Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Análisis Funcional–Curso 2019

Práctico 7

1. Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal para el espacio de Hilbert H, y considérese el conjunto $C := \{x \in H : \sum(1+\frac{1}{n})^2|\langle x, e_n\rangle|^2 \leq 1\}$. Mostrar que C es cerrado, acotado y convexo, pero sin vectores de norma máxima (sugerencia: definir $Tx = \sum(1+\frac{1}{n})\langle x, e_n\rangle e_n$. Entonces $T \in B(H)$ y $C = \{x \in H : \|Tx\| \leq 1\}$, de manera que C es cerrado y convexo. Además $\|x\|^2 = \sum|\langle x, e_n\rangle|^2 < \sum(1+\frac{1}{n})^2|\langle x, e_n\rangle|^2 \leq 1$, $\forall x \in C$, $x \neq 0$).

2. *Funciones de Haar*. Si n es un entero positivo, existen números naturales m y j, únicos, tales que $n = 2^m + j$, con $0 \leq j < 2^n$. Dado $n \in \mathbb{N}$, se define $h_n = \chi_{(0,1)}$ si $n = 0$, y $h_n = 2^{m/2}\chi_{(\frac{j}{2^m}, \frac{2j+1}{2^{m+1}})} - 2^{m/2}\chi_{(\frac{2j+1}{2^{m+1}}, \frac{j+1}{2^m})}$, si $n = 2^m + j$, con $0 \leq j < 2^n$. Las funciones h_n se llaman funciones de Haar. También se usa poner $h_{m,j}$ en lugar de h_n.

   a) Dibujar las primeras ocho funciones de Haar.

   b) Probar que si $h := \chi_{(0,\frac{1}{2})} - \chi_{(\frac{1}{2},1)}$, entonces $h_{m,k}(t) = 2^{m/2}h(2^m t - j)$, $\forall m, j$.

   c) Probar que $(h_n)_{n\geq 0}$ es una base ortonormal de $L^2(0,1)$.

3. *Funciones de Rademacher y funciones de Walsh*. Dado $n \geq 0$ se define la función de Rademacher r_n de la siguiente manera: $r_n = \sum_{k=0}^{2^n-1}(-1)^k\chi_{(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})}$, $\forall n \geq 0$ (más en general, se llama de Rademacher a cualquier función definida en (0,1) que toma cada uno de los valores 1 y -1 con probabilidad $\frac{1}{2}$). Se llama función de Walsh a cualquier producto finito de funciones de Rademacher. Para numerarlas se puede hacer lo siguiente: dado $n \geq 0$ sean $n = d_k d_{k-1} \ldots d_1$ en base 2 y $w_n := r_1^{d_1} \cdots r_k^{d_k}$. Entonces $\{w_n\}_{n\geq 0}$ es el conjunto de funciones de Walsh.

   a) Dibujar las primeras cuatro funciones de Rademacher y las primeras ocho funciones de Walsh.

   b) Probar que $(w_n)_{n\geq 0}$ es una base ortonormal de $L^2(0,1)$.

4. *Polinomios de Legendre*. Probar que si la sucesión $\{1, t, t^2, \ldots\} \subseteq L^2(-1,1)$ es ortonormalizada, se obtiene la base ortonormal $(e_n)_{n\geq 0}$, donde $e_n = \sqrt{\frac{1}{2}(2n+1)}\, P_n$, siendo P_n el n-ésimo polinomio de Legendre, es decir: $P_n = \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dt}\right)^n [(t^2-1)^n]$.

5. Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de un espacio de Hilbert H, y sea $A = \{\sqrt{n}\, e_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$. Probar que 0 está en la clausura débil de A pero que ninguna sucesión en A converge a 0 débilmente. Concluir que H con la topología dbil no es metrizable.

6. *Espacios de Bergman I.* Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, y $\mathcal{A}^2(\Omega) := \mathrm{Hol}(\Omega) \bigcap L^2(\Omega)$.

   a) Mostrar que si $\bar{B}(z,r) \subseteq \Omega$, entonces $f(z) = \frac{1}{\pi r^2}\int_{\bar{B}(z,r)} f(x)dx$, $\forall f \in \mathcal{A}^2(\Omega)$ (integrar término a término el desarrollo de Taylor de f alrededor de z).

b) Probar que $\mathcal{A}^2(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $L^2(\Omega)$, y deducir que es un rkhs, según la definición dada en el Ejercicio 13 del Práctico 6 (usar *a*) y la desigualdad de Cauchy–Schwarz para mostrar que la convergencia en $\mathcal{A}^2(\Omega)$ implica la convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos de Ω). El espacio $\mathcal{A}^2(\Omega)$ se llama espacio de Bergman de Ω.

7. *Espacios de Bergman II.* Sean $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y $\mathcal{A}^2 := \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ (ver el Ejercicio 6). Mostrar que la sucesión $(\tilde{e}_n)_{n\geq 0}$ es una base ortonormal de $\mathcal{A}^2$, donde $\tilde{e}_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, z^n$ (sugerencia: mostrar que la serie de potencias de cada $f \in \mathcal{A}^2$ converge a f en $\mathcal{A}^2$). Probar también que $K := \{f \in \mathcal{A}^2 : f(0) = 0\}$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{A}^2$, y hallar la correspondiente proyección ortogonal P_K.

