conjunto convexo más chico que contiene a  $X$ .

Se dice que un subconjunto  $E$  de  $X$  es *extremal* en  $X$  si, siempre que  $(x, y) \cap E \neq \emptyset$  con  $x, y \in X$ , entonces  $x, y \in E$ .

Un punto  $p \in C$  es extremal en  $C$  si el conjunto  $\{p\}$  es extremal en  $C$ , es decir, si  $p \in (x, y)$  con  $x, y \in C$  implica que  $p \in C$ . El conjunto de puntos extremales de  $C$  será denotado  $\text{ext}(C)$ . Es fácil verificar que la relación de ser un subconjunto extremal es transitiva, de donde se deduce que si  $E$  es un subconjunto extremal en  $C$ , entonces  $\text{ext}(E) = E \cap \text{ext}(C)$ .

El resultado básico sobre puntos extremales es el siguiente:

### Teorema (Krein-Milman)

*Sean  $E$  un espacio localmente convexo y de Hausdorff, y supongamos que  $K \subseteq E$  es un subconjunto compacto y convexo. Entonces  $\text{ext}(K) \neq \emptyset$ , y  $K = \overline{\text{Conv}(K)}$ .*

Es frecuente utilizar el Teorema de Krein-Milman en combinación con el siguiente:

### Teorema (Banach-Alaoglu)

*Si  $E^*$  es el espacio dual de un espacio normado  $E$ , entonces  $\bar{B}_{E^*}(0, 1)$  es  $w^*$ -compacto.*

## Teorema

Sean  $A$  una  $C^*$ -álgebra y  $QS(A) := \{\varphi : A \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \geq 0 \text{ y } \|\varphi\| \leq 1\}$ .  
Entonces  $QS(A)$  es convexo y  $w^*$ -compacto, y  $\text{ext}(QS(A)) = PS(A) \cup \{0\}$ .

## Demostración.

Como  $\overline{B(0,1)} = \{\varphi \in A^* : \|\varphi\| \leq 1\}$  es convexo y  $w^*$ -compacto, y  $\{\varphi \geq 0\}$  es claramente convexo, basta mostrar que este último es  $w^*$ -cerrado para concluir que  $QS(A)$  es  $w^*$ -compacto. Ahora, si  $(\varphi_i) \subseteq \{\varphi \geq 0\}$  es tal que  $\varphi_i \xrightarrow{w^*} \varphi$ , entonces  $\varphi_i(a) \rightarrow \varphi(a)$  para todo  $a \in A_+$ , de modo que  $\varphi(a) \geq 0$  porque  $\varphi_i(a) \geq 0 \ \forall i$ . Luego  $\varphi \geq 0$ .

Para abreviar pongamos  $\mathcal{E}$  en lugar de  $\text{ext}(QS(A))$ . Veamos primero que  $0 \in \mathcal{E}$ . Si  $0 = (1-t)\psi + t\varphi$ , con  $t \in (0,1)$ ,  $\varphi, \psi \in QS(A)$ , entonces

$$0 = \|(1-t)\psi + t\varphi\| = (1-t)\|\psi\| + t\|\varphi\|,$$

lo que implica  $\|\varphi\| = \|\psi\| = 0$ . Por lo tanto  $0 \in \mathcal{E}$ .

## continuación de la prueba.

Veamos ahora que  $PS(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$ . Sea  $\varphi \in PS(A)$ , y supongamos que  $\psi_1, \psi_2 \in QS(A)$  son tales que  $\varphi = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$ , para algún  $t \in (0,1)$ . Entonces  $\varphi \geq (1-t)\psi_1$  y  $\varphi \geq t\psi_2$ . Luego es  $(1-t)\psi_1 = (1-t)\|\psi_1\|\varphi$  y  $t\psi_2 = t\|\psi_2\|\varphi$ . Es decir  $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$  y  $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$ . Por otro lado:

$$1 = \|\varphi\| = \|(1-t)\psi_1 + t\psi_2\| = (1-t)\|\psi_1\| + t\|\psi_2\| \leq 1.$$

Entonces  $\|\psi_1\| = \|\psi_2\| = 1$ , que junto con las igualdades  $\psi_1 = \|\psi_1\|\varphi$  y  $\psi_2 = \|\psi_2\|\varphi$  anteriormente vistas, implica  $\psi_1 = \psi_2 = \varphi$ . Entonces  $\varphi \in \mathcal{E}$ , y esto concluye la prueba de que  $PS(A) \cup \{0\} \subseteq \mathcal{E}$ .

Finalmente, mostremos que  $PS(A) \cup \{0\} \supseteq \mathcal{E}$ . Sea  $\varphi \in \mathcal{E}$ ,  $\varphi \neq 0$ , y sea  $0 \leq \psi \leq \varphi$ , con  $0 \neq \psi \neq \varphi$ . Como  $\frac{\psi}{\|\psi\|}, \frac{\varphi-\psi}{\|\varphi-\psi\|} \in S(A)$ , y se tiene  $\|\psi\| + \|\varphi - \psi\| = \|\psi + \varphi - \psi\| = \|\varphi\| = 1$ , y además

$$\varphi = \psi + (\varphi - \psi) = \|\psi\| \frac{\psi}{\|\psi\|} + \|\varphi - \psi\| \frac{\varphi - \psi}{\|\varphi - \psi\|},$$

entonces  $\varphi = \frac{\psi}{\|\psi\|} = \frac{\varphi - \psi}{\|\varphi - \psi\|}$ , porque  $\varphi \in \mathcal{E}$ . Entonces  $\psi = \|\psi\|\varphi$ , y se concluye que  $\varphi \in PS(A)$ .

