Álgebras de Operadores

Fernando Abadie

Centro de Matemática-FC
Universidad de la República-Uruguay

Orígenes. Objetivo.

1. 1932: John von Neumann y la mecánica cuántica.
2. Década de 1930: trabajos de F. Murray y J. von Neumann. Interés: representaciones de grupos y mecánica cuántica.
3. Fines de los años 30: Israel Gelfand y las álgebras de Banach.
4. 1943: teoremas de Gelfand-Naimark.
5. Desarrollos posteriores.

Objetivos:

1. Hacer una introducción básica a las álgebras de Banach.
2. Presentar los teoremas de Gelfand-Naimark y la teoría de representaciones para C*-álgebras.
3. Presentar y estudiar algunos ejemplos relevantes.

Álgebras de Banach

Definición

Un álgebra normada A es un espacio normado sobre $\mathbb{C}$ que es al mismo tiempo un anillo para el cual la multiplicación es $\mathbb{C}$-bilineal y satisface: $\|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|, \forall a, b \in A$.

1. *Si A tiene unidad 1 se exige $\|1\| = 1$*
2. *Si A es completa se dice que A es un álgebra de Banach.*
3. *Si A tiene una involución $*$ tal que $\|a^*\| = \|a\|$ $\forall a \in A$, se dice que A es una $*$-álgebra normada (de Banach si es completa).*
4. *Una $*$-álgebra de Banach es una C^*-álgebra si satisface la "C^*-condición":*

$$\|a^* a\| = \|a\|^2, \ \forall a \in A \tag{1}$$

Ejemplos

1. *Si H es un espacio de Hilbert, entonces $B(H)$ es una C^*-álgebra. En particular M_n: es una C^*-álgebra.*
2. $\mathcal{K}(H) \lhd B(H)$, *C^*-álgebra de los operadores compactos.*
3. $B(E)$*: operadores acotados en un espacio de Banach.*
4. $C_0(X) := \{a :\in C(X) \text{ y } |a|^{-1}[\epsilon, \infty) \text{ es compacto}, \forall \epsilon > 0\}$ *es una C^*-álgebra (conmutativa) con la norma del máximo y la conjugación como involución.*
5. *El álgebra del disco $A(\mathbb{D}) := \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \cap C(\bar{\mathbb{D}})$, con $a^*(z) = \overline{a(\bar{z})}$ y la norma del máximo.*
6. *El álgebra de Wiener: $\mathcal{W} := \{a \in C(\mathbb{T}) : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{a}(n)| < \infty\}$.*
7. *Álgebras de sucesiones: c_0, ℓ^∞*
8. *Álgebras asociadas a grupos: $\ell^1(\mathbb{Z})$, $L^1(G)$, $M(G)$.*

Homomorfismos

Definición

Un homomorfismo $\phi : A \to B$ de $(*)$-álgebras normadas es un homomorfismo de $(*)$-álgebras que además es continuo.

Ejemplos

1. **Caracteres:** $\delta_x : C_0(X) \to \mathbb{C}$ *tal que* $\delta_x(a) = a(x)$.
2. **Transformada de Fourier:** $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{T}) \to c_0(\mathbb{Z})$ *tal que*

$$\mathcal{F}(a)(n) = \int_{\mathbb{T}} a(z)z^{-n}dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(e^{it})e^{-int}dt, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

3. *Si* $\alpha : X \to Y$ *es un homeomorfismo, entonces* $a \mapsto a \circ \alpha$ *es un isomorfismo* $C_0(Y) \to C_0(X)$.
4. $\phi : \ell^1(\mathbb{Z}) \overset{\cong}{\to} \mathcal{W}$ *dada por* $(c_n) \mapsto f$, *tal que* $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n$.

Algunas construcciones

- Productos directos, sumas directas.
- Adjunción de la unidad: $A \mapsto \tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$, con:

$$(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \lambda a + \mu b, \lambda\mu) \text{ y}$$

$$\|(a, \lambda)\| = \|a\| + |\lambda|, \quad (a, \lambda)^* = (a^*, \bar{\lambda})$$

  Si $\phi : A \to B$, entonces $\tilde{\phi} : \tilde{A} \to \tilde{B}$ tal que $\tilde{\phi}(a, \lambda) = (\phi(a), \lambda)$
- Cocientes A/J. La norma es $\|a + J\| := \inf\{\|a - x\| : x \in J\}$.