8. *El espacio de Hardy.* Sea H^2 el subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{T})$ generado por los vectores e_n, $n \geq 0$. Para cada vector $f = \sum \alpha_n e_n \in H^2$ considérese $\tilde{f} : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ tal que $\tilde{f}(z) = \sum \alpha_n z^n$. Mostrar que $\tilde{f}$ pertenece al espacio de Bergman $\mathcal{A}^2$ definido en el Ejercicio 7. Inversamente, mostrar que si $g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ es tal que su serie de Taylor $g(z) = \sum \beta_n z^n$ satisface $\sum |\beta_n|^2 < \infty$, entonces existe una única $f \in H^2$ tal que $\tilde{f} = g$. Mostrar que si $g \in \mathcal{A}^2$ y $g_t(z) = g(tz)$, $0 < t < 1$, entonces $g_t = \tilde{f}_t$, para algún $f_t \in H^2$. Finalmente mostrar que $\tilde{f} = g$ para alguna $f \in H^2$ si $\sup_{0<t<1} \|f_t\| < \infty$, en cuyo caso $f_t \to f$ en H^2 (sugerencia: definir $T : H^2 \to \mathcal{A}^2$ tal que $Te_n = \sqrt{\frac{\pi}{(n+1)}}\tilde{e}_n$, y mostrar que $Tf = \tilde{f}$).

9. Sea $S \in B(\ell^2)$ el shift unilateral: $S(e_n) = e_{n+1}$, $\forall n \geq 0$. Calcular S^*, $S^n S^{*^n}$ y $S^{*^n} S^n$, $\forall n \geq 0$.

10. Sean $H := \mathbb{R}^2$, $M := \{(x, y) \in H : y = 0\}$. Para $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ sea $N_\theta := \{(x, y) \in H : y = x \tan\theta\}$. Hallar una fórmula para el idempotente $P_\theta \in \mathsf{B}(H)$ tal que $\mathrm{ran} P_\theta = M$ y $\ker P_\theta = N_\theta$. Probar que $\|P_\theta\| = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$.

11. *a*) Sean P y Q proyecciones en un espacio de Hilbert. Probar que:
    1) $P + Q$ es una proyección si y sólo si $\mathrm{ran}\, P \perp \mathrm{ran}\, Q$ y que, en ese caso, $\mathrm{ran}(P + Q) = \mathrm{ran}\, P + \mathrm{ran}\, Q$, $\ker(P + Q) = \ker P \cap \ker Q$.
    2) PQ es una proyección si y sólo si $PQ = QP$ y que, en ese caso, $\mathrm{ran}\, PQ = \mathrm{ran}\, P \cap \mathrm{ran}\, Q$, $\ker PQ = \ker P + \ker Q$.

    b) Generalizar *a*) para una familia arbitraria de proyecciones.

12. Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathsf{B}(H)$ una isometría parcial, es decir: $TT^*T = T$.

    a) Mostrar que T^* también es una isometría parcial.

    b) Probar que $P := T^*T$ y $Q := TT^*$ son proyecciones ortogonales.

    c) Sean P y Q como en *b*). Mostrar que $U : \mathrm{ran}\, P \to \mathrm{ran}\, Q$, tal que $Ux = Tx$ $\forall x \in \mathrm{ran}\, P$, es un operador unitario, mientras que $T|_{\ker P} = 0$. Los espacios $\mathrm{ran}\, P$ y $\mathrm{ran}\, Q$ se llaman *espacio inicial* y *espacio final* de T respectivamente.

13. Dada $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ se define $\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$. Se dice que ψ es una *wavelet* si la familia $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$. En ese caso se define la transformada wavelet $W : L^2(\mathbb{R}) \to \ell^2(\mathbb{Z}^2)$ como $Wf(j,k) := \langle f, \psi_{j,k}\rangle$.

   a) Probar que $h := -\chi_{[0,1/2)} + \chi_{[1/2,1)}$ es una wavelet (la wavelet de Haar).

   b) Calcular la transformada wavelet de $\chi_{[0,1)}$ en relación a la wavelet de Haar, e investigar las convergencias en $L^2(\mathbb{R})$, puntual y uniforme de $\sum_{j,k\in\mathbb{Z}^2} W\chi_{[0,1)}(j,k)h_{j,k}$ a $\chi_{[0,1)}$.

14. *Análisis multi-resolución.* Un análisis multi-resolución ortogonal en $L^2(\mathbb{R})$, con función de escala φ, es una colección $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{R})$ tal que:

   - $V_j \subseteq V_{j+1}$, $\forall j \in \mathbb{Z}$, $\cap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = 0$, y $\cup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$.
   - $f \in V_f \iff Df \in V_{j+1}$, donde $Df(x) = f(2x)$, $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$.
   - $\varphi \in V_0$, y $(T^k\varphi)_{k\in\mathbb{Z}}$ es una base de V_0, donde $Tf(x) = f(x-k)$, $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{Z}$.

   a) Calcular DT, TD, D^* y T^*, donde D y T son los operadores anteriormente definidos.

   b) Hallar una base ortonormal de V_j.

   c) Sea $W_j := V_{j+1} \ominus V_j$, es decir, $W_j = V_j^{\perp} \cap V_{j+1}$ (y por lo tanto $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$). Demostrar que $L^2(\mathbb{R}) = \oplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j$.

   d) Probar que $\chi_{[0,1)}$ es la función de escala de un análisis multi-resolución $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$, y describir cada V_j. Hallar una base ortonormal de W_j (sugerencia: notar que la wavelet de Haar h -definida en el Ejercicio 13- y todas sus trasladadas, están en W_0).