## Corolario

*Si  $\varphi \in \text{QS}(A)$ , entonces existe una red  $(\varphi_i)_{i \in I}$  de combinaciones convexas de estados puros y la funcional nula tal que  $\varphi_i \xrightarrow{w^*} \varphi$ .*

## Demostración.

Se deduce inmediatamente del teorema de Krein-Milman. □

## Corolario

*Si  $A$  es una  $C^*$ -álgebra con unidad, entonces*

- (a)  $S(A)$  es convexo y  $w^*$ -compacto.*
- (b)  $\text{ext}(S(A)) = \text{PS}(A)$ .*
- (c)  $S(A) = \overline{\text{ConvPS}(A)}^{w^*}$ .*

- (a) Si  $(\varphi_i) \subseteq S(A)$  es tal que  $\varphi_i \xrightarrow{w^*} \varphi$ , entonces  $\varphi(1) = \lim_i \varphi_i(1) = 1$  y  $\varphi \geq 0$ . Luego  $\varphi \in S(A)$ . Entonces  $S(A)$  es un subconjunto cerrado del espacio  $w^*$ -compacto  $QS(A)$ , y por lo tanto es  $w^*$ -compacto. Además  $S(A)$  es convexo: si  $\varphi = (1 - t)\psi_1 + t\psi_2$ , con  $\psi_1, \psi_2 \in S(A)$ , entonces  $\varphi \geq 0$  y  $\varphi(1) = 1$ . Luego  $\varphi \in S(A)$ .
- (b)  $S(A)$  es un subconjunto extremal de  $QS(A)$ , es decir, si  $\varphi \in S(A)$  y  $\psi_1, \psi_2 \in QS(A)$  son tales que  $\varphi \in (\psi_1, \psi_2)$  entonces  $\psi_1, \psi_2 \in S(A)$ . En efecto, si  $\varphi = (1 - t)\psi_1 + t\psi_2$ , entonces  $\psi_1(1) = 1 = \psi_2(1)$  porque:

$$1 = \varphi(1) = (1 - t)\psi_1(1) + t\psi_2(1) \leq 1.$$

Entonces  $\psi_1, \psi_2 \in S(A)$ . Por lo tanto

$$\text{ext}(S(A)) = S(A) \cap \text{ext}(QS(A)) = S(A) \cap (PS(A) \cup \{0\}) = PS(A).$$

- (c) Es consecuencia de las partes anteriores y del teorema de Krein-Milman.



## Corolario

*Si  $P(X) = \{\mu \text{ medidas de probabilidad sobre } X\}$ , siendo  $X$  un espacio topológico de Hausdorff y compacto. Entonces existe una red  $\{\mu_i\}$  de medidas de probabilidad de soporte finito tales que*

$$\int_X f d\mu_i \rightarrow \int_X f d\mu$$

*para toda  $f \in C(X)$ .*

## Demostración.

Basta tomar  $A = C(X)$ .



## Teorema

*Si  $a \in A_+$ , entonces existe  $\varphi \in \text{PS}(A)$  tal que  $\varphi(a) = \|a\|$ .*

## Demostración.

Podemos suponer que  $a \neq 0$ . Consideremos  $\varepsilon_a : \text{QS}(A) \rightarrow [0, \infty)$  tal que  $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a)$ . Entonces

- $0 \in \text{Im}(\varepsilon_a)$ , porque  $0 \in \text{QS}(A)$ .
- $\text{Im}(\varepsilon_a)$  es convexo, porque  $\text{QS}(A)$  es convexo.
- $\varepsilon_a(\psi) = \psi(a) \leq \|\psi\| \|a\| \leq \|a\|$ , así que  $\text{Im}(\varepsilon_a) \subseteq [0, \|a\|]$ .
- Como existe  $\psi \in S(A)$  tal que  $\psi(a) = \|a\|$ , entonces  $\text{Im}(\varepsilon_a) = [0, \|a\|]$ .

La última propiedad muestra que  $F := \{\psi \in \text{QS}(A) : \psi(a) = \|a\|\} \neq \emptyset$ . Es claro que  $F$  es convexo y  $w^*$ -cerrado. Además  $F$  es un subconjunto extremal de  $\text{QS}(A)$ : si  $\psi \in F$  y  $\psi = (1 - t)\psi_1 + t\psi_2$  con  $\psi_1, \psi_2 \in \text{QS}(A)$ , entonces

$$\|a\| = \psi(a) = (1 - t)\psi_1(a) + t\psi_2(a) \leq \|a\|,$$

de donde  $\psi_1(a) = \|a\| = \psi_2(a)$ . Luego  $\psi_1, \psi_2 \in F$ . En consecuencia existe  $\varphi \in \text{ext}(\text{QS}(A))$  tal que  $\varphi \in F$ . Como  $\varphi$  es no nula, entonces  $\varphi \in \text{PS}(A)$ , y  $\varphi(a) = \|a\|$  porque  $\varphi \in F$ .

## Definición

Definimos  $\pi_u^a$  la representación universal atómica como  $\pi_u^a : A \rightarrow B(\mathcal{H}_u^a)$  dada por  $\pi_u^a = \bigoplus_{\varphi \in \text{PS}(A)} \pi_\varphi$  donde  $\pi_\varphi : A \rightarrow B(\mathcal{H}_\varphi)$  es la GNS de  $\varphi$ .

## Teorema

$\pi_u^a$  es fiel.

## Demostración.

Hay que seguir paso por paso la demostración del Teorema de Gelfand-Naimark, sustituyendo estados por estados puros. □