Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Análisis Funcional–Curso 2019

Práctico 8

1. Sean μ y ν medidas de Borel complejas y regulares en ciertos espacios localmente compactos y de Hausdorff. Probar que los espacios de Hilbert $L^2(\mu)\otimes L^2(\nu)$ y $L^2(\mu\times\nu)$ son isomorfos (sugerencia: usar el Teorema de Stone-Weierstrass).

2. Sea μ una medida σ-finita. El operador de multiplicación definido por $\phi \in L^\infty(\mu)$ está dado por $M_\phi : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ tal que $M_\phi(f) := \phi f$. Probar que M_ϕ es un operador lineal acotado cuya norma coincide con el supremo esencial de ϕ, y que el mapa $\phi \mapsto M_\phi$ es un operador acotado y homomorfismo unital de $*$-álgebras (es decir: $M_{\phi\psi} = M_\phi M_\psi$, $M_\phi^* = M_{\bar\phi}$ y $M_1 = Id$).

3. Si $\phi \in L^\infty(0,1)$ es tal que $M_\phi : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ es compacto, entonces $\phi = 0$.

4. Sea $Q = Q^2 \in B(X)$. Probar que Q es compacto si y sólo si Q es de rango finito.

5. Probar que si H es un espacio de Hilbert y $T \in B(H)$ conmuta con cualquier operador compacto entonces $T = \lambda Id$, para algún $\lambda \in \mathbb{F}$.

6. Sean H un espacio de Hilbert, Y un espacio de Banach, $T \in B(H,Y)$, y $B := \bar{B}_H(0,1)$.
   a) Probar que T es compacto si y sólo si $T|_B : (B,w) \to (Y, \|\ \|)$ es continuo.
   b) Probar que T es compacto si y sólo si $T(B)$ es un subconjunto compacto de Y.

7. Probar que si $T : H \to K$ es un operador compacto entre espacios de Hilbert, y si (e_n) es un conjunto ortonormal en H, entonces $\|Te_n\| \to 0$. ¿Vale lo recíproco?

8. El *operador de Volterra* $V : L^2[0,1] \longrightarrow L^2[0,1]$ está dado por $Vx(t) = \int_0^t x(s)ds$.
   a) Calcular V^*, $V + V^*$, y $\operatorname{ran}(V + V^*)$
   b) Hallar los valores y vectores propios de VV^*, y demostrar que $\|V\| = \frac{2}{\pi}$ (notar que si x es un vector propio, entonces x es una función de clase C^∞ que satisface cierta simple ecuación diferencial, y tal que $x(0)$ y $x'(1)$ se conocen).

9. Si H es un $\mathbb{C}$-espacio de Hilbert, se dice que $T \in B(H)$ es *positivo* si y sólo si $\langle Tx, x\rangle \geq 0$, $\forall x \in H$. Probar que un operador compacto T es positivo si y sólo si $\sigma_p(T) \subseteq [0,\infty)$.

10. Sea T un operador compacto autoadjunto.
    a) Probar que existen únicos operadores positivos y compactos A y B tales $T = A - B$ y $AB = 0 = BA$ (los operadores positivos fueron definidos en el Ejercicio 9).
    b) Probar que T es positivo si y sólo si existe un único operador compacto y autoadjunto S tal que $T = S^2$. El operador S se denota por $\sqrt{T}$.

11. *Descomposición polar.* Sea $T \in B(H,K)$ un operador compacto, con H y K de Hilbert.
    a) Probar que T^*T y TT^* son operadores compactos autoadjuntos, cuyos valores propios son todos no negativos.

b) Usando el ejercicio anterior, definimos $|T| := \sqrt{T^*T}$. Demostrar que existe una única isometría parcial $V : H \to K$ tal que $T = V|T|$ y $\ker V = \ker T$ $(= \ker |T|)$. La descomposición $T = V|T|$ se llama *descomposición polar* de T.

12. *Valores singulares.* Sea $T \in B(H, K)$, donde H y K espacios de Hilbert. Si $x \in H$, $y \in K$, definimos $\theta_{y,x} \in B(H, K)$ como $\theta_{y,x}(z) := \langle z, x\rangle y$, $\forall z \in H$. Probar que T es compacto si y sólo si existen sucesiones ortonormales $(x_n) \subseteq H$ e $(y_n) \subseteq K$, y una sucesión decreciente $(s_n) \in c_0^+$, tales que $T = \sum_n s_n \theta_{y_n,x_n}$ (sugerencia: la descomposición polar puede ser útil). En este caso se tiene $\|T\| = s_1$. Los coeficientes s_n se llaman *valores singulares* de T (observar que $s_n^2 \in \sigma_p(T^*T)$).