Definición

Un ideal J de A se llama modular si A/J tiene unidad.

- Todo ideal modular maximal es un ideal maximal de A.

Teorema

Si A es un álgebra de Banach con unidad, entonces $\mathrm{Inv}(A) := \{a \in A : a \text{ es invertible}\}$ es abierto en A, y es un grupo topológico con la estructura heredada de A.

Demostración.

Si $a \in B(1,1)$, entonces $a^{-1} = \sum_{n\geq 0}(1-a)^n$:

$$a\sum_{n\geq 0}(1-a)^n = \sum_{n\geq 0}(1-a)^n - (1-a)\sum_{n\geq 0}(1-a)^n = 1.$$

Ahora si $a \in \mathrm{Inv}(A)$, entonces $B(a, \frac{1}{\|a^{-1}\|}) \subseteq \mathrm{Inv}(A)$, y

$$\|b^{-1} - a^{-1}\| \leq \frac{\|a-b\|\,\|a^{-1}\|^2}{1 - \|a^{-1}(a-b)\|} \to 0 \text{ si } b \to a.$$

$\square$

Definición (espectro de un elemento)

Sean A un álgebra de Banach y $a \in A$. El espectro de a en A es:

- *Si A tiene unidad:* $\sigma_A(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda \notin \mathrm{Inv}(A)\}$.
- *Si A no tiene unidad:* $\sigma_A(a) := \sigma_{\tilde{A}}(a)$.
- *El conjunto* $\rho(a) := \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ *se llama conjunto resolvente de a.*

Proposición

Sean A un álgebra de Banach con unidad, y $a \in A$.

1. *Si $\phi : A \to B$ es unital, entonces* $\sigma_B(\phi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$.
2. *Si $h : A \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo no nulo, entonces* $h(a) \in \sigma(a)$.
3. *Si $p \in \mathbb{C}[X]$, entonces* $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$.

Proposición

La función resolvente $\mathrm{R}_a : \mathbb{C} \setminus \sigma(a) \to \mathrm{Inv}(A)$, *definida como* $\mathrm{R}_a(z) = (z-a)^{-1}$, *es holomorfa, y* $\lim_{z\to\infty} \mathrm{R}_a(z) = 0$. *Además si* $|z| > \|a\|$ *se tiene:* $\mathrm{R}_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}}$.

Teorema (Gelfand)

Sean A *un álgebra de Banach y* $a \in A$. *Entonces* $\sigma(a) \subseteq \bar{D}(0, \|a\|)$, *es compacto y no vacío.*

Demostración.

1. Es directo que $\sigma(a)$ es compacto y está contenido en $\bar{D}(0, \|a\|)$.
2. Si fuera $\sigma(a) = \emptyset$, entonces $\mathrm{R}_a = 0$ por el teorema de Liouville.

$\square$

Corolario (Gelfand-Mazur)

Si A es un álgebra normada con división, entonces $A = \mathbb{C} \cdot 1_A$.

Definición (radio espectral)

Sean A un álgebra de Banach y $a \in A$. El radio espectral de a es

$$r(a) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Ejemplo

El operador de Volterra $\mathrm{V} : C([0,1]) \to C([0,1])$ *tal que*

$$\mathrm{V}_a(t) = \int_0^t a(s)\, ds$$

es no nulo, pero $r(\mathrm{V}_a) = 0$.

Teorema (Beurling-Gelfand)

Si A es un álgebra de Banach y $a \in A$, entonces

$$r(a) = \inf_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Demostración.

- $\sigma(a^n) = \sigma(a)^n \Rightarrow r(a^n) = r(a)^n \leq \|a^n\| \Rightarrow r(a) \leq \inf \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.
- Si $\mathrm{S_a} : D(0, \frac{1}{r(a)}) \to A$ tal que $\mathrm{S_a}(z) = \begin{cases} \mathrm{R_a}(\frac{1}{z}) & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$, entonces $\mathrm{S_a}$ es analítica.
- Entonces $\mathrm{S_a}(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n \ \forall z / \ |z| < \frac{1}{\limsup_n \|c_n\|^{1/n}} \Rightarrow \frac{1}{r(a)} \leq \frac{1}{\limsup_n \|c_n\|^{1/n}}$.
- Pero $c_n = a^{n-1}$, $\forall n$, así que $\limsup_n \|c_n\|^{1/n} = r(a)$.

$\square$