13. *Operadores de Hilbert-Schmidt.* Sean H y K espacios de Hilbert.

    a) Supongamos que (e_i) y (f_i) son bases ortonormales del espacio de Hilbert H. Probar que si $T \in B(H, K)$, entonces $\sum_i \|Te_i\|^2 = \sum_i \|Tf_i\|^2$.

    b) Si $T \in B(H, K)$, se define $\|T\|_2 := \sqrt{\sum_i \|Te_i\|^2}$, y se dice que T es un operador de Hilbert-Schmidt si $\|T\|_2 < \infty$. Denotaremos por $L^2(H, K)$ el conjunto de operadores de Hilbert-Schmidt de H en K, y simplemente por $L^2(H)$ si $H = K$. Probar que $\mathcal{F}(H, K) \subseteq L^2(H, K) \subseteq \mathcal{K}(H, K)$, y que $\mathcal{F}(H, K)$ es denso en $L^2(H, K)$

    c) Probar que $(L^2(H, K), \| \, \|_2)$ es un espacio de Hilbert, y describir el correspondiente producto interno.

    d) Probar que $\|T\| \leq \|T\|_2$, y deducir que $L^2(H) \subseteq K(H)$. ¿Estos espacios son iguales? (sugerencia: caracterizar los operadores autoadjuntos de Hilbert-Schmidt).

14. *Operadores integrales.* Sean μ y ν como en el Ejercicio 1. Dado $k \in L^2(\mu \times \nu)$, se define $T_k : L^2(\nu) \to L^2(\mu)$ como $T_k x(s) = \int k(s, t)x(t)d\nu(t)$.

    a) Probar que $T_k \in L^2\big(L^2(\nu), L^2(\mu)\big)$, y que $\|T_k\|_2 = \|k\|_2$.

    b) Probar que $k \mapsto T_k$ es un isomorfismo isométrico entre $L^2(\mu\times\nu)$ y $L^2\big(L^2(\nu), L^2(\mu)\big)$.

    c) Comparar $\|V\|$ y $\|V\|_2$, donde V es el operador de Volterra (Ejercicio 8).

15. Sean $X := (C([0, 1]), \| \, \|_\infty)$ y $W : X \to X$ el mapa dado por $Wx(t) = x(1) + \int_{t^2}^{t} x(s)ds$, $\forall x \in X, t \in [0, 1]$.

    a) Mostrar que W es un operador acotado y calcular $\|W\|$.

    b) Probar que W es un operador compacto.

16. *Operadores de clase traza.* Sea H un espacio de Hilbert separable. Se dice que $T \in B(H)$ es *de clase traza* si existen sucesiones $(y_n)_{n\geq 0}$ y $(z_n)_{n\geq 0}$ contenidas en la bola unidad de H, y una sucesión $(\lambda_n)_{n\geq 0} \in \ell^1$ tales que:

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, y_n\rangle z_n, \ \forall x \in H.$$

Se define entonces: $\|T\|_\nu := \text{ínf}\{\sum_{n\geq 1} |\lambda_n| : \ (\lambda_n)_{n\geq 0} \text{ como arriba}\}$.

a) Probar que T es de clase traza si y sólo si T^* lo es, y entonces $\|T\| \leq \|T\|_\nu = \|T^*\|_\nu$.

b) Mostrar que si T es de clase traza, $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, y_n \rangle z_n,\ \forall x \in H$, y si $(e_k)_{k\geq 1}$ es una base ortonormal de H, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle Te_k, e_k \rangle| \leq \|T\|_\nu$ (sugerencia: recordar que las sucesiones $(\langle e_k, y_n \rangle)_{k\geq 0}$ y $(\langle e_k, y_n \rangle)_{k\geq 0}$ están en ℓ^2, y usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz).

c) Mostrar que todo operador de rango finito es de clase traza.

d) Probar que todo operador de clase traza es compacto.

e) Sea $T : \ell^2 \to \ell^2$ tal que $Tx(n) = \frac{1}{n+1} x(n)$. Mostrar que T es compacto pero no es de clase traza (sugerencia: usar la parte *b*)).

f) Sea $N \in B(H)$ un operador normal. Demostrar que N es de clase traza si y sólo si existe una base ortonormal $(e_k)_{k\geq 1}$ formada por vectores propios de N, tal que si $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ es la sucesión de los correspondientes valores propios, entonces $\sum_{n\geq 1} |\alpha_n| < \infty$. Mostrar que en ese caso se tiene $\|N\|_\nu = \sum_{n\geq 1} |\alpha_n|$. Los operadores de clase traza en H forman un espacio de Banach con $\| \ \|_\nu$, que se denota $L^1(H)$.